第37卷第11期 东北大学学报(自然科学版) Vol. 37, No. 11
2016年11月 Journal of Northeastern University(Natural Science) Nov. 2016

doi: 10.3969/j.issn.1005-3026.2016.11.004

具有离散和分布时滞系统的鲁棒有限时间能量–峰值控制

郑连伟
(东北大学 理学院, 辽宁 沈阳 110819)

摘 要: 研究了不确定线性时滞系统在有限时间能量–峰值性能指标约束下的鲁棒控制问题. 系统的系数矩阵包含范数有界的不确定性, 状态包含离散时滞和分布时滞. 引入一个含参数的 Lyapunov 泛函, 通过检验它的指数增长情况, 为状态和输出定界, 据此得到了闭环系统对于所有允许的不确定性有限时间有界以及满足预先指定的能量–峰值性能指标的充分条件, 同时给出了状态反馈控制率. 这些条件是有特征值约束的线性矩阵不等式, 通过把特征值约束转换成非线性矩阵不等式, 设计了锥补偿线性化(CCL)算法来求解这样的矩阵不等式, 最后用数值算例验证了所得方法的有效性.

关 键 词: 分布时滞; 有限时间有界性; 能量–峰值性能; 锥补偿线性化算法; 线性矩阵不等式

中图分类号: TP 13 **文献标志码**: A **文章编号**: 1005-3026(2016)11-1536-05

Robust Finite-Time Energy-to-Peak Control for Systems with Discrete and Distributed Delays

ZHENG Lian-wei
(School of Sciences, Northeastern University, Shenyang 110819, China. Corresponding author: ZHENG Lian-wei, E-mail: zhenglianwei@sina.com)

Abstract: The robust finite-time control problem under the constraint of energy-to-peak performance index was investigated for linear systems with delays. Norm-bounded uncertainties was included in the coefficient matrices of systems and discrete and distributed delays were included in the states. A Lyapunov functional involving a parameter was introduced. Its exponential growth was checked for bounding the states and outputs. Then, sufficient conditions were derived guaranteeing that the closed-loop systems are finite-time bounded and satisfy prescribed energy-to-peak performance index for all admissible uncertainties. What's more, the control law was obtained simultaneously. These conditions were formulated in terms of linear matrix inequalities with an eigenvalue constraint. Through transforming the constraint to nonlinear matrix inequalities, a cone complementarity linearization algorithm was designed to solve such matrix inequalities. An example was presented to show the effectiveness of the proposed method.

Key words: distributed delay; finite-time boundedness; energy-to-peak performance; cone complementarity linearization algorithm; linear matrix inequalities

稳定性反映的是系统在没有外部输入时系统本身的一种特性, 它是系统正常运行的必备条件. 在实际应用中通常要求系统具有李雅普诺夫渐近稳定性, 这种稳定性要求状态最终趋近于平衡点, 对于时间的长度和状态的幅值没有限制. 然而在某些情况下, 例如执行器饱和, 过大的状态幅值将产生非线性, 应该尽量避免, 这时一个好的选择是使用有限时间稳定性概念. 有限时间稳定性关注系统响应的暂态行为, 它要求从一个有界集合产生的状态在一个有限的时间内不超过一个阀值[1-2]. 当存在外部输入时, 文献[1]推广了有限时间稳定性的概念, 提出了有限时间有界性的概

收稿日期: 2015-12-28
基金项目: 辽宁省自然科学基金资助项目(2014020022).
作者简介: 郑连伟(1963-), 男, 辽宁新民人, 东北大学副教授, 博士.

念,文献[2]给出了有限时间镇定的动态输出反馈设计方法. 时滞存在于化工过程等多种类型的系统中,是导致系统不稳定和性能下降的一个主要原因. 文献[3]研究了一类切换时滞系统的有限时间有界性和加权 L_2 增益分析问题. 由于系统的精确模型难以得到,因此在分析与设计时必须考虑模型中的不确定性,由此产生了鲁棒性问题. 文献[4]研究了一类非线性不确定系统的鲁棒有限时间 H_∞ 控制问题.

分布时滞是实际系统中经常遇到的一种时滞类型,然而检验具有分布时滞系统的稳定性的结果却比较少见[5-6]. 系统的能量－峰值性能指标反映了能量有界的扰动信号对输出信号峰值的影响程度,在振动控制和滤波问题中都很重要[7-8]. 目前对于具有分布时滞的系统,与有限时间相关的问题尚未见研究报道. 本文研究了具有离散时滞和分布时滞的不确定线性系统的鲁棒有限时间有界性和能量－峰值性能,给出了对允许的不确定性,系统有限时间有界和具有指定的能量－峰值性能指标的充分条件和状态反馈控制器设计方法.

1　问题描述与预备知识

本文用 $\lambda_{\max}(\cdot)$ 和 $\lambda_{\min}(\cdot)$ 分别表示对称矩阵的最大和最小特征值; $*$ 表示矩阵内的对称元素; $\boldsymbol{I}$ 表示单位矩阵;对于对称矩阵 $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{P}>0\ (<0)$ 表示 $\boldsymbol{P}$ 是正定(负定)矩阵.

考虑如下具有离散和分布时滞的系统:

$$\left.\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{x}}(t) &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}(t-\tau(t)) + \\
&\quad \boldsymbol{A}_2\int_{t-\sigma(t)}^{t}\boldsymbol{x}(s)\,\mathrm{d}s + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{B}_1\boldsymbol{\omega}(t),\\
\boldsymbol{z}(t) &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{C}_1\boldsymbol{x}(t-\tau(t)) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t) + \\
&\quad \boldsymbol{D}_1\int_{t-\sigma(t)}^{t}\boldsymbol{x}(s)\,\mathrm{d}s,\\
\boldsymbol{x}(t) &= \boldsymbol{\varphi}(t),\quad t\in[-\max\{\tau,\sigma\},\ 0].
\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

式中: $\boldsymbol{x}(t)\in\mathbf{R}^n$ 是状态; $\boldsymbol{u}(t)\in\mathbf{R}^m$ 是控制输入; $\boldsymbol{\omega}(t)\in\mathbf{R}^p$ 是外部扰动信号; $\boldsymbol{z}(t)\in\mathbf{R}^q$ 是被控输出; $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 是可微分的初始向量函数; $\tau(t)$, $\sigma(t)$ 分别是可微分的离散和分布时滞函数,满足:

$$\left.\begin{aligned}
&0\leqslant\tau(t)\leqslant\tau,\ 0\leqslant\sigma(t)\leqslant\sigma;\\
&\dot{\tau}(t)\leqslant\tau_1\leqslant1,\ \dot{\sigma}(t)\leqslant\sigma_1\leqslant1.
\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

式中: $\tau_1,\tau,\sigma_1,\sigma$ 是正的常数. 假设系统(1)的系数矩阵有式(3)形式:

$$\left.\begin{aligned}
&\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_0+\boldsymbol{H}\boldsymbol{F}(t)\boldsymbol{E}_{\mathrm{a}},\ \boldsymbol{A}_1=\boldsymbol{A}_{10}+\boldsymbol{H}\boldsymbol{F}(t)\boldsymbol{E}_{\mathrm{a1}},\\
&\boldsymbol{A}_2=\boldsymbol{A}_{20}+\boldsymbol{H}\boldsymbol{F}(t)\boldsymbol{E}_{\mathrm{a2}},\ \boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_0+\boldsymbol{H}\boldsymbol{F}(t)\boldsymbol{E}_{\mathrm{b}},\\
&\boldsymbol{B}_1=\boldsymbol{B}_{10}+\boldsymbol{H}\boldsymbol{F}(t)\boldsymbol{E}_{\mathrm{b1}},\ \boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}_0+\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{F}_1(t)\boldsymbol{E}_{\mathrm{c}},\\
&\boldsymbol{C}_1=\boldsymbol{C}_{10}+\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{F}_1(t)\boldsymbol{E}_{\mathrm{c1}},\ \boldsymbol{D}=\boldsymbol{D}_0+\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{F}_1(t)\boldsymbol{E}_{\mathrm{d}},\\
&\boldsymbol{D}_1=\boldsymbol{D}_{10}+\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{F}_1(t)\boldsymbol{E}_{\mathrm{d1}}.
\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

式中: $\boldsymbol{F}(t)$, $\boldsymbol{F}_1(t)$ 是不确定时变矩阵,满足:

$$\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{F}(t)\leqslant\boldsymbol{I},\ \boldsymbol{F}_1^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{F}_1(t)\leqslant\boldsymbol{I}.\tag{4}$$

其他矩阵是常数矩阵.

本文研究系统(1)的暂态行为和性能,即在一个有限的时间段内初始状态和外部扰动信号对状态和被控输出的影响,具体描述见定义 1.

定义 1　在系统(1)中设 $\boldsymbol{u}(t)\equiv0$. 给定正定矩阵 $\boldsymbol{R}$, 正数 $c_1,c_2,c_3,d,T_{\mathrm{f}},\gamma,c_1<c_3$, 如果当系统的初始状态和外部输入信号满足

$$\left.\begin{aligned}
&\sup\nolimits_{-\max\{\tau,\sigma\}\leqslant t\leqslant0}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{R}\boldsymbol{x}(t)\leqslant c_1,\\
&\sup\nolimits_{-\tau\leqslant t\leqslant0}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{R}\dot{\boldsymbol{x}}(t)\leqslant c_2,\\
&\int_0^{T_{\mathrm{f}}}\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\omega}(t)\,\mathrm{d}t\leqslant d.
\end{aligned}\right\}\tag{5}$$

时,系统的状态满足:

$$\sup\nolimits_{0\leqslant t\leqslant T_f}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{R}\boldsymbol{x}(t)\leqslant c_3.$$

则称系统关于 $(c_1,c_2,c_3,d,T_{\mathrm{f}},\boldsymbol{R})$ 有限时间有界;如果在零初始条件下,

$$\sup\nolimits_{0\leqslant t\leqslant T_{\mathrm{f}}}\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{z}(t)\leqslant\gamma^2\int_0^{T_{\mathrm{f}}}\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\omega}(t)\,\mathrm{d}t,$$

则称系统具有能量－峰值性能指标 γ.

本文的目标是求状态反馈 $\boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(t)$, 使其和系统(1)构成的闭环系统有限时间有界或满足指定的能量－峰值性能指标. 首先给出一个引理.

引理 1[9]　设 $\boldsymbol{M}_0,\boldsymbol{H},\boldsymbol{F},\boldsymbol{E}$ 是适当维数的实矩阵,且 $\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}\leqslant\boldsymbol{I}$, 则对任何正定矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 及正数 ε, 当 $\boldsymbol{Q}^{-1}-\varepsilon\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}>0$ 时,有

$$\begin{aligned}
&(\boldsymbol{M}_0+\boldsymbol{H}\boldsymbol{F}\boldsymbol{E})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{M}_0+\boldsymbol{H}\boldsymbol{F}\boldsymbol{E})\leqslant\\
&\boldsymbol{M}_0^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Q}^{-1}-\varepsilon\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{M}_0+\varepsilon^{-1}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}.
\end{aligned}$$

2　主要结果

定理 1　考虑系统(1)和约束(2)～(4), 如果存在正定矩阵 $\boldsymbol{W},\boldsymbol{S}_1,\boldsymbol{S}_2,\boldsymbol{S}_3,\boldsymbol{Q}$, 矩阵 $\boldsymbol{V}$ 及正数 $\alpha,\varepsilon_1,\varepsilon_2,\delta$ 使得以下不等式当 $\boldsymbol{S}_4=0$ 时成立:

$$\hat{\boldsymbol{\Omega}}=\begin{bmatrix}
\hat{\boldsymbol{\Theta}} & \tau\hat{\boldsymbol{M}}_0^{\mathrm{T}} & \tau\hat{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{T}} & \hat{\boldsymbol{E}}^{\mathrm{T}}\\
\tau\hat{\boldsymbol{M}}_0 & \hat{\boldsymbol{\Omega}}_{22} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\
\tau\hat{\boldsymbol{E}} & \boldsymbol{0} & -\varepsilon_2\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0}\\
\hat{\boldsymbol{E}} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & -\varepsilon_1\boldsymbol{I}
\end{bmatrix}<0,\tag{6}$$

$$e^{\alpha T_f}\beta + e^{\alpha T_f}\lambda_4 d \le \lambda_5 c_3, \tag{7}$$

则取 $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{V}\boldsymbol{W}^{-1}$,控制器 $\boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(t)$ 使闭环系统关于$(c_1,c_2,c_3,d,T_f,\boldsymbol{R})$有限时间有界.式中:

$$\hat{\boldsymbol{\Theta}}=\begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{\Theta}}_{11} & \boldsymbol{A}_{10}\boldsymbol{W}+\boldsymbol{S}_2 & \boldsymbol{A}_{20}\boldsymbol{W} & \boldsymbol{B}_{10}\\ * & \hat{\boldsymbol{\Theta}}_{22} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ * & * & \hat{\boldsymbol{\Theta}}_{33} & \boldsymbol{0}\\ * & * & * & -\boldsymbol{Q}\end{bmatrix};$$

$$\hat{\boldsymbol{\Theta}}_{11}=\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{W}+\boldsymbol{B}_0\boldsymbol{V}+(\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{W}+\boldsymbol{B}_0\boldsymbol{V})^{\mathrm{T}}+\varepsilon_1\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}-\alpha\boldsymbol{W}+\boldsymbol{S}_1-\boldsymbol{S}_2+\sigma^2\boldsymbol{S}_3+\sigma\boldsymbol{S}_4;$$

$$\hat{\boldsymbol{\Theta}}_{22}=(\tau_1-1)\boldsymbol{S}_1-\boldsymbol{S}_2;\hat{\boldsymbol{\Theta}}_{33}=(\sigma_1-1)\boldsymbol{S}_3;$$

$$\hat{\boldsymbol{\Omega}}_{22}=-2\delta\boldsymbol{W}+\delta^2\boldsymbol{S}_2+\varepsilon_2\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}};$$

$$\hat{\boldsymbol{M}}_0=[\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{W}+\boldsymbol{B}_0\boldsymbol{V}\quad \boldsymbol{A}_{10}\boldsymbol{W}\quad \boldsymbol{A}_{20}\boldsymbol{W}\quad \boldsymbol{B}_{10}];$$

$$\hat{\boldsymbol{E}}=[\boldsymbol{E}_a\boldsymbol{W}+\boldsymbol{E}_b\boldsymbol{V}\quad \boldsymbol{E}_{a1}\boldsymbol{W}\quad \boldsymbol{E}_{a2}\boldsymbol{W}\quad \boldsymbol{E}_{b1}];$$

$$\beta=\lambda_6 c_1+\lambda_1 c_1\frac{e^{\alpha\tau}-1}{\alpha}+\lambda_2\tau c_2\frac{e^{\alpha\tau}-1-\alpha\tau}{\alpha^2}+\lambda_3\sigma c_1\frac{e^{\alpha\sigma}-1-\alpha\sigma}{\alpha^2}; \tag{8}$$

$$\left.\begin{aligned}&\lambda_k\ge\lambda_{max}(\boldsymbol{R}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{S}_k\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{R}^{-\frac{1}{2}}),k=1,2,3;\\ &\lambda_4\ge\lambda_{\max}(\boldsymbol{Q});\\ &\lambda_5\le\lambda_{\min}(\boldsymbol{R}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{R}^{-\frac{1}{2}});\\ &\lambda_6\ge\lambda_{\max}(\boldsymbol{R}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{R}^{-\frac{1}{2}}).\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

证明 设 $\boldsymbol{M}_0=[\boldsymbol{A}_0+\boldsymbol{B}_0\boldsymbol{K}\quad \boldsymbol{A}_{10}\quad \boldsymbol{A}_{20}\quad \boldsymbol{B}_{10}]$, $\boldsymbol{E}=[\boldsymbol{E}_a+\boldsymbol{E}_b\boldsymbol{K}\quad \boldsymbol{E}_{a1}\quad \boldsymbol{E}_{a2}\quad \boldsymbol{E}_{b1}]$, $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{M}_0+\boldsymbol{H}\boldsymbol{F}(t)\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{\xi}(t)=[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\ \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-\tau(t))\int_{t-\sigma(t)}^{t}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)\mathrm{d}s\ \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}(t)]^{\mathrm{T}}$,则由状态反馈 $\boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(t)$ 得到的闭环系统为

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{M}\boldsymbol{\xi}(t). \tag{10}$$

考虑 Lyapunov 泛函 $V(t)=\sum_{k=1}^{4}V_k(t)$.

式中:

$$V_1(t)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(t);$$

$$V_2(t)=\int_{t-\tau(t)}^{t}e^{\alpha(t-s)}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s+\sigma\int_{t-\sigma(t)}^{t}e^{\alpha(t-s)}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{Q}_3\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s;$$

$$V_3(t)=\tau\int_{-\tau}^{0}\int_{t+\theta}^{t}e^{\alpha(t-s)}\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{Q}_1\dot{\boldsymbol{x}}(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta;$$

$$V_4(t)=\sigma\int_{-\sigma(t)}^{0}\int_{t+\theta}^{t}e^{\alpha(t-s)}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta.$$

式中:$\boldsymbol{P},\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{Q}_1,\boldsymbol{Q}_2,\boldsymbol{Q}_3$ 是待定的正定矩阵;$\alpha>0$ 是待定参数.求 $V_k(t)$ 沿着系统(10)的轨线的导数,对任意 $\varepsilon_1>0$,有

$$\dot{V}_1(t)\le 2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}\boldsymbol{M}_0\boldsymbol{\xi}(t)+\varepsilon_1\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{x}(t)+\varepsilon_1^{-1}\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}\boldsymbol{\xi}(t).$$

利用式(2)及 Jensen 积分不等式[10]可得

$$\dot{V}_2(t)\le\alpha V_2(t)+\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)(\boldsymbol{P}_1+\sigma\boldsymbol{Q}_3)\boldsymbol{x}(t)-(1-\tau_1)\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-\tau(t))\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{x}(t-\tau(t));$$

$$\dot{V}_3(t)\le\alpha V_3(t)+\tau^2\dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t)Q_1\dot{\boldsymbol{x}}(t)-[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)-\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-\tau(t))]\boldsymbol{Q}_1[\boldsymbol{x}(t)-x(t-\tau(t))];$$

$$\dot{V}_4(t)\le\alpha V_4(t)+\sigma^2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Q}_2\boldsymbol{x}(t)-(1-\sigma_1)\left(\int_{t-\sigma(t)}^{t}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)\mathrm{d}s\right)\boldsymbol{Q}_2\left(\int_{t-\sigma(t)}^{t}\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s\right).$$

因此,

$$\dot{V}(t)-\alpha V(t)-\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\omega}(t)\le\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{\xi}(t). \tag{11}$$

式中:$\boldsymbol{\Theta}=\tilde{\boldsymbol{\Theta}}+\tau^2\boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{M}+\varepsilon_1^{-1}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}$;

$$\tilde{\boldsymbol{\Theta}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Theta}_{11} & \boldsymbol{P}\boldsymbol{A}_{10}+\boldsymbol{Q}_1 & \boldsymbol{P}\boldsymbol{A}_{20} & \boldsymbol{P}\boldsymbol{B}_{10}\\ * & \boldsymbol{\Theta}_{22} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ * & * & \boldsymbol{\Theta}_{33} & \boldsymbol{0}\\ * & * & * & -\boldsymbol{Q}\end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{\Theta}_{11}=\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}_0+\boldsymbol{B}_0\boldsymbol{K})+(\boldsymbol{A}_0+\boldsymbol{B}_0\boldsymbol{K})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\varepsilon_1\boldsymbol{P}\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}-\alpha\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}_1-\boldsymbol{Q}_1+\sigma^2\boldsymbol{Q}_2+\sigma\boldsymbol{Q}_3;$$

$$\boldsymbol{\Theta}_{22}=(\tau_1-1)\boldsymbol{P}_1-\boldsymbol{Q}_1,\boldsymbol{\Theta}_{33}=(\sigma_1-1)\boldsymbol{Q}_2.$$

用 $\boldsymbol{Q}_1^{\frac{1}{2}}-\delta\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{Q}_1^{\frac{1}{2}}$ 右乘其转置可得

$$\boldsymbol{Q}_1^{-1}\ge 2\delta\boldsymbol{P}^{-1}-\delta^2\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{P}^{-1}. \tag{12}$$

$\hat{\boldsymbol{\Omega}}$ 两边乘 diag{diag{$\boldsymbol{W}^{-1},\boldsymbol{W}^{-1},\boldsymbol{W}^{-1},\boldsymbol{I}$},$\boldsymbol{I},\boldsymbol{I},\boldsymbol{I}$},并取

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{K}=\boldsymbol{V}\boldsymbol{W}^{-1},\\ &\boldsymbol{P}=\boldsymbol{W}^{-1},\\ &\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{S}_1\boldsymbol{W}^{-1},\\ &\boldsymbol{Q}_1=\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{S}_2\boldsymbol{W}^{-1},\\ &\boldsymbol{Q}_2=\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{S}_3\boldsymbol{W}^{-1},\\ &\boldsymbol{Q}_3=\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{S}_4\boldsymbol{W}^{-1}.\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

利用式(12)、Schur 补公式[4]及引理1,由式(6)可得 $\boldsymbol{\Theta}<0$ 成立.因此,由式(11)可得

$$V(t)\le e^{\alpha t}V(0)+e^{\alpha t}\int_0^t\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\omega}(t)\mathrm{d}t. \tag{14}$$

由 $\boldsymbol{S}_4=0$ 得 $\boldsymbol{Q}_3=0$,由式(5),式(8),式(9)易得 $V(0)\le\beta$.所以当 $t\le T_f$ 时由式(14),式(9),式(7)可得 $V(t)\le e^{\alpha T_f}\beta+e^{\alpha T_f}\lambda_4 d\le\lambda_5 c_3$.

又由 $V(t)\ge\lambda_5\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{R}\boldsymbol{x}(t)$ 得 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{R}\boldsymbol{x}(t)\le c_3$.这表明闭环系统是有限时间有界的.

为使定理2的一部分条件和定理1统一叙述,在定理1中引入了 $\boldsymbol{S}_4$,但限定 $\boldsymbol{S}_4=0$.

定理2 考虑系统(1)和约束(2)~(4),给定正数 γ,如果存在正定矩阵 $\boldsymbol{W},\boldsymbol{S}_1,\boldsymbol{S}_2,\boldsymbol{S}_3,\boldsymbol{S}_4,\boldsymbol{Q}$,矩阵 $\boldsymbol{V}$ 及正数 $\alpha,\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon,\delta$ 使得不等式(6)及以

下不等式成立：

$$\begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\Phi}} & \hat{\boldsymbol{E}}_1^{\mathrm{T}} & \hat{\boldsymbol{M}}_{10}^{\mathrm{T}} \\ \hat{\boldsymbol{E}}_1 & -\frac{\varepsilon\gamma^2}{3}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\ \hat{\boldsymbol{M}}_{10} & \boldsymbol{0} & -\frac{\gamma^2}{3}(\boldsymbol{I}-\varepsilon\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{H}_1^{\mathrm{T}}) \end{bmatrix}<0, \tag{15}$$

$$d\leqslant\lambda_5 c_3, \boldsymbol{Q}\leqslant \mathrm{e}^{-\alpha T_{\mathrm{f}}}\boldsymbol{I}, \tag{16}$$

则取 $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{V}\boldsymbol{W}^{-1}$，控制器 $\boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(t)$ 使闭环系统关于 $(0,0,c_3,d,T_{\mathrm{f}},\boldsymbol{R})$ 有限时间有界且具有能量 - 峰值性能指标 γ. 式中：$\hat{\boldsymbol{\Phi}}=\mathrm{diag}\{-\boldsymbol{W},-\boldsymbol{W},-\boldsymbol{S}_4\}$；

$\hat{\boldsymbol{E}}_1=[\boldsymbol{E}_{\mathrm{c}}\boldsymbol{W}+\boldsymbol{E}_{\mathrm{d}}\boldsymbol{V}\quad \boldsymbol{E}_{\mathrm{c1}}\boldsymbol{W}\quad \boldsymbol{E}_{\mathrm{d1}}\boldsymbol{W}]$；$\hat{\boldsymbol{M}}_{10}=[\boldsymbol{C}_0\boldsymbol{W}+\boldsymbol{D}_0\boldsymbol{V}\quad \boldsymbol{C}_{10}\boldsymbol{W}\quad \boldsymbol{D}_{10}\boldsymbol{W}]$；$\lambda_5$ 满足式(9).

证明　由式(16)和定理 1 得知闭环系统在零初始条件下有限时间有界. 式(15)两边左乘和右乘 $\mathrm{diag}\{\mathrm{diag}\{\boldsymbol{W}^{-1},\boldsymbol{W}^{-1},\boldsymbol{W}^{-1}\},\boldsymbol{I},\boldsymbol{I}\}$，并记 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{W}^{-1}$，$\boldsymbol{K}=\boldsymbol{V}\boldsymbol{W}^{-1}$，$\boldsymbol{Q}_3=\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{S}_4\boldsymbol{W}^{-1}$，得

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi} & \boldsymbol{E}_1^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{M}_{10}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{E}_1 & -\frac{\varepsilon\gamma^2}{3}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{M}_{10} & \boldsymbol{0} & -\frac{1}{3}\gamma^2(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{H}_1^{\mathrm{T}}) \end{bmatrix}<0.$$

式中：$\boldsymbol{\Phi}=\mathrm{diag}\{-\boldsymbol{P},-\boldsymbol{P},-\boldsymbol{Q}_3\}$；$\boldsymbol{E}_1=[\boldsymbol{E}_{\mathrm{c}}+\boldsymbol{E}_{\mathrm{d}}\boldsymbol{K}\quad \boldsymbol{E}_{\mathrm{c1}}\quad \boldsymbol{E}_{\mathrm{d1}}]$；$\boldsymbol{M}_{10}=[\boldsymbol{C}_0+\boldsymbol{D}_0\boldsymbol{K}\quad \boldsymbol{C}_{10}\quad \boldsymbol{D}_{10}]$.

对该不等式应用 Schur 补公式[4]及引理 1 得 $3\gamma^{-2}(\boldsymbol{M}_{10}+\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{F}_1\boldsymbol{E}_1)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{M}_{10}+\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{F}_1\boldsymbol{E}_1)<-\boldsymbol{\Phi}$.

该不等式两边左乘 $\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}=[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-\tau(t))\int_{t-\sigma(t)}^{t}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)\mathrm{d}s]$，右乘 $\boldsymbol{\eta}$，由式(1)和式(3)可得

$$3\gamma^{-2}\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}(t)z(t)\leqslant-\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\eta}.$$

由式(14)，式(16)及 Jensen 积分不等式可知在零初始条件下当 $t\leqslant T_{\mathrm{f}}$ 时，该不等式右边包含的 3 项每一项都不超过 $\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\omega}(t)$ 在 $[0,T_{\mathrm{f}}]$ 上的积分，所以

$$\text{当 } t\leqslant T_{\mathrm{f}} \text{ 时}, \boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}(t)z(t)\leqslant\gamma^2\int_0^{T_{\mathrm{f}}}\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\omega}(t)\mathrm{d}t.$$

这表明闭环系统具有能量 - 峰值性能指标 γ.

式(7)不能用线性矩阵不等式求解. 以下采用文献[11]提出的锥补偿线性化(CCL)算法求解定理 1 中问题的次优解. 由 Schur 补公式可知式(9)等价于：

$$\begin{bmatrix} \lambda_i\boldsymbol{R} & \boldsymbol{W}^{-1} \\ \boldsymbol{W}^{-1} & \boldsymbol{S}_i^{-1} \end{bmatrix}\geqslant 0, i=1,2,3, \boldsymbol{W}^{-1}\geqslant\lambda_5\boldsymbol{R}; \tag{17}$$

$$\boldsymbol{Q}\leqslant\lambda_4\boldsymbol{I}, \begin{bmatrix} \lambda_6\boldsymbol{R} & \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{I} & \boldsymbol{W} \end{bmatrix}\geqslant 0. \tag{18}$$

引入新变量 $\tilde{\boldsymbol{S}}_i$，$\tilde{\boldsymbol{W}}$，对固定的常数 α 和 δ，求不等式(6)，式(7)，式(18)和以下不等式

$$\left.\begin{aligned} &\begin{bmatrix} \boldsymbol{S}_i & \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{I} & \tilde{\boldsymbol{S}}_i \end{bmatrix}\geqslant 0, \begin{bmatrix} \boldsymbol{W} & \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{I} & \tilde{\boldsymbol{W}} \end{bmatrix}\geqslant 0, \\ &\tilde{\boldsymbol{W}}\geqslant\lambda_5\boldsymbol{R}, \begin{bmatrix} \lambda_i\boldsymbol{R} & \tilde{\boldsymbol{W}} \\ \tilde{\boldsymbol{W}} & \tilde{\boldsymbol{S}}_i \end{bmatrix}\geqslant 0,\ i=1,2,3. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

的一组可行解 $\boldsymbol{W}_0,\tilde{\boldsymbol{W}}_0,\boldsymbol{Q}_0,\boldsymbol{V}_0,\boldsymbol{S}_{i,0},\tilde{\boldsymbol{S}}_{i,0},\lambda_{i,0}$，作为迭代算法相应于 $k=0$ 的初始解. 在第 k 步的解得到后解 LMI 优化问题：

$$\min\ \mathrm{tr}(\boldsymbol{W}_k\tilde{\boldsymbol{W}}+\boldsymbol{W}\tilde{\boldsymbol{W}}_k+\sum_{i=1}^{3}(\boldsymbol{S}_{i,k}\tilde{\boldsymbol{S}}_i+\boldsymbol{S}_i\tilde{\boldsymbol{S}}_{i,k})).$$

s. t. 式(6)，式(7)，式(18)，式(19).

把得到的解作为第 $k+1$ 步的解. 如果式(17)得到满足或迭代次数达到设定值则停止.

定理 2 中 λ_5 的约束可化成线性矩阵不等式.

3　数值算例

取系统(1)中的常数矩阵及其他参数如下：

$\boldsymbol{A}_0=\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1.2 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{A}_{10}=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$，

$\boldsymbol{A}_{20}=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}_0=\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}_{10}=\begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.4 \end{bmatrix}$，

$\boldsymbol{C}_0=[-0.2\ \ 0.1]$，$\boldsymbol{C}_{10}=[0.1\ \ -0.2]$，$\boldsymbol{D}_0=0.1$，$\boldsymbol{D}_{10}=[0.1\ \ 0.2]$，$\boldsymbol{E}_{\mathrm{a}}=[-0.2\ 0.4]$，$\boldsymbol{E}_{\mathrm{b}}=-0.3$，$\boldsymbol{E}_{\mathrm{a1}}=[0.3\ \ -0.2]$，$\boldsymbol{E}_{\mathrm{a2}}=[0.2\ 0.3]$，$\boldsymbol{E}_{\mathrm{b1}}=-0.5$，$\boldsymbol{E}_{\mathrm{c}}=[0.3\ \ 0.2]$，$\boldsymbol{E}_{\mathrm{c1}}=[-0.2\ 0.1]$，$\boldsymbol{E}_{\mathrm{d}}=-0.3$，$\boldsymbol{E}_{\mathrm{d1}}=[0.15\ \ -0.2]$，$\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}=[0.3\ 0.25]$，$\boldsymbol{H}_1=0.5$.

$\tau=0.4$，$\sigma=0.5$，$\tau_1=0.3$，$\sigma_1=0.2$，$\alpha=0.03$.

取 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{I}$，$c_1=0.4$，$c_2=0.2$，$c_3=29$，$T_{\mathrm{f}}=10$，$d=0.4$. 由定理 1 求得使闭环系统有限时间有界的状态反馈增益矩阵 $\boldsymbol{K}=[0.7964\ \ -10.1241]$. 取初始状态 $\boldsymbol{x}(t)=[0.45\quad -0.4]^{\mathrm{T}}$，不确定性函数 $F(t)=\sin t$，扰动信号 $\omega(t)=0.28\sin t$，可得闭环系统的状态响应曲线见图 1. 由定理 2 可求得使闭环系统具有能量 - 峰值性能指标 $\gamma=9$ 的状态反馈增益矩阵为 $\boldsymbol{K}=[-0.2458\quad -6.5196]$.

取不确定性函数 $F_1(t)=\sin t$，扰动信号 $\omega(t)=0.28\sin t$，可得闭环系统的被控输出信号 $z(t)$ 的响应曲线如图 2 所示. 由图 1 可见系统的

状态满足有限时间有界性的要求;由图 2 可见被控信号满足能量 – 峰值性能指标的要求.

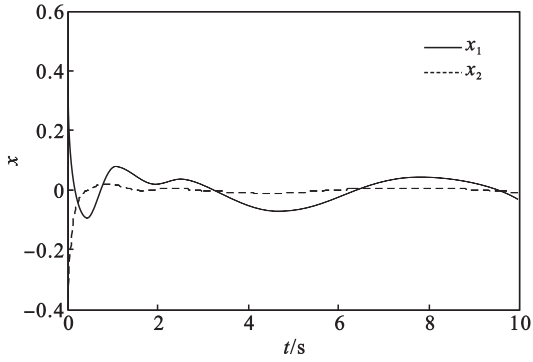

图 1 扰动输入下的闭环系统响应
Fig. 1 Response of the closed system to a disturbance input

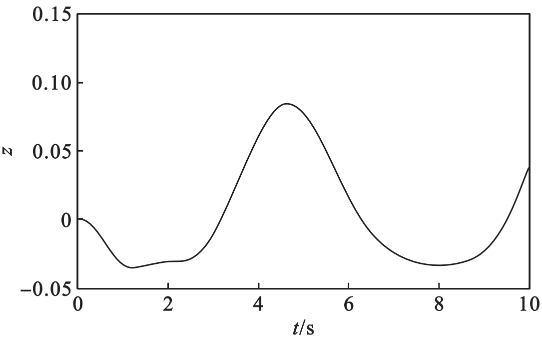

图 2 扰动输入下被控信号的响应
Fig. 2 Response of the controlled signal to a disturbance input

4 结 语

本文研究了具有离散和分布时滞的系统的鲁棒有限时间有界性和能量 – 峰值控制问题. 利用一个含参数的 Lyapunov 泛函的指数增长情况来给系统的状态和输出定界,从而得到了闭环系统对于所有允许的不确定性有限时间有界及满足能量 – 峰值性能指标的充分条件. 为解决这些条件中的非凸性带来的计算困难,给出了一个锥补偿线性化算法来检验这些条件.

参考文献:

[1] Amato F, Ariola M, Dorato P. Finite-time control of linear systems subject to parametric uncertainties and disturbances [J]. *Automatica*, 2001, 37(9): 1459 – 1463.

[2] Amato F, Ariola M, Cosentino C. Finite-time stabilization via dynamic output feedback [J]. *Automatica*, 2006, 42(2): 337 – 342.

[3] Lin X Z, Du H B, Li S H. Finite-time boundedness and L_2-gain analysis for switched delay systems with norm-bounded disturbance [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2011, 217(12): 5982 – 5993.

[4] Song J, He S P. Robust finite-time H_∞ control for one-sided Lipschitz nonlinear systems via state feedback and output feedback [J]. *Journal of the Franklin Institute*, 2015, 352(8): 3250 – 3266.

[5] Gu K. An improved stability criterion for systems with distributed delays [J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2003, 13(9): 819 – 831.

[6] Yue D, Han Q L. Robust H_∞ filter design of uncertain descriptor systems with discrete and distributed delays [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2004, 52(11): 3200 – 3212.

[7] Du H P, Lam J. Energy to peak performance controller design for building via static output feedback under consideration of actuator saturation [J]. *Computers & Structures*, 2006, 84(31): 2277 – 2290.

[8] Palhares R M, Peres P L D. Robust filter with guaranteed energy-to-peak performance—an LMI approach [J]. *Automatica*, 2000, 36(6): 851 – 858.

[9] Gu K. Integral inequality in the stability problem of time-delay systems [C] // Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control. Sydney: IEEE, 2000: 2805 – 2810.

[10] Wang Y, Xie L, de Souza C E. Robust control of a class of uncertain nonlinear systems [J]. *Systems & Control Letters*, 1992, 19(2): 139 – 149.

[11] Ghaoui L E, Oustry F, AitRami M. A cone complementarity linearization algorithm for static output-feedback and related problems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1997, 42(8): 1171 – 1176.