

一种复杂机械结构的频率可靠性及灵敏度分析方法

马天政, 吕昊, 张义民
(东北大学 机械工程与自动化学院, 辽宁 沈阳 110819)

摘 要: 针对具有随机参数的复杂机械结构振动的固有频率响应问题, 定义了频率可靠性, 并在此基础上提出了一种快速有效的可靠性及可靠性灵敏度的计算方法. 采用随机响应面模型来拟合结构输入参数和固有频率之间的函数关系, 并使用降维积分技术计算随机响应面模型的展开系数, 同时使用模型降阶方法进行结构的重分析计算以节约计算时间. 采用改进的一次二阶矩方法进行可靠性分析, 可靠性灵敏度的计算采用蒙特卡洛模拟方法. 数值算例表明所提方法具有很高的计算效率和合适的精度, 适用于复杂结构的频率可靠性分析.

关 键 词: 频率可靠性; 可靠性灵敏度; 随机响应面; 降维积分; 模型降阶

中图分类号: TH 212 **文献标志码:** A **文章编号:** 1005-3026(2017)01-0086-05

A Novel Approach to Compute the Frequency Reliability and Reliability Sensitivity for Complex Mechanical Structures

MA Tian-zheng, LYU Hao, ZHANG Yi-min
(School of Mechanical Engineering & Automation, Northeastern University, Shenyang 110819, China.
Corresponding author: ZHANG Yi-min, E-mail: zpapercv@sohu.com)

Abstract: For the frequency response of complex mechanical structures with random parameters, the frequency reliability was defined and an efficient method to compute the frequency reliability and reliability sensitivity was proposed. The stochastic response surface was employed to approximate the relationship between input variables and natural frequency. Dimension reduction integral was utilized to compute the coefficients of the stochastic response surface expansion. In order to alleviate the computational burden of structural reanalysis, a kind of model order reduction technique was applied. The AFOSM (advanced first order second moment) method was utilized to evaluate the frequency reliability and the reliability sensitivity was obtained by the Monte Carlo simulation. The numerical examples demonstrate the efficiency and accuracy of the method for complex structures.

Key words: frequency reliability; reliability sensitivity; stochastic response surface; dimension reduction integral; model order reduction

当外界激励的频率与结构固有频率特性接近时结构会发生共振, 从而导致很大的振幅和动应力, 严重危害结构安全. 传统的结构动态设计中将参数当作确定性的值来处理, 忽略了不确定性对于固有频率等结构动态性能的影响. 然而, 工程实际中由于材料参数的变异性、加工误差等因素导致实际结构的参数具有不确定性. 近些年来, 随着机械产品向着轻质、高速、高精度的方向发展, 不确定性对固有频率等动态特性的影响越发显著, 因此对于随机结构进行频率可靠性及可靠性灵敏度分析显得尤为重要.

文献[1]使用摄动法对频率可靠性问题进行了研究. 文献[2]使用 Monte Carlo 方法对齿轮系统的共振可靠性问题进行了研究. 文献[3]通过

建立固有频率特性的响应面模型研究了水下航行器的频率可靠性问题。

上述方法提供了频率可靠性及灵敏度分析的有效途径。然而工程实际中常见的复杂结构通常借助于大型的商业有限元软件进行建模,得到的有限元模型往往具有几万甚至几十万上百万个自由度,这种情况下难以有效地进行可靠性分析。为此,本文结合随机响应面法、降维积分以及模型降阶法提出了一种针对复杂结构的频率可靠性及可靠性灵敏度问题的实用计算方法,并分别以转向架构架模型以及汽车车架模型作为算例对本文所述方法进行了验证。

1 共振问题的频率可靠性分析模型

设结构的第 l 阶固有频率为 $\omega^{(l)}$, 结构所受的外界激励频率为 p , 为避免结构发生共振破坏, 频率可靠性模型定义为

$$g = p - \omega^{(l)} \leq -\gamma^{(l)}, \\ \text{或 } g = p - \omega^{(l)} \geq \gamma^{(l)}.$$

其中: $\gamma^{(l)}$ 为常数, 表示第 l 阶固有频率的共振区间, 一般取固有频率均值的 0.1 ~ 0.15 倍。

2 降维积分构建随机响应面代理模型

2.1 随机响应面方法

随机响应面方法^[4-6]源自于随机有限元的谱方法, 基本思想是使用 Hermite 随机多项式(即混沌多项式)来拟合输入和输出之间的关系, 即结构的输出 y 可以表示为一系列 Hermite 随机多项式的和:

$$y(\xi) = \sum_{|i| \leq M} a_i \Psi_i(\xi).$$

其中: $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n_p})$ 为独立标准正态随机变量的向量; n_p 为结构输入随机变量的个数; M 为 Hermite 随机多项式展开阶数。下标 $i = (i_1, i_2, \dots, i_{n_p}) \in \mathbf{N}_0^{n_p}$, $|i| = i_1 + i_2 + \dots + i_{n_p}$ 。

$\Psi_i(\xi)$ 定义为

$$\Psi_i(\xi) = \varphi_{i_1}(\xi_1) \varphi_{i_2}(\xi_2) \cdots \varphi_{i_{n_p}}(\xi_{n_p}), 0 \leq i_k \leq$$

$M, k = 0, 1, \dots, n_p$ 。

其中 $\varphi_{i_k}(\cdot)$ 是第 i_k 阶 Hermite 多项式。

展开系数的计算式为

$$a_i = E[y(\xi) \Psi_i(\xi)] = \int y(\xi) \Psi_i(\xi) \rho(\xi) d\xi \\ = \int G(\xi) \rho(\xi) d\xi. \quad (1)$$

其中: $E[\cdot]$ 是数学期望; $\rho(\xi) = \prod_{j=1}^{n_p} \rho(\xi_j)$ 是标准正态随机向量 ξ 的联合概率密度函数。

和普通的响应面方法相比, 以 Hermite 正交多项式为基底构建的随机响应面函数能够逼近 Hilbert 空间中的任意函数, 并且能够保证收敛性, 有着更好的计算精度。

2.2 降维积分

在随机响应面模型的构建过程中, 如何计算展开系数至关重要。采用直接数值积分法计算量巨大, 特别是当随机变量的数量较多时。Rahman 等^[7-8]提出了高维积分的降维法, 这种方法通过将高维积分转化为若干简单积分的叠加形式来减少计算量。对于单变量降维积分, $G(\xi)$ 可以表示为

$$G(\xi) \cong \sum_{j=1}^{n_p} G(\mu_1, \dots, \mu_{j-1}, \xi_j, \mu_{j+1}, \dots, \mu_{n_p}) - \\ (n_p - 1) G(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n_p}). \quad (2)$$

其中 μ_j 表示第 j 个变量的均值。将式(2)代入式(1)得到

$$a_i = \sum_{j=1}^{n_p} \int G(\mu_1, \dots, \mu_{j-1}, \xi_j, \mu_{j+1}, \dots, \mu_{n_p}) \rho(\xi_j) d\xi_j - \\ (n_p - 1) G(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n_p}).$$

以含有 6 个随机变量的实际问题为例, 每个随机变量采用 6 个积分点。直接积分法需要对结构进行 $6^6 = 46\,656$ 次重分析计算, 若采用单变量降维积分则只需要进行 $6 \times 6 + 1 = 37$ 次计算, 极大地减少了计算量。

3 结构重分析的模型降阶

对于复杂的有限元模型来说, 计算结构在每个积分点处的固有频率需要大量的时间。Zhang 等^[9-10]提出了 PROM 方法构建结构的降阶模型用于结构动力学重分析, PROM 方法通过将复杂结构投影到由一组正交基底所构成的低维子空间上来达到模型降阶的目的。和其他重分析方法相比, PROM 方法能在一定程度上保存原结构的相关信息, 因而具有很好的稳定性和收敛性。

设结构的特征方程为

$$\left. \begin{aligned} K\Phi &= M\Phi\Lambda, \\ \Phi^T M\Phi &= I. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

其中: K 是刚度矩阵; M 是质量矩阵; Φ 是特征向量矩阵; Λ 是由特征值构成的对角矩阵。

基底 P 一般由结构在若干个参数设计点处的特征向量构成, 参数设计点的选择方法有多种, 这里建议选取 $n_p + 1$ 个参数设计点, 即

$$P = [\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_{n_p}].$$

记 $\bar{X}_j, X_j (j = 1, \dots, n_p)$ 分别为第 j 个参数取值

的上界和下界, $X_j^0 = \frac{\bar{X}_j + X_j}{2}$. 则 Φ_0 为设计点 $X_{\text{design}}^0 = [X_1^0, X_2^0, \dots, X_{n_p}^0]$ 处的特征向量, Φ_i 为设计点 $X_{\text{design}}^i = [X_1^0, \dots, X_{i-1}^0, X_i, X_{i+1}^0, \dots, X_{n_p}^0]$ 处的特征向量.

将特征向量矩阵 Φ 投影到基底 P 上有

$$\Phi = P\Theta. \tag{4}$$

将式(4)代入到式(3)中,得到缩减之后的结构特征方程为

$$\left. \begin{aligned} K_R \Theta &= M_R \Theta \Lambda, \\ K_R &= P^T K P, \\ M_R &= P^T M P. \end{aligned} \right\} \tag{5}$$

这样,原结构的特征值问题(式(3))就转化为模型降阶之后的特征值问题,通过求解式(5)即可得到原结构的固有频率和模态阵型.

4 可靠性分析及程序的编制

4.1 可靠性及灵敏度分析

在构建的随机响应面模型的基础上,可靠性计算采用改进的一次二阶矩(AFOSM)方法. 可靠性灵敏度分析使用随机响应面模型结合 Monte Carlo 方法进行抽样计算,可靠性灵敏度的计算公式为

$$\frac{\partial \hat{P}_f}{\partial \theta_{x_i}^{(k)}} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \frac{I_F(\mathbf{x}_j)}{f_X(\mathbf{x}_j)} \frac{\partial f_X(\mathbf{x}_j)}{\partial \theta_{x_i}^{(k)}} \bigg|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_j}. \tag{6}$$

其中: \hat{P}_f 为失效概率; $\theta_{x_i}^{(k)}$ 为设计变量 x_i 的概率分布的第 k 个参数; \mathbf{x}_j 为 Monte Carlo 方法抽样的第 j 个样本; $f_X(\cdot)$ 为变量的联合概率密度分布; $I_F(\cdot)$ 为示性函数,当 \mathbf{x} 落在失效域 F 内时,取值为 1, 否则为 0.

为了消除量纲对可靠性灵敏度的影响,将式(6)归一化,得到归一化的灵敏度表达式为

$$S_{\theta_{x_i}^{(k)}} = \frac{\partial \hat{P}_f / \hat{P}_f}{\partial \theta_{x_i}^{(k)} / \sigma_{x_i}}.$$

4.2 程序的编写

随机响应面及可靠性程序在 Matlab 中编写,模型降阶使用 Nastran 提供的二次开发语言 DMAP 编写,和其他有限元软件所提供的二次开发语言相比,DMAP 能够深入 Nastran 的内核修改求解序列,具有很大的灵活性. 在整个计算过程中,使用 Matlab 来调用 Nastran,并读取 Nastran 的计算结果.

5 数值算例

5.1 转向架构架的固有频率及灵敏度分析

转向架构架是高速动车组的关键部件之一,

对列车的动力学性能有着重要影响. 某转向架构架的有限元模型如图 1 所示,采用 Nastran 的实体单元建模,一共划分了 210 646 个单元,结构的随机参数为材料的弹性模量 E ,剪切模量 G ,密度 ρ ,其概率分布特性如表 1 所示. 为避免车辆运行时发生共振,以构架的一阶固有频率不低于 9.4 Hz 为目标进行可靠性分析,可靠性分析模型为

$$\begin{aligned} g &= \omega^{(1)} - (p - \gamma^{(1)}) \leq 0, \\ p - \gamma^{(1)} &= 9.4. \end{aligned}$$

选取设计变量均值 ($X_{\text{design}}^0 = [\bar{E}, \bar{G}, \bar{\rho}]$) 处的前 80 阶固有阵型作为正交基底对有限元模型进行降阶处理,从而将原问题转化为一个 80×80 的矩阵特征值问题. 在 Linux 系统的集群上,原模型进行一次特征值求解需要 30 min,采用降阶模型方法后只需 2.8 min 即可完成一次计算. 为了检验降阶模型的计算精度,随机抽取了 15 组样本,结果如图 2a 所示,可以看出降阶模型的计算精度很高,和原模型解几乎完全一致.

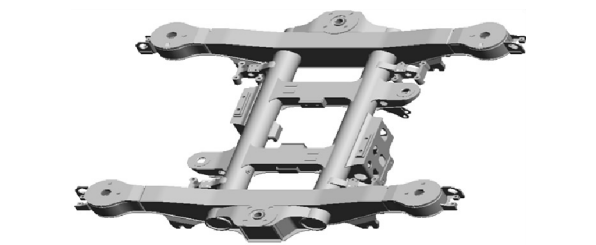


图 1 转向架构架示意图
Fig. 1 Bogie schematic

表 1 随机变量概率分布特性(转向架构架)
Table 1 Probability distribution characteristics of random variables (bogie)

| 随机变量 | 分布类型 | 均值 | 标准差 |
|--|------|---------|--------|
| E/MPa | 正态分布 | 210 000 | 10 500 |
| G/MPa | 正态分布 | 83 000 | 4 150 |
| $\rho/(\text{g} \cdot \text{mm}^{-3})$ | 正态分布 | 7.86 | 0.393 |

采用 2 阶随机响应面进行拟合,使用单变量降维积分计算展开系数,每个随机变量采用 6 个积分点,降维积分只需要进行 $6 \times 3 + 1 = 19$ 次的重分析计算. 随机抽取 15 组样本分别使用随机响应面模型和降阶模型计算,结果如图 2b 所示,可以看出使用降维积分构建的随机响应面模型具有很高的拟合精度,与降阶模型的计算结果几乎完全一致.

AFOSM 方法计算得到结构失效概率为 2.339×10^{-3} , Monte Carlo 方法计算得到失效概率为 3.013×10^{-3} ,两者计算结果基本一致. 可靠性灵敏度的计算结果如表 2 所示,灵敏度的绝对值越大表明对系统可靠性的影响越大,反之亦然;

灵敏度为正值表明随着变量的增加失效概率增加,灵敏度为负值表明随着变量的增加失效概率降低.从均值灵敏度分析中可以看出,随着弹性模量 E 和剪切模量 G 增加,失效概率会降低,密度 ρ

的增加会导致失效概率增大.从标准差灵敏度的分析中可以看出,标准差的增加会导致失效概率的增大,这是因为随机变量的标准差越大,结构固有频率的分布越分散,因而失效概率会增大.

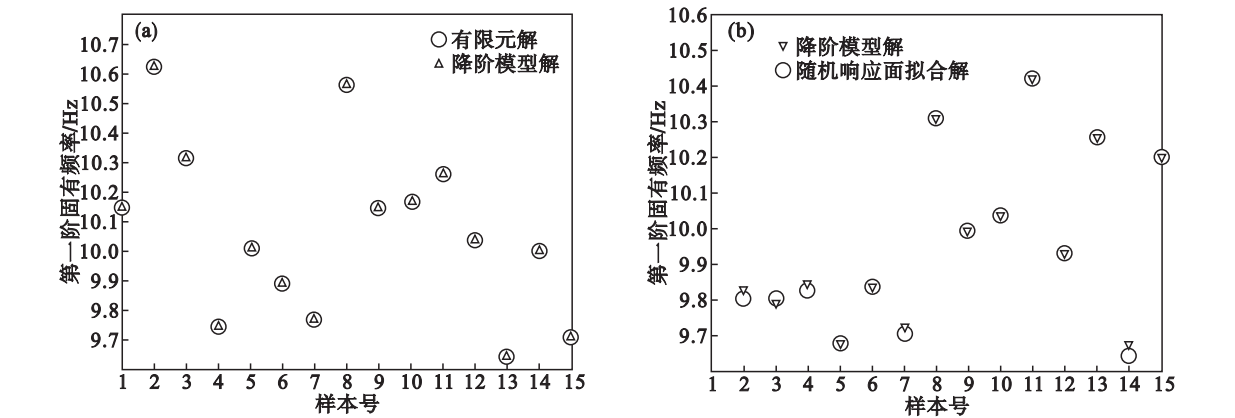


图 2 精度检验 (转向架构架)
Fig. 2 Accuracy check (bogie)
(a)—有限元解和降阶模型解比较; (b)—降阶模型解和随机响应面拟合解比较.

| 表 2 可靠性灵敏度分析结果 (转向架构架) Table 2 Result of reliability sensitivity analysis (bogie) | | | | | |
|--|------------|----------|-------------------|------------|----------|
| 均值 灵敏度 | MCS 估计值 | 变异 系数 | 标准差 灵敏度 | MCS 估计值 | 变异 系数 |
| S_{μ_E} | -0.142 3 | 0.084 2 | S_{σ_E} | 0.3953 | 0.049 6 |
| S_{μ_G} | -0.001 7 | 6.731 0 | S_{σ_G} | 0.3358 | 0.055 6 |
| S_{μ_ρ} | 3.896 1 | 0.008 2 | S_{σ_ρ} | 10.6353 | 0.008 4 |

5.2 汽车车架的固有频率可靠性及灵敏度分析

某车架的有限元模型如图 3 所示,整个车架在 Nastran 中采用壳单元建模,一共划分了 100 824 个单元.结构的随机参数包括:横梁的厚度 t_1 ,侧梁的厚度 t_2 ,材料的弹性模量 E ,剪切模量 G ,密度 ρ ,其概率分布特性如表 3 所示.模态分析结果表明车架的第三阶固有频率与发动机怠速时的激励频率 32 Hz 较为接近,为避免发生共振对其进行可靠性分析,可靠性分析模型为

$$g = \omega^{(3)} - (p - \gamma^{(3)}) \leq 0, \\ p = 32, \gamma^{(3)} = 4.$$

| 表 3 随机变量概率分布特性 (汽车车架) Table 3 Probability distribution characteristics of random variables (chassis) | | | |
|---|------|---------|--------|
| 随机变量 | 分布类型 | 均值 | 标准差 |
| E/MPa | 正态分布 | 210 000 | 10 500 |
| G/MPa | 正态分布 | 83 000 | 4 150 |
| $\rho/(\text{g} \cdot \text{mm}^{-3})$ | 正态分布 | 7.86 | 0.393 |
| t_1/mm | 正态分布 | 8 | 0.4 |
| t_2/mm | 正态分布 | 14 | 0.7 |

选取设计变量 $\mathbf{X}_{\text{design}}^0 = [E^0, G^0, \rho^0, t_1^0, t_2^0]$, $\mathbf{X}_{\text{design}}^1 = [E^0, G^0, \rho^0, t_1^0, t_2^0]$ 和 $\mathbf{X}_{\text{design}}^2 = [E^0, G^0, \rho^0, t_1^0, t_2^0]$ 处的固有阵型组成基底并进行正交化,进而将原问题转化为一个 150×150 的矩阵的特征值问题.原模型进行一次特征值求解需要 2 min,采用降阶模型后只需 18 s 即可完成一次计算.

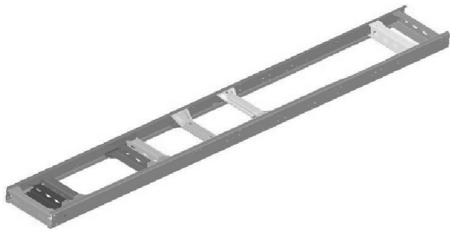


图 3 汽车车架示意图
Fig. 3 Chassis schematic

采用 2 阶随机响应面进行拟合,降维积分计算展开系数时每个随机变量采用 6 个积分点,从而只需要进行 $6 \times 5 + 1 = 31$ 次的重分析计算即可.从图 4 中可以看出,模型降阶法和随机响应面拟合的结果都具有非常高的精度. AFOSM 方法计算得到的结构失效概率为 5.230×10^{-3} , Monte Carlo 方法计算得到失效概率为 5.460×10^{-3} ,两者计算结果基本一致.可靠性灵敏度的计算结果如表 4 所示.从均值可靠性灵敏度分析中可以看出,弹性模量 E 和密度 ρ 对可靠性的影响最大,其次是横梁的厚度 t_1 ,侧梁的厚度 t_2 ,剪切模量 G 对可靠性的影响非常小.随着弹性模量 E ,剪切模量 G 以及侧梁厚度 t_2 的增加,失效概率会降低,密

度 ρ 和横梁厚度 t_1 的增加会导致失效概率增大。从标准差灵敏度的分析中可以看出,变量标准差

的增加会导致失效概率的增大。

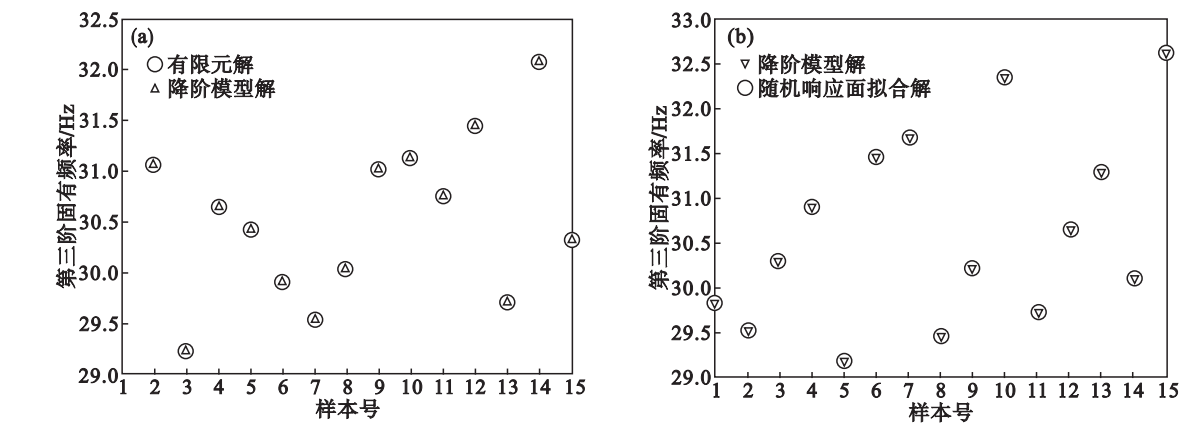


图 4 精度检验(汽车车架)
Fig. 4 Accuracy check (chassis)

(a)—有限元解与降阶模型解比较;(b)—降阶模型解与随机响应面拟合解比较。

| 表 4 可靠性灵敏度分析结果(汽车车架) | | | | | |
|--|------------|----------|--------------------|------------|----------|
| Table 4 Result of reliability sensitivity analysis (chassis) | | | | | |
| 均值 灵敏度 | MCS 估计值 | 变异 系数 | 标准差 灵敏度 | MCS 估计值 | 变异 系数 |
| $S_{-\mu_E}$ | -2.249 3 | 0.006 3 | $S_{-\sigma_E}$ | 4.3121 | 0.007 6 |
| $S_{-\mu_G}$ | -0.005 7 | 4.087 7 | $S_{-\sigma_G}$ | 0.061 6 | 0.295 8 |
| $S_{-\mu_\rho}$ | 1.604 6 | 0.006 8 | $S_{-\sigma_\rho}$ | 2.065 1 | 0.010 3 |
| $S_{-\mu_{t_1}}$ | 0.719 3 | 0.010 5 | $S_{-\mu_{t_1}}$ | 0.442 3 | 0.027 6 |
| $S_{-\mu_{t_2}}$ | -0.892 5 | 0.009 5 | $S_{-\mu_{t_2}}$ | 0.809 3 | 0.018 2 |

6 结 论

结合随机响应面方法、降维积分技术、模型降阶方法及商业有限元软件的二次开发功能,本文提出了一种实用的复杂机械结构频率可靠性及灵敏度的分析方法。数值算例表明所提出的方法具有很高的计算效率,极大地节省了计算时间,具有较高的计算精度,能满足工程实际要求。

参考文献:

[1] 张义民,刘巧玲,闻邦椿. 随机连续杆纵向振动系统的频率可靠性分析[J]. 力学与实践,2003,25(6):46-48.
(Zhang Yi-min, Liu Qiao-ling, Wen Bang-chun. Natural frequency reliability analysis for random axial vibration of rod systems [J]. *Mechanics in Engineering*, 2003, 25 (6): 46-48.)

[2] 王宇宁,孙志礼,杨强,等. 基于热分析的齿轮模态及共振可靠性灵敏度研究[J]. 东北大学学报(自然科学版), 2013,34(3):408-412.

(Wang Yu-ning, Sun Zhi-li, Yang Qiang, et al. Study on the gear mode and resonance reliability sensitivity based on thermal analysis [J]. *Journal of Northeastern University (Natural Science)*, 2013, 34(3):408-412.)

[3] 刘克勤,李天匀,朱翔,等. 水下航行器固有频率模型的可靠性分析[J]. 中国舰船研究,2015,10(1):103-108.
(Liu Ke-qin, Li Tian-yun, Zhu Xiang, et al. The reliability analysis of an underwater vehicle model based on natural frequency [J]. *Chinese Journal of Ship Research*, 2015, 10 (1):103-108.)

[4] Sudret B, Der Kiureghian A. Comparison of finite element reliability methods [J]. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2002, 17(4):337-348.

[5] Xiu D, Hesthaven J S. High-order collocation methods for differential equations with random inputs [J]. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 2006, 27(3):1118-1139.

[6] Marzouk Y, Xiu D. A stochastic collocation approach to Bayesian inference in inverse problems [J]. *Communications in Computational Physics*, 2009, 6(4):826-847.

[7] Rahman S, Xu H. A univariate dimension-reduction method for multi-dimensional integration in stochastic mechanics [J]. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2004, 19(4):393-408.

[8] Xu H, Rahman S. A generalized dimension-reduction method for multidimensional integration in stochastic mechanics [J]. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2004, 61(12):1992-2019.

[9] Zhang G, Nikolaidis E, Mourelatos Z P. An efficient re-analysis methodology for probabilistic vibration of large-scale structures [J]. *Journal of Mechanical Design*, 2009, 131(5):051007.

[10] Zhang G. Component-based and parametric reduced order modeling methods for vibration analysis of complex structures [D]. Ann Arbor: University of Michigan, 2005.