

doi: 10.3969/j.issn.1005-3026.2017.06.013

轴承结构参数的随机性对轴承刚度灵敏度的影响

冯吉路^{1,2}, 孙志礼¹, 许二丰³, 孙安邦⁴

(1. 东北大学 机械工程与自动化学院, 辽宁 沈阳 110819; 2. 山东省科学院 海洋仪器仪表研究所, 山东 青岛 266001;
3. 郑州宇通客车股份有限公司, 河南 郑州 450061; 4. 一汽解放汽车有限公司, 吉林 长春 130011)

摘 要: 采用拉丁超立方抽样确定了角接触球轴承结构参数的样本点,通过 Powell 和 Newton – Raphson 相结合的算法计算了非线性方程组,将计算得到的轴承刚度的响应值应用 Kriging 法进行响应面拟合. 利用 Monte Carlo 随机抽样法确定了轴承结构参数的均值和方差对轴承刚度均值的灵敏度. 研究表明:轴承轴向和径向刚度对轴承结构参数的均值和方差的灵敏度呈现相反的影响趋势. 轴承刚度对轴承滚动体直径的变化反应最灵敏,轴承内、外圈沟道曲率半径的变化对其影响次之,外沟道直径的变化对其影响最小. 该研究为轴承的结构参数和加工精度的选择及零件的分选提供了理论依据.

关 键 词: 角接触球轴承;刚度;灵敏度;结构参数;随机性

中图分类号: TH 133. 33 文献标志码: A 文章编号: 1005-3026(2017)06-0823-06

Influence of Randomness of Structure Parameters for Bearings on Its Stiffness Sensitivity

FENG Ji-lu^{1,2}, SUN Zhi-li¹, XU Er-feng³, SUN An-bang⁴

(1. School of Mechanical Engineering & Automation, Northeastern University, Shenyang 110819, China;
2. Institute of Oceanographic Instrumentation, Shandong Academy of Sciences, Qingdao 266001, China;
3. Zhengzhou Yutong Bus Corporation Limited, Zhengzhou 450061, China; 4. FAW Jiefang Automotive Company Limited, Changchun 130011, China. Corresponding author: FENG Ji-lu, E-mail: fengjilu123@sina.com)

Abstract: The latin hypercube sampling technique was used to obtain sample points of structure parameters for angular contact ball bearings. A combination method of the Powell algorithm and Newton-Raphson method was proposed for solving nonlinear equations and then the as-obtained the bearings stiffness were applied on fitting response surface functions based on the Kriging model. The influence of the mean and variation of structure parameters for angular contact ball bearings on its stiffness sensitivity was simulated using the Monte Carlo method. The results show that the mean and variation of structure parameters for angular contact ball bearings have an adverse effect on the sensitivity of the axial and radial stiffness. Bearings stiffness is most sensitive to the variation of ball diameters, then curvature radius of the inner and outer raceway groove takes the second place, and the outer raceway diameter is the least. This research may bring forward the theoretical basis for selecting the design parameters and machining accuracy of bearings as well as separation of parts.

Key words: angular contact ball bearing; stiffness; sensitivity; structure parameters; randomness

轴承刚度是轴承关键的服役性能之一,对主
轴-轴承系统的动态特性有重要的影响^[1-2]. 其
中,角接触球轴承的刚度受轴承结构参数和服役
条件等多种因素的影响. 文献[3-5]研究指出轴
承过盈配合量、离心位移及预紧力等参数的增加
均会引起轴承刚度的增大. 文献[6]通过实验法
进行了角接触球轴承的刚度研究. 虽然上述科研人
员分别从理论和实验方面对角接触球轴承刚度的
影响因素进行了大量的研究,但是针对角接触球轴
承结构参数对轴承刚度的影响的研究仍然不足.

在分析轴承结构参数对轴承刚度的影响时,通常会分别考虑轴承内、外圈沟道曲率半径、滚动体直径和轴承节对轴承刚度的影响。然而轴承各个结构参数之间具有相互耦合作用,使得单独变化某个结构参数求得其对轴承刚度的影响的结果,并不能直接说明某个结构参数对轴承刚度的影响大小。轴承结构参数是由设计参数和制造过程共同决定的。当设计参数给定时,轴承结构参数的实现要靠加工制造来保障。在不考虑轴承零部件加工系统误差的前提下,轴承各零部件加工后结构参数的尺寸误差应服从正态分布,即轴承各零部件加工装配后轴承结构参数应具有随机性。轴承结构参数的随机性的变化也会影响到轴承刚度,但是目前很少有人探讨轴承结构参数的随机性对轴承刚度的影响。

鉴于上述问题,本文提出了采用刚度灵敏度来评价轴承结构参数的随机性对轴承刚度的影响大小。通过拉丁超立方抽样获取轴承结构参数样本点,应用 Powell 和 Newton - Raphson 相结合的算法求解大规模非线性方程组,得到了轴承轴向和径向刚度的响应值,并使用 Kriging 方法拟合了轴承刚度的代理模型。假设轴承的结构参数服从正态分布,利用 Monte Carlo 随机抽样法和有限差分法相结合的方式分别求得参数的均值和方差对轴承刚度灵敏度的影响。

1 轴承刚度计算的相关理论

1.1 赫兹接触刚度

由赫兹接触理论可得两接触物体的接触载荷 Q 与弹性趋近量 δ 之间的关系为^[7-8]

$$\delta = \Gamma \left(\frac{9\Sigma\rho}{2\pi^2 k^2 E^2 \Sigma} \right)^{\frac{1}{3}} Q^{\frac{2}{3}}. \quad (1)$$

对上式关于 Q 求导,可得赫兹接触刚度:

$$K = 1.5 \left(\frac{\pi k E}{3\Gamma} \right)^{2/3} \left(\frac{2\Sigma}{\Gamma\Sigma\rho} \right)^{1/3} Q^{1/3}. \quad (2)$$

式中: Γ 和 Σ 分别为第一类和第二类完全椭圆积分; $\frac{2}{E} = \frac{1-\mu_1^2}{E_1} + \frac{1-\mu_2^2}{E_2}$, E_1, E_2, μ_1, μ_2 分别为两个接触物体的弹性模量和泊松比; $\Sigma\rho$ 是与轴承接触角和几何参数有关的参数。

Harmrock 等利用最小二乘法求得简化关系式^[8]:

$$k = 1.0339 \left(\frac{\sum \rho_2}{\sum \rho_1} \right)^{0.636}, \quad (3)$$

$$\Gamma = 1.5277 + 0.6023 \ln \left(\frac{\sum \rho_2}{\sum \rho_1} \right), \quad (4)$$

$$\Sigma = 1.0003 + 0.5968 \frac{\sum \rho_1}{\sum \rho_2}. \quad (5)$$

式中 k 为椭圆率参数。

根据式(2)可得,第 j 个滚动体与轴承内、外圈沟道间的接触刚度分别为

$$K_{ij} = 1.5 \left(\frac{\pi k_{ij} E}{3\Gamma_{ij}} \right)^{2/3} \left(\frac{2\Sigma_{ij}}{\Gamma_{ij}\Sigma\rho} \right)^{1/3} Q_i^{1/3}, \quad (6)$$

$$K_{ej} = 1.5 \left(\frac{\pi k_{ej} E}{3\Gamma_{ej}} \right)^{2/3} \left(\frac{2\Sigma_{ej}}{\Gamma_{ej}\Sigma\rho} \right)^{1/3} Q_e^{1/3}. \quad (7)$$

由 Z 个滚动体与轴承内、外圈沟道的串并联关系,可得角接触球轴承的轴向刚度、径向刚度和角刚度分别为

$$K_a = \sum_{j=1}^Z \frac{K_{aij} K_{aej}}{K_{aij} + K_{aej}}, \quad (8)$$

$$K_r = \sum_{j=1}^Z \frac{K_{rij} K_{rej}}{K_{rij} + K_{rej}} \cos^2 \frac{2\pi}{Z} (j-1), \quad (9)$$

$$K_\theta = \frac{D_m^2}{4} \sum_{j=1}^Z \frac{K_{rij} K_{rej}}{K_{rij} + K_{rej}} \cos^2 \frac{2\pi}{Z} (j-1). \quad (10)$$

由上述分析可知,轴承的刚度与轴承的接触载荷和接触角相关。

1.2 拟静力学分析和沟道控制理论

1.2.1 滚动体的变形几何相容方程

假设外圈沟道曲率中心是固定的,内圈沟道曲率中心可以相对移动。建立载荷作用下的坐标系,如图1所示。把外圈沟道曲率中心设为坐标原点,由变形协调条件可以确定第 j 个滚动体中心位置,如图2所示。第 j 个滚动体中心位置的变化:

$$X_{1j} + X_{2j} - [(f_e - 0.5)D_w + \delta_{ej}]^2 = 0, \quad (11)$$

$$(A_{1j} - X_{1j})^2 + (A_{2j} - X_{2j})^2 - [(f_i - 0.5)D_w + \delta_{ij}]^2 = 0. \quad (12)$$

式中: $A_{1j}, A_{2j}, X_{1j}, X_{2j}$ 分别为内滚道曲率中心的水平、垂直距离和外滚道曲率中心与第 j 个滚动体中心最终位置; D_w 为滚动体直径; f_e 和 f_i 分别为轴承外和内圈沟道的曲率半径系数。

1.2.2 滚动体拟静力学分析

图3为第 j 个滚动体与内、外圈的受力情况,由受力平衡关系可得滚动体的受力平衡方程为

$$Q_{ej} \sin \alpha_{ej} - Q_{oj} \sin \alpha_{oj} - \frac{M_{gj}}{D_w} (\lambda_{ej} \cos \alpha_{ej} - \lambda_{oj} \cos \alpha_{oj}) = 0, \quad (13)$$

$$Q_{ej} \cos \alpha_{ej} - Q_{oj} \cos \alpha_{oj} + \frac{M_{gj}}{D_w} (\lambda_{ej} \sin \alpha_{ej} - \lambda_{oj} \sin \alpha_{oj}) + F_{cj} = 0. \quad (14)$$

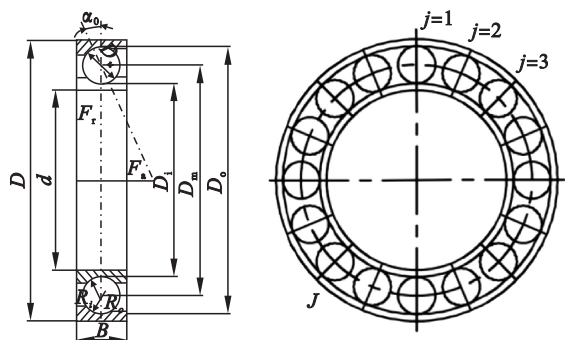


图 1 轴承受载示意图
Fig. 1 Bearing load diagram

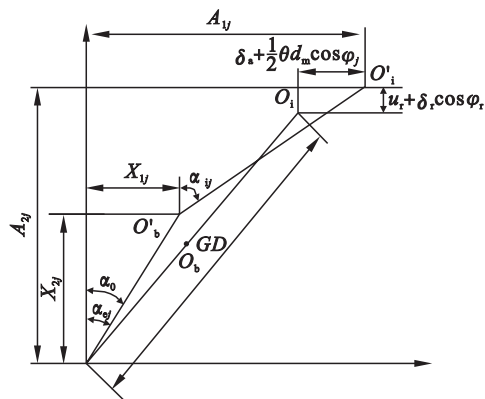


图 2 滚动体中心与沟道曲率中心的相对位置
Fig. 2 Relative position of the ball and race curvature center

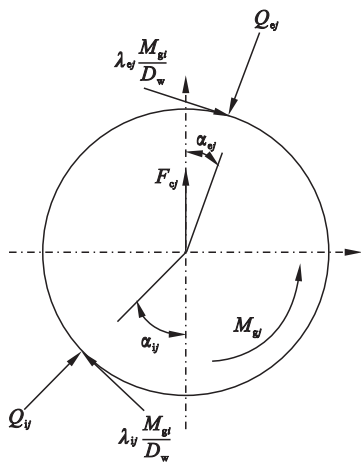


图 3 滚动体受力分析
Fig. 3 Load analysis of the ball

式中： M_{vj} 为第 j 个滚动体产生的陀螺力矩； F_{vj} 为第 j 个滚动体产生的离心力； λ_{vj} 、 λ_{oj} 为滚动体与轴承内外圈沟道之间的修正系数。当使用外沟道控制理论时，在离心力作用下，滚动体与轴承内圈沟道接触面不产生摩擦力，陀螺力矩由滚动体与轴承外圈沟道接触面的摩擦力平衡，取 $\lambda_{vj} = 0$ ， $\lambda_{oj} = 2$ 。否则，陀螺力矩由滚动体与内、外圈沟道接触面产生的摩擦力平衡， λ_{vj} 、 λ_{oj} 都取 1。

1.2.3 轴承拟静力学平衡

在内外载荷的作用下，轴承内圈处于受力平衡状态，其受力平衡方程为

$$F_r - \sum_{j=1}^Z Q_{ij} \cos \alpha_{ij} \cos \varphi_j = 0, \quad (15)$$

$$F_a - \sum_{j=1}^Z Q_{ij} \sin \alpha_{ij} = 0, \quad (16)$$

$$M - \sum_{j=1}^Z Q_{ij} R_i \sin \alpha_{ij} \cos \varphi_i = 0. \quad (17)$$

式中： $R_i = \frac{1}{2} D_m + (f_e - 0.5) D_w \cos \alpha_0$ ； α_0 为轴承滚动体的初始接触角。

2 Kriging 模型

Kriging 模型是一种半参数化的插值模型，不需要给出状态函数的具体形式，这样可以使模型的预测精度不受假定函数形式的影响。另外，Kriging 模型可以应用于强非线性问题。Kriging 模型^[9]表示为

$$g(x) = f^T(x) \beta + z(x). \quad (18)$$

式中： $f^T(x) \beta$ 为回归模型， β 为回归系数向量， $f(x)$ 为随机变量 x 的多项式函数，通常可以取固定值，其取值的大小并不影响模型的近似精度。

$z(x)$ 是随机过程函数，反映局部偏差的近似，它的均值 μ 是零，方差是 σ^2 ，协方差矩阵为

$$\text{cov}(z(x_i), z(x_j)) = \sigma^2 R(x_i, x_j). \quad (19)$$

式中： $R(x_i, x_j)$ 是带有参数 θ 的关于样本点 x_i 和 x_j 的相关函数，模型的准确性取决于随机过程 $z(x)$ ，相关函数通常选用高斯相关方程，其表达式如下：

$$R(x_i, x_j) = \exp\left(-\sum_{k=1}^{n_s} \theta_k |x_k^i - x_k^j|^2\right). \quad (20)$$

式中： n_s 为随机变量的个数； x_k^i 与 x_k^j 分别为样本点 x_i 与 x_j 的第 k 分量； θ_k 是相关性参数，有相关函数的极大似然估计确定，即

$$\theta = \min_{\theta} [(\det \mathbf{R})^{1/m} \hat{\sigma}^2]. \quad (21)$$

给定训练样本集合 $S = \{x_1, x_2, \dots, x_{n_s}\}$ ，计算相应的实际功能函数响应值，将其用向量形式表达为

$$\mathbf{Y} = [g(x_1), g(x_2), \dots, g(x_{n_s})]^T. \quad (22)$$

β 和 σ^2 的估计值为

$$\hat{\beta} = (\mathbf{F}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{F})^{-1} \mathbf{F}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{g}, \quad (23)$$

$$\hat{\sigma}_z^2 = \frac{1}{N_0} (\mathbf{g} - \beta \mathbf{F})^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{g} - \beta \mathbf{F}). \quad (24)$$

式中 N_0 是向量的维数。

通过 Kriging 模型,得到待测点 x 的预测响应值为

$$\hat{g}(x) = \hat{\beta} + r^T(x)R^{-1}(Y - f\hat{\beta}) . \tag{25}$$

其中:

$$f = [f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_{n_s})]^T, \tag{26}$$

$$r(x) = [R(x, x_1), R(x, x_2), \cdots, R(x, x_{n_s})]^T. \tag{27}$$

Kriging 方差为

$$\hat{\sigma}_g^2(x) = \hat{\sigma}^2[1 - r^T(x)R^{-1}r(x) + u^T(x)(f^T(x)R^{-1}f(x))^{-1}u(x)] , \tag{28}$$

其中 $u(x) = f^T(x)R^{-1}r(x) - 1$.

建立 Kriging 近似方程后,要用过比较估计值和真实值之间的差异来确定模型的好坏. 常用的近似模型检验方法有复相关系数(R^2)、修正复相关系数(adjusted R^2)、均方根误差(RMSE)等.

3 轴承刚度灵敏度计算方法及程序

3.1 灵敏度分析

当一个函数 f 由一个或者多个参数(x_1, x_2, \cdots, x_n)表示时, f 对参数的导数或者偏导数就是参数对函数的灵敏度,可以表示为

$$S = \frac{\Delta f(x_i)}{\Delta x_i}, i = 1, 2, 3, \cdots, n . \tag{29}$$

其中 S 为灵敏度. 通过灵敏度的大小可以看出参数变化对函数值变化的影响程度.

在计算角接触球轴承结构参数对轴承刚度灵敏度时,函数为轴承刚度均值,参数为轴承的各个结构参数. 轴承刚度均值的灵敏度可以表示轴承结构参数变化对轴承刚度变化的影响程度,其表达式为

$$S_{K_{x_i}} = \frac{\Delta K(x_i + \Delta x_i) - \Delta K(x_i)}{\Delta x_i} , \quad i = 1, 2, 3, 4 . \tag{30}$$

式中: x_1, x_2, x_3, x_4 分别为轴承内外圈沟道曲率半径、轴承外沟道直径以及轴承滚动体直径.

3.2 轴承刚度灵敏度程序

根据上述分析,给出了计算轴承结构参数对轴承刚度灵敏度的方法. 根据已知轴承的结构参数,选择合理的均值和方差进行拉丁超立方抽样. 将样本数据作为初值进行轴承非线性方程组求解,从而进一步求得对应初值的轴承的轴向和径向刚度. 根据轴承刚度的计算结果,应用 Kriging 方法进行目标轴承函数拟合,利用 Monte Carlo 法结合式(30)求解轴承结构参数的随机性对轴承刚度灵敏度的影响. 轴承刚度灵敏度计算流程如图 4 所示.

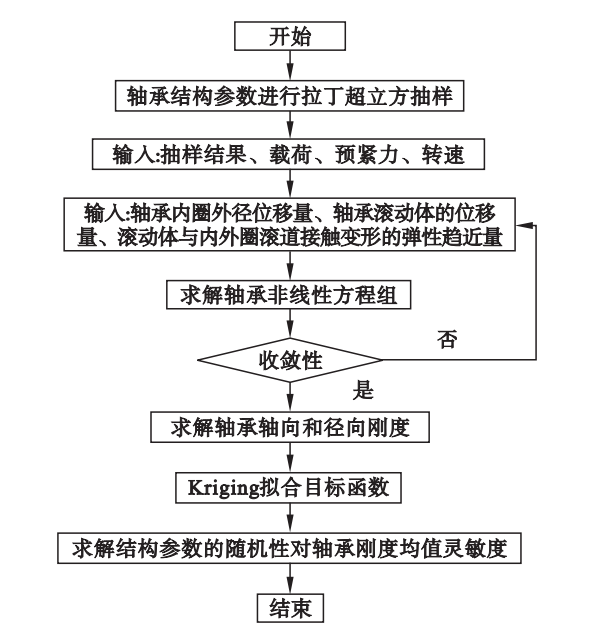


图 4 轴承刚度灵敏度计算流程图
Fig. 4 Computation flowchart of stiffness sensitivity for bearings

4 计算结果及分析

利用上述优化算法,分析了 NSK 角接触球轴承 7016A5 结构参数对轴承刚度的灵敏度. 分析中轴承预紧力和转速为定值,其中轴承所承受的外部径向载荷 $F_r = 200\text{ N}$, 预紧力 $F_a = 3\,000\text{ N}$, 转速 $n = 6\,000\text{ r/min}$. 轴承材料为 GCr15. D_m 为轴承节径,它是轴承内外圈滚道直径之和的一半. 本文中为了减小计算量,将轴承的内圈滚道直径设为固定值,因此, D_m 的大小仅由轴承外圈滚道直径 D_o 决定. 轴承的结构参数及其对应的均值和方差分别如表 1 和表 2 所示,图 5 ~ 图 7 为所有的计算结果.

表 1 角接触球轴承的原始参数 Table 1 Initial parameters of angular contact ball bearing	
轴承外径 D/mm	125
轴承内径 d/mm	80
中心圆直径 D_m/mm	103.141 7
球直径 D_w/mm	13.494
内圈沟道半径 R_i/mm	7.101
外圈沟道半径 R_o/mm	6.966
滚动体数目 N	20

表 2 轴承设计变量的取值范围 Table 2 Number range of bearing design variables		
设计变量	均值 μ	方差 σ
R_i/mm	7.101	0.005
R_o/mm	6.966	0.005
D_o/mm	116.035	0.01
D_w/mm	13.494	0.005

利用拉丁超立方抽取 30 组轴承结构参数作为样本点数据,通过拟静力学求解轴承的非线性方程组 (12) ~ (18) 求得轴承的轴向和径向刚度. 图 5 为轴承径向刚度的计算结果及 Kriging 预测误差,由图分析可知,经过 Kriging 算法计算后样本点与其响应值之间的误差非常小,其数量级为 10^{-6} ,并且其均方差根误差趋近于零,进而说明 Kriging 模型满足校验要求.

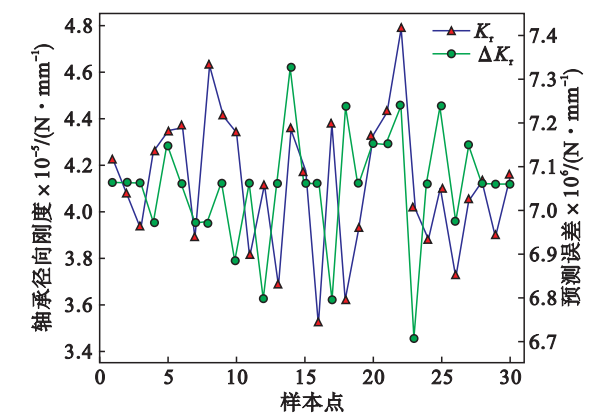


图 5 Kriging 拟合轴承径向刚度误差分析
Fig. 5 Fitting errors of Kriging for radial stiffness of bearings

利用 Monte Carlo 法分别对轴承轴向刚度和径向刚度的响应函数进行了 10^6 抽样,经过计算分别得到了轴承刚度均值对轴承结构参数均值和方差的灵敏度,如图 6 和图 7 所示. 由图明显可知,轴承轴向和径向刚度对轴承结构参数的灵敏度呈现相反的影响趋势.

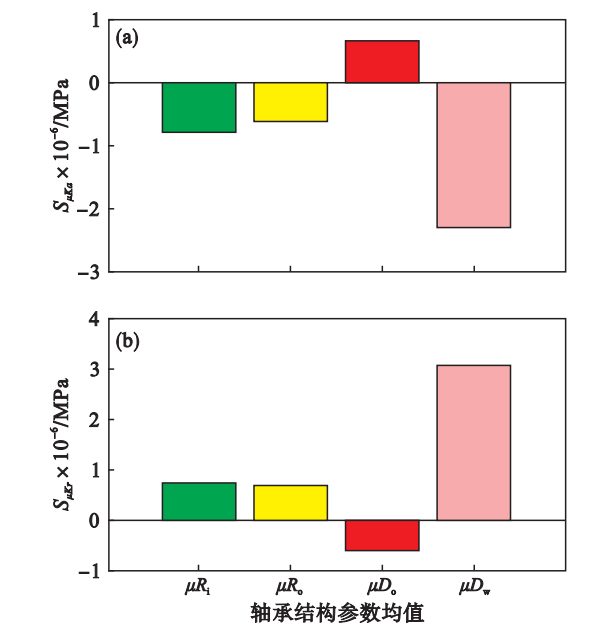


图 6 轴承刚度均值对轴承结构参数均值的灵敏度
Fig. 6 Sensitivity of the mean of bearings stiffness with respect to the mean of its structure parameters

轴承刚度均值对轴承结构参数均值的灵敏度

可以表征设计点变化对轴承刚度的影响大小. 分析图 6 可知,轴承轴向刚度均值随轴承滚动体直径和轴承内、外圈沟道曲率半径的均值的增加而减小,随轴承外圈沟道直径的均值的增加而增大. 对比可以发现,轴承刚度均值对轴承滚动体直径的变化反应最灵敏,轴承内外圈沟道曲率半径的变化对其影响次之,外沟道直径的变化对其影响最小. 因此在轴承承受载荷和转速不变的条件下,为了确保轴承刚度,在设计轴承时应重点考虑轴承滚动体直径选取的合理性.

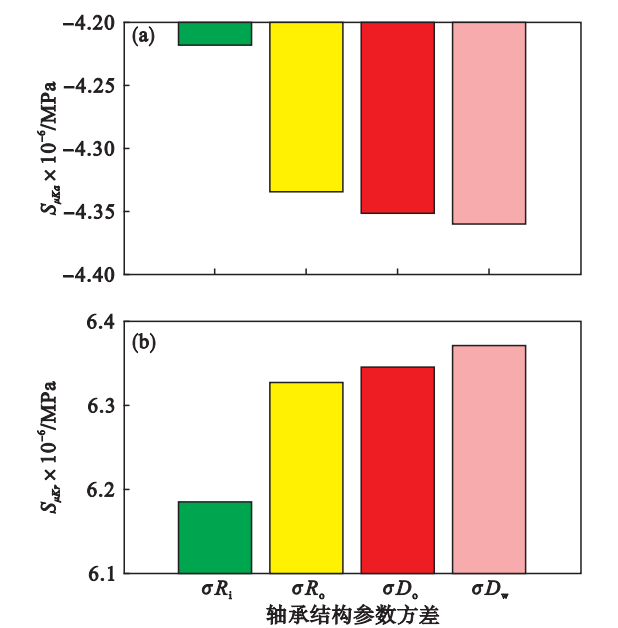


图 7 轴承刚度均值对轴承结构参数方差的灵敏度
Fig. 7 Sensitivity of the mean of bearings stiffness with respect to the variance of its structure parameters

轴承刚度均值对轴承结构参数方差的灵敏度可以表征加工和装配后结构参数的离散程度对轴承刚度的影响大小. 分析图 7 可知,轴承轴向刚度均值随轴承滚动体直径、轴承外圈沟道直径及轴承外圈和内圈沟道曲率半径的方差的增加而减小,且对上述参数变化的灵敏度依次减小. 因此在轴承承受载荷和转速不变的条件下,为确保轴承刚度,在轴承加工和装配时,轴承滚动体直径的加工精度和分选等级控制应该最为严格.

5 结 论

1) 考虑了轴承结构参数的随机性问题,提出了采用刚度灵敏度去评价轴承结构参数的随机性对轴承刚度的影响大小,该研究为轴承的结构参数和加工精度的选择及零件的分选提供了理论依据.

(下转第 833 页)