

doi: 10.3969/j.issn.1005-3026.2017.06.022

GM(1,1)模型背景值构造的不同方法与应用

彭振斌¹, 张 闯¹, 彭文祥¹, 王继武²

(1. 中南大学 地球科学与信息物理学院, 湖南 长沙 410083; 2. 北京城建道桥建设集团有限公司, 北京 100124)

摘 要: GM(1,1)模型的误差主要来源于背景值和初始值,因此提出3种不同的背景值构造方法分别为:把背景值的固定权改为变权构造背景值的方法、将数据序列抽象为指数函数构造背景值的方法、将数据序列抽象为非齐次指数函数构造背景值的方法,并以 $X(n)$ 为初始值和新陈代谢方法来建立GM(1,1)模型.通过工程实例检验这3种不同背景值构造方法建立的GM(1,1)模型的预测精度.计算结果表明,将数据序列抽象为非齐次指数函数构造背景值建立的模型预测精度较高,可为类似工程提供参考.

关 键 词: GM(1,1)模型;背景值;新陈代谢方法;预测精度

中图分类号: TU 433 **文献标志码:** A **文章编号:** 1005-3026(2017)06-0869-05

Different Structure Methods and Application of Background Value in GM(1,1) Model

PENG Zhen-bin¹, ZHANG Chuang¹, PENG Wen-xiang¹, WANG Ji-wu²

(1. School of Geosciences and Info-Physics, Central South University, Changsha 410083; 2. Beijing Urban Construction and Bridge Engineering Co. Ltd, Beijing 100124. Corresponding author: ZHANG Chuang, E-mail: 980191776@qq.com)

Abstract: The error of GM (1,1) model is mainly from the background value and the initial value, thus the paper puts forward three different construction methods of background value, viz. the method of changing fixed right of background value to the variable right, the method of abstracting the data sequence as index function to construct background value, the method of abstracting the data sequence non homogeneous exponential function to construct background value. And the prediction accuracy of the three methods for background value were compared by setting up GM (1, 1) model with the initial value of $X(n)$. Because the prediction accuracy of future development model for GM (1,1) model is weak, we use metabolism way to establish GM (1, 1) model and continuously optimize and update the model to avoid the large error. The prediction accuracy of GM (1, 1) model from the three different construction methods of background value was compared with the engineering examples. The results show that the method of abstracting data sequence as non homogeneous exponential function has a higher prediction precision, and it can provide reference for similar projects.

Key words: GM(1,1) model; background value; metabolic method; prediction precision

灰色预测模型GM(1,1)的背景值构造方法有多种,例如:文献[1]提出用线性函数插值和高斯公式来构造背景值,文献[2]提出用Newton-Cores公式来构造背景值,文献[3]提出用Romper算法和二次插值法来构造背景值.多数背景值构造方法用的是插值法,因此本文提出3种不同背景值构造方法,分别为:把背景值的固定权改为变权的构造方法、将数据序列抽象为指数函数的构造方法、将数据序列抽象为非齐次指数函数的构造方法.GM(1,1)模型是利用最小二乘法获得的拟合曲线,不一定通过第一个数据点,因此以 $X(n)$ 为初始值.GM(1,1)模型用于预测时,越往未来发展模型的预测精度就越低;为避免由此产生大的误差,用新陈代谢方法使模型参数不断

更新优化. 通过工程实例检验这 3 种不同背景值构造方法建立的 GM(1,1)模型的预测精度.

1 建立模型

在建模之前要检验所用的数据序列是否可以用来建模,用数据序列级比来检验.

定义 1^[4] 设

$$\sigma(k) = \frac{x(k)}{x(k-1)}, k=2,3,\cdots,n \tag{1}$$

为 X 序列的级比.

GM(1,1)模型要求级比 $\sigma(k)$ 满足覆盖 $\sigma(k) \in (e^{-\frac{2}{n+1}}, e^{\frac{2}{n+1}})$ 的序列,级比检验不合格的序列,需要进行数据变换的处理,使其满足要求.

1.1 GM(1,1)模型

定义 2^[5] 设 $X^{(0)} = \{x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \cdots, x^{(0)}(n)\}$ 为原始非负数据序列, $X^{(0)}$ 的一阶累加生成序列为 $X^{(1)} = \{x^{(1)}(1), x^{(1)}(2), \cdots, x^{(1)}(n)\}$, $X^{(1)}$ 的紧邻均值生成序列为 $Z^{(1)} = \{z^{(1)}(1), z^{(1)}(2), \cdots, z^{(1)}(n)\}$, 则称

$$x^{(0)}(k) + a z^{(1)}(k) = b \tag{2}$$

为灰色 GM(1,1)模型, 其中, $x^{(1)}(k) = \sum_{i=1}^k x^{(1)}(i), k=1,2,\cdots,n; z^{(1)}(k) = \frac{1}{2}(x^{(1)}(k) + x^{(1)}(k-1)), k=2,3,\cdots,n$.

根据式(2)利用最小二乘法,估计出参数 a, b 的值,得

$$\hat{a} = [a \quad b]^T = (B^T B)^{-1} B^T Y. \tag{3}$$

其中: $B = \begin{bmatrix} -z^{(1)}(2) & (z^{(1)}(2))^2 \\ \vdots & \vdots \\ -z^{(1)}(n) & (z^{(1)}(n))^2 \end{bmatrix},$

$$Y = \begin{bmatrix} -x^{(0)}(2) \\ \vdots \\ -x^{(0)}(n) \end{bmatrix}.$$

定义 3^[5] 将式

$$\frac{dx^{(1)}}{dt} + ax^{(1)} = b \tag{4}$$

称作灰色 GM(1,1)模型白化方程.

定理 1^[5] 设 B, Y, \hat{a} 如上所述, $\hat{a} = [a \quad b]^T = (B^T B)^{-1} B^T Y$, 灰色 GM(1,1)模型白化方程 $\frac{dx^{(1)}}{dt} + ax^{(1)} = b$ 的解也称为时间响应函数

$$\hat{x}^{(1)}(k+1) = (x^{(0)}(1) - \frac{b}{a})e^{-ak} + \frac{b}{a}, k=1,2,\cdots,n-1. \tag{5}$$

GM(1,1)模型是利用最小二乘法获得的拟

合曲线, 不一定通过第一个数据点, 因此以 $x^{(1)}(n)$ 为初始值建立 GM(1,1)模型为 $\hat{x}^{(1)}(k+1) = (x^{(1)}(n) - \frac{b}{a})e^{-a(k-n+1)} + \frac{b}{a}, k=1,2,\cdots,n-1.$ (6)

建立 GM(1,1)模型的数据序列应该是等时间段的, 而原始的数据序列很多时候是不等距的, 所以要用 spline 三次样条插值、Hermite 插值等方法对原始数据进行等距处理.

1.2 背景值的构造方法

重新构造式(2)中的背景值 $z^{(1)}(k)$.

①构造方法一:

文献[6]中把背景值的固定权改为变权来构造背景值得到

$$z^{(1)}(k+1) = \frac{1}{2n}[(n-1)x^{(1)}(k) + (n+1)x^{(1)}(k+1)], k=1,2,\cdots,N-1. \tag{7}$$

式中 n 为待定常数.

用经验公式求出 n .

对低增长指数序列:

$$n = (\sum_{i=2}^N R_i)^2 N. \tag{8}$$

式中: N 为序列长度; $R_i = x^{(1)}(i)/x^{(1)}(i-1), i=2,3,\cdots,N$.

对高增长指数序列:

$$n = (\sum_{i=2}^N R_i)^{\frac{1}{N-1}} + (N-1). \tag{9}$$

式中: N 为序列长度; $R_i = x^{(1)}(i)/x^{(1)}(i-1), i=2,3,\cdots,N$.

②构造方法二:

文献[7]中将数据序列抽象为指数函数来构造背景值得到

$$z^{(1)} = \frac{x^{(1)}(k) - x^{(1)}(k-1)}{\ln x^{(1)}(k) - \ln x^{(1)}(k-1)}, k=2,3,\cdots,n. \tag{10}$$

③构造方法三:

文献[8]中将数据序列抽象为非齐次指数函数来构造背景值得到

$$z^{(1)} = \frac{x^{(1)}(k) - x^{(1)}(k-1)}{\ln[x^{(1)}(k) - x^{(1)}(1)] - \ln[x^{(1)}(k-1)]} - \frac{x^{(1)}(1) \cdot x^{(1)}(k-1)}{x^{(0)}(k) - x^{(1)}(1)}, k=2,\cdots,n. \tag{11}$$

分别将式(7), (10), (11)代入式(6)建立 GM(1,1)¹模型、GM(1,1)²模型、GM(1,1)³模型.

1.3 新陈代谢方法^[9]

以 GM(1,1)¹模型为例, 新陈代谢建模方法

由初始数据序列建立 $GM(1,1)^1$ 模型预测一个值,然后将这个预测值补充到现有数据序列之后,同时去除第一个已有的数据,使数据序列保持等维,建立 $GM(1,1)^1$ 模型预测下一个值,然后把新预测值补充到数据序列后,同时去除上一数据序列中的第一个数据,直到完成预测目标为止.

1.4 预测值的精度检验^[10]

设 $e(i)$ 为原始数据列 $x_i^{(1)}$ 和预测数据列 $\hat{x}_i^{(1)}$ 的残差,即 $e(i) = x_i^{(1)} - \hat{x}_i^{(1)}$,则可用下列指标对预测值进行精度检验.

1) 相对误差 α :

$$\alpha = \left| \frac{x_i^{(1)}(k) - \hat{x}_i^{(1)}(k)}{x_i^{(1)}(k)} \right| \times 100\% . \quad (12)$$

2) 均方差比值 C :

$$C = S_2 / S_1 . \quad (13)$$

式中: S_1 为原始数据均方差; S_2 为残差均方差.

3) 绝对关联度 ε :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1 + |s_i| + |s_j|}{1 + |s_i| + |s_j| + |s_i - s_j|} ,$$

$$|s_i| = \left| \sum_{k=2}^{n-1} x_i^{(1)}(k) + \frac{1}{2} x_i^{(1)}(n) \right| ,$$

$$|s_j| = \left| \sum_{k=2}^{n-1} x_j^{(1)}(k) + \frac{1}{2} x_j^{(1)}(n) \right| , \quad (14)$$

$$|s_i - s_j| = \left| \sum_{k=2}^{n-1} (x_i^{(1)}(k) - x_j^{(1)}(k)) + \frac{1}{2} (x_i^{(1)}(n) - x_j^{(1)}(n)) \right| . \quad (15)$$

4) 小误差概率 P :

$$P = P \{ |e(i) - \bar{e}| < 0.674 S_1 \} . \quad (16)$$

式中 \bar{e} 为残差的均值.

基处理后方可满足使用功能的要求.按照设计要求,首先结合规划的路网和码头功能分区设置封闭围堰,将整个场区划分成 7 个纳泥塘(编号为 A,B1,B2,C1,C2,C3,C4),围堰由抛石爆破挤淤形成,围堰顶宽为 10.00 ~ 30.00 m,设计顶标高为 +6.00 m 左右,块石围堰下的残留淤泥厚度小于 1.00 m,围堰施工完成后进行吹填造陆.为及时了解围堰在吹填施工期间的工作状况,保证围堰的稳定性和施工顺利进行,达到信息化施工、满足设计和规范要求、发现和及时处理问题的目的,对该工程进行监测.共有 64 个沉降监测点(T1 ~ T64),如图 1 所示.选取监测点 T17,T52 的原始数据序列建立 $GM(1,1)^1$, $GM(1,1)^2$ 和 $GM(1,1)^3$ 模型,对围堰进行沉降预测.每 1 个月为一监测周期,共选 11 个周期的累计沉降数据,前 8 个数据用来建立模型,后 3 个数据用来和预测值对比,原始数据见表 2.

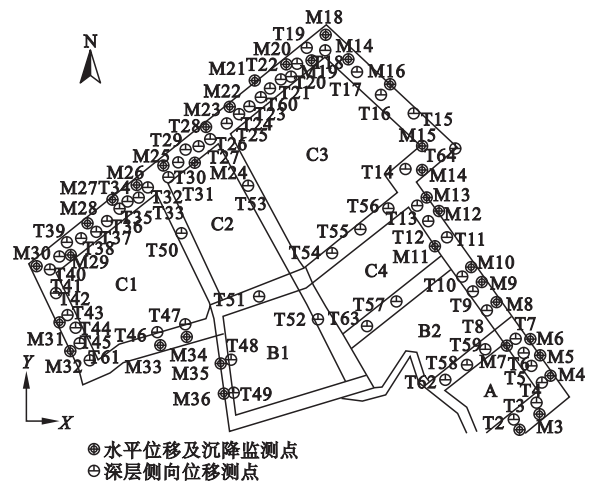


图 1 监测点布置示意图
Fig. 1 Schematic diagram of monitoring point

因实测数据是累计沉降量,所以以累计沉降数据为 $x^{(1)}(k)$,对 $x^{(1)}(k)$ 进行累减得到 $x^{(0)}(k)$,由式(1)得监测点 T17,T52 级比见表 2,可知数据为低增长指数序列,取前 8 个数据序列建模则 $n=8$,级比覆盖 $\sigma(k) \in [0.8007, 1.2488]$,可知监测点 T17,T52 的级比都在级比覆盖范围之内,可以用来建模.

选取表 2 中监测点 T17 前 8 个实测值建模:

① $GM(1,1)^1$ 模型为

$$\hat{x}^{(1)}(k+1) = -14.08293 \times e^{-0.13692(k-7)} + 52.68293, k = 1, \cdots, 7 . \quad (17)$$

② $GM(1,1)^2$ 模型为

$$\hat{x}^{(1)}(k+1) = -14.13535 \times e^{-0.13641(k-7)} + 52.73535, k = 1, \cdots, 7 . \quad (18)$$

2 应用实例

招商局深圳前湾吹填造陆填堤围堰工程场地位于深圳市南山区前海湾,规划为联动物流园区和码头后方堆场,场地原始地貌属滨海潮间带,沉积有深厚的淤泥层,淤泥面高程为 -1.50 m ~ +0.50 m,淤泥呈流塑状态,需进行填海造地及地

③GM(1,1)³ 模型为

$$\hat{x}^{(1)}(k+1)=-13.820\,42\times e^{-0.139\,74(k-7)}+52.420\,42,k=1,\cdots,7. \tag{19}$$

表 2 监测点原始数据序列
Table 2 Original data sequence of monitoring points

序号	日期	累计沉降/mm		级比 $\sigma(k)$	
		点 T17	点 T52	点 T17	点 T52
1	2006/10/22	16.2	10.3		
2	2006/11/22	20.4	12.9	1.259 3	1.252 4
3	2006/12/22	24.5	15.3	1.201 0	1.186 0
4	2007/1/22	28.7	17.6	1.171 4	1.150 3
5	2007/2/22	32.1	19.4	1.118 5	1.102 3
6	2007/3/22	35.0	20.9	1.090 3	1.077 3
7	2007/4/22	37.1	22.4	1.060 0	1.071 8
8	2007/5/22	38.6	23.5	1.040 4	1.049 1
9	2007/6/22	40.8	24.7	1.057 0	1.051 1
10	2007/7/22	41.9	25.5	1.027 0	1.032 4
11	2007/8/22	42.9	26.2	1.023 9	1.027 5

表 3 点 T17 不同模型拟合值和预测值及相对误差

Table 3 Fitted and predictive values and relative errors of different models for the point T17 mm											
序号	日期	实测值	GM(1,1) ¹			GM(1,1) ²			GM(1,1) ³		
			拟合值	预测值	相对误差	拟合值	预测值	相对误差	拟合值	预测值	相对误差
1	2006/10/22	16.2	16.200		0.000	16.200		0.000	16.200		0.000
2	2006/11/22	20.4	20.660		1.272	20.691		1.426	20.457		0.282
3	2006/12/22	24.5	24.757		1.050	24.777		1.130	24.626		0.514
4	2007/1/22	28.7	28.330		1.287	28.342		1.247	28.251		1.566
5	2007/2/22	32.1	31.447		2.036	31.452		2.017	31.403		2.172
6	2007/3/22	35.0	34.164		2.389	34.166		2.382	34.144		2.446
7	2007/4/22	37.1	36.534		1.527	36.534		1.525	36.527		1.544
8	2007/5/22	38.6	38.600		0.000	38.600		0.000	38.600		0.000
9	2007/6/22	40.8		40.402	0.975		40.402	0.974		40.402	0.975
10	2007/7/22	41.9		41.787	0.270		41.788	0.267		41.789	0.266
11	2007/8/22	42.9		42.791	0.254		42.794	0.247		42.796	0.242

用式(12)~(16)来检验 3 种模型的拟合程度和预测效果,检验结果见表 5.

由表 3,表 4 的数据可知 GM(1,1)³ 模型的拟合值和预测值更靠近实测值.由表 5 的数据可知监测点 T10,T17,T52 的平均相对误差、绝对关联度、均方差比值均为 GM(1,1)³ 模型<GM(1,1)¹ 模型<GM(1,1)² 模型;小误差概率均为 1.000 0.由表 1 可知 3 个模型的精度均为一级.由此可得 GM(1,1)³ 模型的预测精度和有效性最好,GM(1,1)¹ 模型次之,GM(1,1)² 模型最差,但 3 个模型都适用于此工程.对 3 种不同背景

求出 3 个模型的拟合值见表 3,然后对监测点 T17 后 3 个沉降数据序列应用新陈代谢方法逐次求出预测值,见表 3.

选取表 2 中监测点 T52 前 8 个实测值建模:
①GM(1,1)¹ 模型为

$$\hat{x}^{(1)}(k+1)=-8.670\,38\times e^{-0.132\,26(k-7)}+32.170\,38,k=1,\cdots,7. \tag{20}$$

②GM(1,1)² 模型为

$$\hat{x}^{(1)}(k+1)=-8.705\,09\times e^{-0.131\,76(k-7)}+32.205\,09,k=1,\cdots,7. \tag{21}$$

③GM(1,1)³ 模型为

$$\hat{x}^{(1)}(k+1)=-8.506\,84\times e^{-0.135\,05(k-7)}+32.006\,84,k=1,\cdots,7. \tag{22}$$

求出 3 个模型的拟合值见表 4,然后对监测点 T52 后 3 个沉降数据序列应用新陈代谢方法逐次求出预测值见表 4.

值构造方法的比较可知,将数据序列抽象为非齐次指数函数构造背景值的方法较好,所建立的模型在工程中预测效果更好.

3 结 论

- 1) 用固定权改为变权构造方法、将数据序列抽象为指数函数构造方法、将数据序列抽象为非齐次指数函数构造方法建立了 GM(1,1)¹,GM(1,1)² 和 GM(1,1)³ 模型.
- 2) 采用新陈代谢方法建立模型,参数不断更

表 4 点 T52 不同模型拟合值和预测值及相对误差

Table 4 Fitted and predictive values and relative errors of different models for the point T52 mm

序号	日期	实测值	GM(1,1) ¹			GM(1,1) ²			GM(1,1) ³		
			拟合值	预测值	相对误差	拟合值	预测值	相对误差	拟合值	预测值	相对误差
1	2006/10/22	10.3	10.300		0.000	10.300		0.000	10.300		0.000
2	2006/11/22	12.9	12.998		0.762	13.014		0.881	12.879		0.166
3	2006/12/22	15.3	15.373		0.480	15.383		0.541	15.295		0.033
4	2007/1/22	17.6	17.454		0.828	17.459		0.799	17.406		1.101
5	2007/2/22	19.4	19.277		0.632	19.280		0.620	19.251		0.770
6	2007/3/22	20.9	20.875		0.121	20.875		0.118	20.862		0.181
7	2007/4/22	22.4	22.274		0.562	22.274		0.562	22.270		0.581
8	2007/5/22	23.5	23.500		0.000	23.500		0.000	23.500		0.000
9	2007/6/22	24.7		24.574	0.510		24.575	0.508		24.575	0.508
10	2007/7/22	25.5		25.467	0.130		25.468	0.126		25.469	0.121
11	2007/8/22	26.2		26.206	0.023		26.208	0.029		26.212	0.047

表 5 不同模型的精度检验

Table 5 Prediction and analysis of different models

检验指标	GM(1,1) ¹		GM(1,1) ²		GM(1,1) ³	
	T17	T52	T17	T52	T17	T52
平均相对误差/%	1.005 5	0.368 1	1.019 6	0.380 3	0.909 6	0.318 9
绝对关联度	0.980 6	0.990 9	0.979 7	0.990 1	0.986 3	0.996 7
均方差比值	0.040 1	0.015 8	0.040 5	0.016 1	0.036 7	0.013 0
小误差概率	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0	1.000 0

新优化,模型的稳定性和预测精度有很大提高.

3) 比较 GM(1,1)¹,GM(1,1)²,GM(1,1)³ 模型的平均相对误差、绝对关联度、均方差比值、小误差概率,可知 GM(1,1)³ 模型具有较好的预测精度和有效性.

4) 由拟合结果和预测结果可知这三种模型都能很好地应用在此工程中,达到发现问题和及时处理问题的目的.

参考文献：

[1] Dai W Z,Chen Y G. Research of GM（1，1） background value based on Gauss-Legendre quadrature and its application [C]// IEEE International Conference on Integration Technology. Shenzhen,2007;100－102.

[2] Li C F. The improved background value of ameliorating GM（1，1） model and its application [C]// 2nd IEEE International Conference on Intelligent Control and Information Processing. Harbin,2011;131－134.

[3] Li B,Zhao S L,Fang L. Optimized GM（1，1） based on Romber algorithm and quadratic interpolation method[C]// International Conference on Apperceiving Computing and Intelligence Analysis. Chengdu,2009;128－131.

[4] 邓聚龙. 灰色预测与灰决策[M]. 武汉:华中科技大学出版社,2002.

(Deng Ju-long. Grey forecasting and decision[M]. Wuhan;

Huazhong University of Science and Technology Press, 2002.)

[5] Liu S F,Lin Y. Grey systems theory and application[M]. Berlin;Springer,2011;169－190.

[6] 谭冠军,檀甲友,王加阳. 灰色系统预测模型 GM(1,1) 背景值重构研究[J]. 数学的实践与认识, 2015,45(15): 267－273.

(Tan Guan-jun, Tan Jia-you, Wang Jia-yang. The reestablishing research of background value in grey system forecasting model GM(1,1) [J]. *Mathematics in Practice and Theory*,2015,45(15);267－273.)

[7] 罗党,刘思峰,党耀国. 灰色模型 GM(1,1) 优化[J]. 中国工程科学,2003,5(8);50－53.

(Luo Dang,Liu Si-feng,Dang Yao-guo. The optimization of grey model GM(1,1) [J]. *Engineering Science*, 2003, 5(8);50－53.)

[8] Li H W,Liu Q Y,Mao W J. An optimized GM(1,1) model based on the modified construction method of background value[C]// International Conference on Computational & Information Sciences. Chengdu,2010;41－44.

[9] Liu H,Li G F,Dai T D. Application of metabolic GM(1,1) model and Verhulst model in forecasting of soft rock roadway convergence [C]// IEEE International Conference on Remote Sensing, Environment and Transportation Engineering. Nanjing,2012;1－4.

[10] Ren X W,Tang Y Q,Li J,et al. A prediction method using grey model for cumulative plastic deformation under cyclic loads[J]. *Natural Hazards*,2012,64(1):441－457.