

一种基于 Kriging 模型的机械结构可靠性分析方法

刘 阔¹, 李晓雷², 王 健³
(1. 大连理工大学 机械工程学院, 辽宁 大连 116024; 2. 哈尔滨工业大学 机电工程学院, 黑龙江 哈尔滨 150001;
3. 东北大学 机械工程与自动化学院, 辽宁 沈阳 110819)

摘 要: 通过分析现有机械结构可靠性抽样方法存在的不足以及影响失效概率估计精度的主要因素,提出了一种基于 Kriging 模型及自适应抽样方法的机械结构可靠性分析方法. 该抽样方法将随机抽样与聚类算法相结合,能够在概率上保证新增样本点落在对失效概率贡献较大的区域,避免对非重要区域的不必要抽样. 以大数定律及中心极限定理为基础,推导了所提出的 Kriging 模型的收敛条件. 通过两个算例说明所提出方法的迭代收敛过程、准确性及稳定性,结果表明,该方法能够在较少调用结构功能函数情况下得到失效概率较准确的估计值.

关 键 词: Kriging 模型;机械结构可靠性;失效概率;自适应抽样方法;蒙特卡罗方法

中图分类号: V 215.7; TB 114.3 **文献标志码:** A **文章编号:** 1005-3026(2017)07-1002-05

An Analysis Method of Mechanical Structural Reliability Based on the Kriging Model

LIU Kuo¹, LI Xiao-lei², WANG Jian³
(1. School of Mechanical Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China; 2. School of Mechatronics Engineering, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China; 3. School of Mechanical Engineering & Automation, Northeastern University, Shenyang 110819, China. Corresponding author: LIU Kuo, E-mail: liukuo@dlut.edu.cn)

Abstract: Based on an analysis of the drawbacks of the existing mechanical structure reliability sampling methods and the main factors influencing the estimation accuracy of failure probability, an analysis method of mechanical structural reliability based on the Kriging model and adaptive sampling strategy is proposed. The proposed sampling strategy combines random sampling and clustering algorithm, and ensures in probability that the new sample points locate themselves in the area that makes significant contribution to failure probability and avoids unnecessary sampling in the unimportant areas. The condition of convergence for the proposed Kriging model is deduced mainly based on the law of large numbers and central limit theorem. Two examples are adopted to illustrate the convergence process, accuracy and stability of the proposed method. The results show that the proposed method can estimate failure probability with high accuracy in the condition that the number of calls to structural performance function is small.

Key words: Kriging model; mechanical structural reliability; failure probability; adaptive sampling strategy; Monte Carlo method

机械结构可靠性分析的主要目的是在考虑结构各输入参数随机性情况下计算其失效概率. 近年来国内外学者将一阶矩、二阶矩、Monte Carlo (MC)^[1]、代理模型等方法应用于机械结构可靠性分析. 一阶矩及二阶矩方法难以适应工程结构非线性隐式的特点,精度有限. MC 方法鲁棒性最好,然而耗时过长. 代理模型方法是目前应用最广泛的机械结构可靠性分析方法.

众多学者通过调整代理模型函数形式^[2-6]及选取样本点策略^[7-10]提高代理模型精度及效率.

Blatman^[2], Roussouly^[3] 等将稀疏多项式应用于结构可靠性分析,通过不同方法筛选“重要项”.此外,为提高模型的非线性程度,Kriging^[4-5]、神经网络^[6]、SVM^[7] 也被广泛采用.Kriging 模型是一种高效的差值模型.因此,本文采用 Kriging 作为基本代理模型.

样本点的选取策略对代理模型精度和效率有很大影响.为提高样本点的质量,很多自适应抽样方法被提出^[3,5,7-10].现有抽样方法中鲜有考虑在迭代抽样过程中可能出现由于个别样本点间距离过近甚至矩阵奇异问题,尤其是当算法接近收敛时,设计点附近很小范围内往往集中过多样本点.本文提出一种新的自适应抽样方法,避免对“不重要区域”没必要抽样;保证抽取的样本点保持与现有样本点的距离.

1 主要理论

假设某机械结构的输入变量为 \mathbf{X} (\mathbf{X} 为 N 维随机向量), \mathbf{X} 的联合概率密度函数为 $f(\mathbf{x})$,该结构的功能函数为 $G(\mathbf{x})$,其安全域和失效域分别为 $S_s = \{\mathbf{x} | G(\mathbf{x}) > 0, \mathbf{x} \in \mathbf{R}^N\}$ 和 $S_f = \{\mathbf{x} | G(\mathbf{x}) \leq 0, \mathbf{x} \in \mathbf{R}^N\}$,则该结构失效概率为

$$P_f = \int_{G(\mathbf{x}) \leq 0} f(\mathbf{x}) \mathrm{d}\mathbf{x} . \tag{1}$$

若已知样本集 $\Omega = \{(\mathbf{x}_i, y_i), i = 1, 2, \cdots, M\}$,且功能函数 $G(\mathbf{x})$ 可表示为

$$G(\mathbf{x}) = \mathbf{g}^T(\mathbf{x})\boldsymbol{\beta} + z(\mathbf{x}) . \tag{2}$$

其中: $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ 为多项式基函数; $\boldsymbol{\beta}$ 为 $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ 的系数向量,本文中取 $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ 的次数为 1; $z(\mathbf{x})$ 为零均值同方差高斯过程, $z(\mathbf{x}_i)$, $z(\mathbf{x}_j)$ 的协方差为

$$\text{Cov}[z(\mathbf{x}_i), z(\mathbf{x}_j)] = \sigma_z^2 R(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j; \boldsymbol{\theta}) . \tag{3}$$

其中: σ_z^2 是高斯过程的方差; $R(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j; \boldsymbol{\theta})$ 表示 $z(\mathbf{x}_i)$ 和 $z(\mathbf{x}_j)$ 的相关系数, $\boldsymbol{\theta}$ 为参数.应用最广泛的是高斯相关函数,其形式为

$$R(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j; \boldsymbol{\theta}) = \prod_{n=1}^N \exp[-\theta_n (x_{i,n} - x_{j,n})^2] . \tag{4}$$

其中, $x_{i,n}$ 表示向量 \mathbf{x}_i 的第 n 个元素.

在给定样本集 Ω 情况下,式(2)~式(4)中的未知参数 $\boldsymbol{\beta}, \sigma_z^2, \boldsymbol{\theta}$ 可通过极大似然法估计得到,

$$\max L(\boldsymbol{\theta}) = -(M \ln(\hat{\sigma}_z^2) + \ln[\det(\mathbf{R})]) . \tag{5}$$

式中: $\hat{\sigma}_z^2$ 为广义最小二乘法估计的残差; \mathbf{R} 为 $M \times M$ 相关系数矩阵; $\hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\beta}}, \hat{\sigma}_z^2$ 分别表示 $\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\beta}, \sigma_z^2$ 的极大似然估计值.点 \mathbf{x} 处结构的功能函数可表示为 \mathbf{Y} 的线性组合形式,

$$\hat{G}(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T(\mathbf{x}) \mathbf{Y} . \tag{6}$$

式中, $\mathbf{Y} = [y_1, y_2, \cdots, y_M]^T$.

要实现 $\hat{G}(\mathbf{x})$ 的最小方差无偏性^[11],则 $\mathbf{c}(\mathbf{x})$ 需满足

$$\left. \begin{aligned} \min \text{var}(\mathbf{c}^T(\mathbf{x})\mathbf{Z} - z(\mathbf{x})) , \\ \mathbf{G}^T \mathbf{c}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{x}) = 0 , \\ \mathbf{Z} = (z_1, z_2, \cdots, z_M)^T . \end{aligned} \right\} \tag{7}$$

求解式(7),可得 $\hat{G}(\mathbf{x})$ 的 Kriging 表达式为

$$\hat{G}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{x})\hat{\boldsymbol{\beta}} + \mathbf{r}^T(\mathbf{x})\boldsymbol{\gamma} . \tag{8}$$

则该结构失效概率 P_f 的估计值为

$$\hat{P}_f = \int_{\hat{G}(\mathbf{x}) \leq 0} f(\mathbf{x}) \mathrm{d}\mathbf{x} . \tag{9}$$

当 \mathbf{X} 的维数较高时,直接求式(9)的积分值很困难.本文采用 MC 法通过随机抽样近似计算 \hat{P}_f ,根据大数定律,

$$\hat{P}_f \approx \frac{1}{N_{\text{MC}}} \sum_{i=1}^{N_{\text{MC}}} I(\hat{G}(\mathbf{x}_{\text{MC},i})) . \tag{10}$$

其中: N_{MC} 为随机抽样次数; $\mathbf{x}_{\text{MC},i}$ ($i = 1, 2, \cdots, N_{\text{MC}}$) 是来自 $f(\mathbf{x})$ 的独立同分布随机序列.由中心极限定理知,当 N_{MC} 足够大时, $I(\hat{G}(\mathbf{x}_{\text{MC},i}))$ 的均值依分布收敛于正态分布,可得

$$P(|\bar{P}_f - \hat{P}_f| < \lambda_0 \hat{P}_f) \approx 2\Phi(\lambda_0 \hat{P}_f \sqrt{\frac{N_{\text{MC}}}{\hat{P}_f(1 - \hat{P}_f)}}) - 1 ,$$

$$\bar{P}_f = \frac{1}{N_{\text{MC}}} \sum_{i=1}^{N_{\text{MC}}} I(\hat{G}(\mathbf{x}_{\text{MC},i})) .$$

其中: $\Phi(\cdot)$ 为标准正态分布函数; λ_0 为正数.若要保证在 95% 的置信水平下 \hat{P}_f 与 \bar{P}_f 间的相对误差不超过 5%, N_{MC} 需满足

$$2\Phi(0.05 \hat{P}_f \sqrt{\frac{N_{\text{MC}}}{\hat{P}_f(1 - \hat{P}_f)}}) - 1 > 0.95 . \tag{11}$$

通常情况下工程机械结构的失效概率数量级很小, $(1 - \hat{P}_f)$ 应接近 1,因此忽略分母中的 $(1 - \hat{P}_f)$,式(11)可写成

$$N_{\text{MC}} \hat{P}_f > 1\,537 . \tag{12}$$

$N_{\text{MC}} \hat{P}_f$ 表示当结构的极限状态函数为 $\hat{G}(\mathbf{x}) = 0$ 时 N_{MC} 次随机抽样中失效样本个数的期望.

2 本文的方法及收敛条件

2.1 本文的方法

本文提出在 $\hat{G}(\mathbf{x}) = 0$ 上选取具有“代表性的”点,计算这些点的结构功能函数值,更新 $\hat{G}(\mathbf{x}) = 0$,在迭代过程中使 $\hat{G}(\mathbf{x}) = 0$ 逐渐接近 $G(\mathbf{x}) = 0$,直至满足收敛条件.

本文提出的选取样本点方法的主要步骤为
 步骤 1 $t = 0$,应用拉丁超立方抽样方法^[12] 随机产生初始样本点并计算各点结构功能函数

值,计算 $\hat{G}_0(\mathbf{x})$, $\bar{P}_{f,0}$. 初始样本点个数为 M_0 , 令

$$\Omega_0 = \{(\mathbf{x}_{0,i}, y_{0,i}), i = 1, 2, \cdots, M_0\},$$
$$\mathbf{X}_0 = \{\mathbf{x}_{0,1}, \mathbf{x}_{0,2}, \cdots, \mathbf{x}_{0,M_0}\}.$$

步骤 2 $t = t + 1$, 随机抽取 K 个 $\hat{G}_{t-1}(\mathbf{x}) = 0$ 上的点. 给定 $\hat{G}_{t-1}(\mathbf{x})$, 生成 N 维服从 $f(\mathbf{x})$ 的随机向量, 若该随机向量满足式 (13), 则认为其在 $\hat{G}_{t-1}(\mathbf{x}) = 0$ 上. 当满足式 (13) 随机向量数达到 K 个时, 停止生成随机向量过程, 并记 $\tilde{\mathbf{X}}_{t-1} = \{\tilde{\mathbf{x}}_{t-1,1}, \tilde{\mathbf{x}}_{t-1,2}, \cdots, \tilde{\mathbf{x}}_{t-1,K}\}$.

$$|\hat{G}_{t-1}(\mathbf{x})| \leq \varepsilon. \tag{13}$$

步骤 3 对 $\tilde{\mathbf{X}}_{t-1}$ 作聚类分析, 将其分成 k 类并得到 k 个类别的中心, 并将 k 个中心点映射到 $\hat{G}_{t-1}(\mathbf{x}) = 0$ 上. 令 $\{s_{t-1,1}, s_{t-1,2}, \cdots, s_{t-1,k}\}$ 表示 k 个聚类中心. 通常情况下 $\hat{G}_{t-1}(\mathbf{x}) = 0$ 是非线性曲面, 因此不能保证 k 个聚类中心点在 $\hat{G}_{t-1}(\mathbf{x}) = 0$ 上, 因此要将其映射到 $\hat{G}_{t-1}(\mathbf{x}) = 0$ 上. 映射的方法是在 $\hat{G}_{t-1}(\mathbf{x}) = 0$ 上寻找满足式 (14) 的点, 得到 $S_{t-1} = \{\hat{s}_{t-1,0}, \hat{s}_{t-1,1}, \cdots, \hat{s}_{t-1,k}\}$, 其中 $\hat{s}_{t-1,0}$ 为 $\hat{G}_{t-1}(\mathbf{x})$ 的设计点.

$$\begin{aligned} \min \quad & \| \mathbf{x} - s_{t-1,i} \|, \\ \text{s. t.} \quad & \hat{G}(\mathbf{x}) = 0. \end{aligned} \tag{14}$$

其中, $i = 1, 2, \cdots, k$.

步骤 4 调整集合 S_{t-1} 中各点位置. 如式 (15) 定义 D_0 , 本文中认为两个样本点间距离小于 D_0 时是不可接受的, 需要调整个别点位置.

$$D_0 = e_0 \cdot \left(\frac{2}{M(M-1)} \sum_{i < j} \| \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j \| \right). \tag{15}$$

式中, e_0 为给定常数.

步骤 5 计算 S_{t-1} 中各样本点的结构功能数值. 令

$$\Omega_{t-1}^0 = \{(\hat{s}_{t-1,i}, y_{t-1,i}), i = 0, 1, \cdots, k\},$$
$$\Omega_t = \Omega_{t-1} \cup \Omega_{t-1}^0.$$

步骤 6 根据 Ω_t 计算 $\hat{G}(\mathbf{x})$, $\bar{P}_{f,t}$. 若 $\bar{P}_{f,t}$ 满足式 (16) 的收敛条件, 则停止迭代过程, $\bar{P}_{f,t}$ 即为 P_f 估计值; 否则返回步骤 2, 直至 $\bar{P}_{f,t}$ 满足收敛条件.

2.2 收敛条件

当迭代过程收敛时, 可以认为

$$\hat{P}_{f,t} = \hat{P}_{f,t-1} = \hat{P}_f.$$

由中心极限定理, 若能保证抽样次数满足

$$N_{MC,t-1} = N_{MC,t} = N_{MC}.$$

则

$$\bar{P}_{f,t} - \bar{P}_{f,t-1} \sim N(0, 2\hat{P}_f(1 - \hat{P}_f)/N_{MC}),$$
$$P\left(\frac{\bar{P}_{f,t} - \bar{P}_{f,t-1}}{\hat{P}_f} \leq 1.96 \sqrt{\frac{2(1 - \hat{P}_f)}{\hat{P}_f N_{MC}}}\right) \approx 0.95.$$

根据式 (11) 和式 (12),

$$P(\bar{P}_{f,t} - \bar{P}_{f,t-1} / \hat{P}_f \leq 0.0707) \approx 0.95.$$

收敛条件为

$$\frac{\bar{P}_{f,t} - \bar{P}_{f,t-1}}{(\bar{P}_{f,t} + \bar{P}_{f,t-1})/2} \leq 7\%. \tag{16}$$

3 实例分析

3.1 实例 1

选用文献 [10] 中某二维输入变量结构作为分析对象, 该算例的主要目的是进一步用于说明本文所提出的方法. 该结构的功能函数为

$$G(\mathbf{x}) = \exp(0.4x_1 + 7) - \exp(0.3x_2 + 5) - 200.$$

其中, x_1, x_2 相互独立且均服从标准正态分布.

$$P_f = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x_2^2/2) \cdot \int_{-\infty}^{u(x_2)} \exp(-x_1^2/2) dx_1 dx_2. \tag{17}$$

其中,

$$u(x_2) = 2.5(\ln(\exp(0.3x_2 + 5) + 200) - 7).$$

通过 MATLAB 软件, 采用数值积分的方法计算式 (17), 得到失效概率为

$$P_f = 3.62 \times 10^{-3}.$$

采用拉丁超立方抽样方法在 $[-5, 5] \times [-5, 5]$ 内随机产生 6 个初始样本点 ($M_0 = 6$), 计算其功能函数值, 得到 Ω_0 , 建立初始 Kriging 代理模型 $\hat{G}_0(\mathbf{x})$, 如图 1a 所示. 取 $K = 200, \varepsilon = 0.01$, 随机产生 K 个 $\hat{G}_0(\mathbf{x}) = 0$ 上的点. 取 $e_0 = 0.15, k = 2$, 依据 2.1 节步骤 3 的方法, 对 K 个随机点进行聚类分析, 并将 k 个聚类中心映射到 $\hat{G}_0(\mathbf{x}) = 0$ 上. 图 1 为算法迭代过程中 $G(\mathbf{x}) = 0$ 与 $\hat{G}_t(\mathbf{x}) = 0$ 的对比及每步迭代产生的新样本点. 算法在第 4 次迭代时收敛, 计算得到 $\hat{P}_f = 3.59 \times 10^{-3}$, 图 2 为收敛后 $G(\mathbf{x}) = 0$ 与 $\hat{G}(\mathbf{x}) = 0$ 的对比.

3.2 实例 2

本节选用文献 [2-3] 中的桁架结构作为分析对象, 如图 3 所示. 该结构有 10 个输入随机变量, 分别为 $A_1, A_2, E_1, E_2, P_1, \cdots, P_6$. 其中 A_1, A_2 分别为水平杆及倾斜杆的横截面积; E_1, E_2 为水平杆及倾斜杆的杨氏模量; P_1, \cdots, P_6 为随机载荷. 涉及到的 10 个随机变量的分布类型及参数如表 1 所示.

该结构在 P_1, \cdots, P_6 随机载荷作用下点 E 在竖直方向位移最大, 因此以 E 点位移 ($s(\mathbf{x})$) 作为结构响应, 为与文献 [2] 保持一致, 位移阈值设为 0.14 m, 因此该结构功能函数为

$$G(\mathbf{x}) = 0.14 - |s(\mathbf{x})|.$$

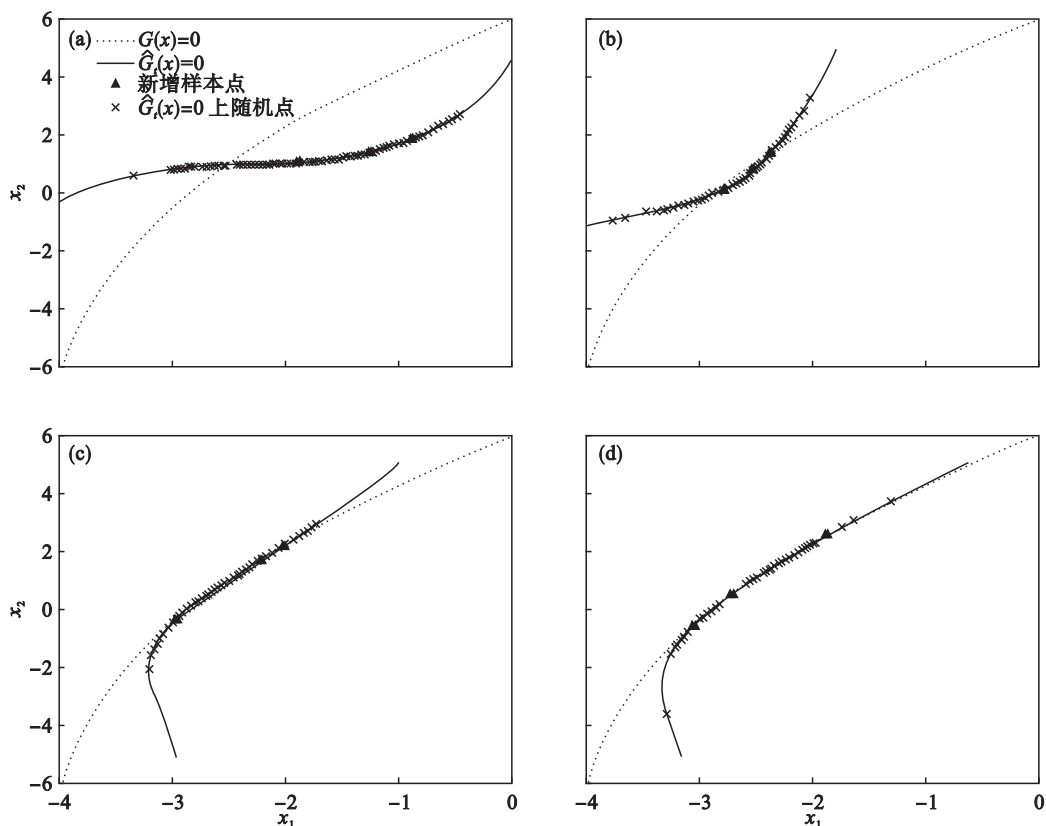


图 1 迭代过程中 $G(x)=0$ 与 $\hat{G}_t(x)=0$ 对比
Fig. 1 Comparison between $G(x)=0$ and $\hat{G}_t(x)=0$ during iteration

(a)—第 1 次迭代；(b)—第 2 次迭代；(c)—第 3 次迭代；(d)—第 4 次迭代。

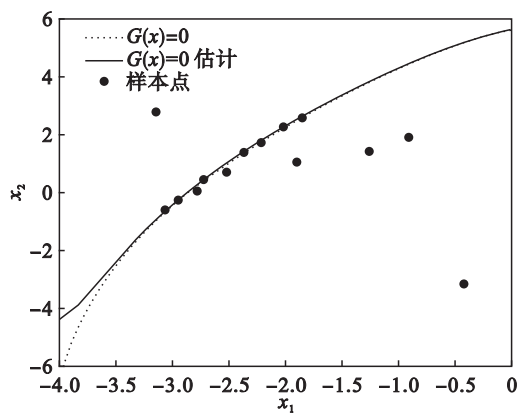


图 2 收敛后 $G(x)=0$ 与 $\hat{G}(x)=0$ 对比
Fig. 2 Comparison between $G(x)=0$ and $\hat{G}(x)=0$ after convergence

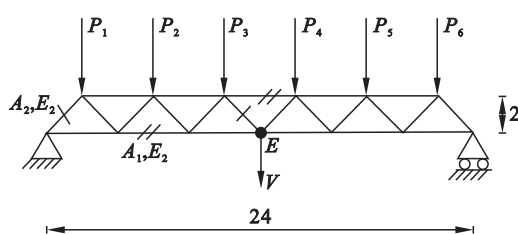


图 3 桁架结构示意图
Fig. 3 Figure of the truss structure

此桁架结构的失效概率约为 3.45×10^{-5} ，该结果来自 500 000 次重要抽样^[2]。

令 $K=3\,000$, $\varepsilon=0.001$, $k=8$, $e=0.15$, 首先将 10 个随机变量变换为标准正态随机变量,再应用第 2 节所提出方法计算该结构的失效概率. 拉丁超立方抽样在 $[-5, 5]^{10}$ 立方体内进行 ($M_0=15$). 图 4 为应用本文所提方法运行 5 次所得的迭代次数与失效概率预测值折线图,由于失效概率预测值数量级变化比较大,纵坐标采用对数形式. 表 2 为本文方法与其他方法精度对比.

表 1 实例 2 随机变量分布类型及参数
Table 1 Distribution patterns and parameters for 2nd example

变量	分布类型	均值	标准差
$P_1 \sim P_6/N$	Gumbel	5×10^4	7.5×10^3
A_1/m^2	对数正态	2×10^{-3}	2×10^{-4}
A_2/m^2	对数正态	1×10^{-3}	1×10^{-4}
E_1/Pa	对数正态	2.1×10^{11}	2.1×10^{10}
E_2/Pa	对数正态	2.1×10^{11}	2.1×10^{10}

3.3 结果分析

实例 1 主要用来具体说明本文所提出的结构可靠性分析方法. 图 1 表明,本文所提出方法能够保证选取的样本点落在“重要区域”,避免了对非重要区域的不必要抽样. 同时,各样本点间能够保

持一定距离,这也在很大程度上提高了算法的效率.实例 2 选用的桁架结构在其他文献^[2-3]中已有提到,通过对比可知,本文所提出方法能够在较少调用结构功能函数情况下得到较高精度失效概率估计值.通过图 4 可知,本文方法收敛速度快且稳定.

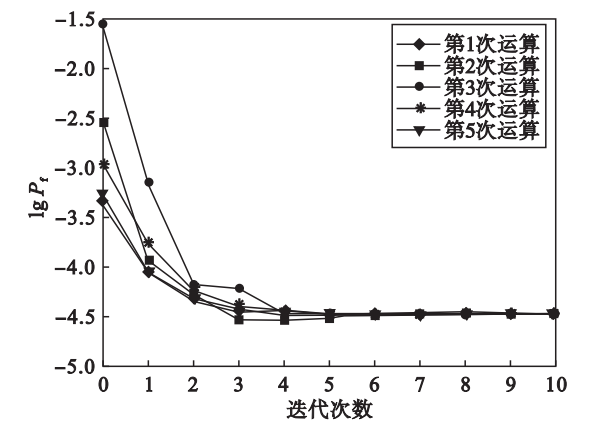


图 4 P_f 收敛折线图

Fig. 4 Broken lines of P_f during convergence

表 2 实例 2 结果对比				
Table 2 Comparison of results for 2 nd example				
来源	$\hat{P}_f \times 10^5$	相对误差/%	M_{call}	
参考值 ^[2]	3.45	—	—	
文献[2]方法	2.35	-31.9	207	
文献[3]方法	3.30	-4.3	142	
本文方法	3.36~3.64	-2.6~5.5	81~89	

4 结 论

- 1) 提出了一种自适应的选点方法,通过实例表明该方法能够保证所选样本点落在对失效概率贡献较大的重要区域,有效减少了对非重要区域的抽样次数,提高各样本点的质量.
- 2) 提出的自适应方法能够保证各样本点间距离不会太小,结合 Kriging 模型,能够更充分利用各点统计信息,提高实效概率计算精度.
- 3) 提出的机械结构可靠性分析方法能够在较少调用结构功能函数情况下实现对单设计点机械结构失效概率的较准确估计.

参考文献:

[1] Alvarez D A, Hurtado J E. An efficient method for the estimation of structural reliability intervals with random sets, dependence modeling and uncertain inputs [J]. *Computers and Structures*, 2014, 142: 54 – 63.

[2] Blatman G, Sudret B. An adaptive algorithm to build up sparse polynomial chaos expansions for stochastic finite element analysis [J]. *Probabilistic Engineering Mechanics* 2010, 25: 183 – 197.

[3] Roussouly N, Petitjean F, Salaun M. A new adaptive response surface method for reliability analysis [J]. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2013, 32: 103 – 115

[4] Echard B, Gayton N, Lemaire M. AK-MCS: an active learning reliability method combining Kriging and monte carlo simulation [J]. *Structural Safety*, 2011, 33: 145 – 154.

[5] 佟操,孙志礼,杨丽,等.一种基于 Kriging 和 Monte Carlo 的主动学习可靠度算法 [J]. *航空学报*, 2015, 36 (9) : 2992 – 3001.

(Tong Cao, Sun Zhi-li, Yang Li, et al. An active learning reliability method based on Kriging and Monte Carlo [J]. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2015, 36 (9) : 2992 – 3001.)

[6] 杨多和,安伟光,李铁钧.基于人工神经网络的结构可靠性分析 [J]. *兵工学报*, 2007, 28 (4) : 495 – 498.

(Yang Duo-he, An Wei-guang, Li Tie-jun. Structural reliability analysis based on artificial neural network [J]. *Acta Armamentarii*, 2007, 28 (4) : 495 – 498.)

[7] Alibrandi U, Alani A M, Ricciardi G. A new sampling strategy for SVM-based response surface for structural reliability analysis [J]. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2015, 41: 1 – 12.

[8] 张琦,李兴斯.基于 Kriging 模型的结构可靠性分析 [J], *计算力学学报*, 2006, 23 (2) : 175 – 179.

(Zhang Qi, Li Xing-si. Analysis of structural reliability based on Kriging model [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2006, 23 (2) : 175 – 179.)

[9] Xiong F F, Liu Y, Xiong Y, et al. A double weighted stochastic response surface method for reliability analysis [J]. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 2012, 26 (8) : 2573 – 2580.

[10] Nguyen X S, Sellier A, Duprat F, et al. Adaptive response surface method based on a double weighted regression technique [J]. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2009, 24: 135 – 143.

[11] Gao Y, Turng L S, Wang X. Adaptive geometry and process optimization for injection molding using the Kriging surrogate model trained by numerical simulation [J]. *Advances in Polymer Technology*, 2008, 27 (1) : 1 – 16.

[12] Shi X, Teixeira A P, Zhang J, et al. Structural reliability analysis based on probabilistic response modelling using the maximum entropy method [J]. *Engineering Structures*, 2014, 70 (9) : 106 – 116.