

硬涂层悬臂层合板固有特性的解析分析

孙 伟, 刘小舟, 王 茁, 朱明伟

(东北大学 机械工程与自动化学院, 辽宁 沈阳 110819)

摘 要: 基于 Ritz 理论, 研究了解析求解硬涂层悬臂层合板固有特性的方法. 用中性面的位移表征硬涂层悬臂层合板的应变能和动能, 然后推导出硬涂层悬臂层合板自由振动的运动方程, 并给出求解该复合结构固有频率、模态振型、模态损耗因子的方法. 以涂覆 NiCoCrAlY + YSZ 硬涂层的 T300/QY8911 型层合板为对象进行了实例研究, 分别采用本文方法和 ANSYS 软件求解该复合结构的固有特性, 通过结果比对证明了本文方法的合理性. 实践表明, 将硬涂层视为复合结构一个特殊的层和采用量纲反变换, 可有效获得具有工程意义的硬涂层层合板固有特性参数.

关 键 词: 硬涂层; 悬臂层合板; 复合结构; 固有特性; 解析分析

中图分类号: TH 113; TB 535

文献标志码: A

文章编号: 1005-3026(2017)08-1123-05

Analytical Analysis of Natural Characteristics for Cantilevered Laminate Plate with Hard-Coating

SUN Wei, LIU Xiao-zhou, WANG Zhuo, ZHU Ming-wei

(School of Mechanical Engineering & Automation, Northeastern University, Shenyang 110819, China.

Corresponding author: SUN Wei, E-mail: weisun@me.neu.edu.cn)

Abstract: Based on the Ritz theory, an analytical method of solving the natural characteristics of hard-coating cantilever laminate plate was developed. The strain and kinetic energy of composite plate was characterized by the displacement of neutral surface, then the free vibration equation was derived and the methods of solving natural frequency, mode shape and modal loss factor were presented. A T300/QY8911 laminate plate coated with NiCoCrAlY + YSZ hard coating was chosen to demonstrate the as-proposed method. The natural characteristics were calculated by the as-proposed method and ANSYS software, respectively. The obtained results were compared with the purpose of assessing the rationality of the method proposed. The practice shows that the natural characteristic parameters of hard-coating cantilever laminate plate with engineering significance can be obtained by treating the hard-coating layer as a special layer and implementing the inverse transformation of dimension.

Key words: hard coating; cantilever laminate plate; composite structure; natural characteristics; analytical analysis

由几种材料组成的层合板复合材料具有诸如高的比强度、比刚度等优越的力学性能, 已在航空、航天领域得到广泛的应用^[1]. 用于航空发动机中的层合复合材料主要是金属基复合材料, 例如钛基复合材料和纤维增强塑料类复合材料^[2], 前者可提高发动机构件的力学性能, 而后者可减少发动机构件的质量. 目前, 上述材料还处于研发和改进中, 其中, 抗高温、抗腐蚀和抗振性(也可

理解为抗高周疲劳)是这类材料应用到发动机中遇到的瓶颈问题.

由金属基、陶瓷基或者两者混合制成的硬涂层, 可作为热障涂层^[3], 也可作为耐磨和抗腐蚀涂层^[4], 近年的研究发现硬涂层还可作为减振涂层^[5]. 因而将硬涂层涂敷在层合板的外表面, 对于解决在航空发动机内工作的层板结构件抗高温、抗腐蚀和抗振性问题, 将是一种非常有前景的

解决方案.

创建硬涂层层合板复合结构的动力学分析模型是这项减振措施研究的前提. 目前关于层合板动力学已经进行了大量的研究, 例如, Chen 等^[1]针对简支正交层合板的固有特性问题, 采用三维弹性理论进行了分析与求解. Khdeir^[6]针对具有对边简支约束的矩形层合板, 采用一阶剪切变形理论对该板的振动响应进行了求解. 关于悬臂状态层合板的精确解很难得到, 一般是利用半解析理论求解. 例如, Narita 等^[7]针对悬臂对称层合板, 采用 Ritz 法进行了计算; Qatu^[8]同样采用 Ritz 法, 针对悬臂矩形和梯形层合板的固有特性进行了分析.

硬涂层减振是一种全新的阻尼减振模式, 包含硬涂层的层合板动力学特性目前还没有人进行专项研究. 特别地, 硬涂层阻尼减振作为一种可以工程化实施的减振措施, 需要获得硬涂层复合结构有量纲的振动特性参数, 这与文献[1, 6-8]中仅用频率系数来表征层合板的振动特性有着明显的不同. 因而如何获得有量纲的硬涂层层合板的振动特性参数将是本文需要解决的一个重要问题. 本文研究了硬涂层悬臂层合板的固有特性(固有频率、模态振型及模态损耗因子)的解析计算方法.

1 硬涂层层合板应变能及动能的求解

获得硬涂层悬臂层合板的应变能及动能是基于 Ritz 法进行振动分析的基础. 如图 1a 所示的硬涂层悬臂层合板结构, 板的长、宽为 a, b , 在层合板的上下表面完全涂敷厚度为 H_c 的硬涂层. 设涂层前层合板为对称层合板, 厚度为 H_s , 则涂层后, 层合板仍具有对称性, 总厚度变为 $H_s + 2H_c$. 设 xOy 坐标面恰好位于硬涂层层合板的中面上. 层合板中任意层的纤维方向角 θ 的定义见图 1b. 如将硬涂层也视为层合板的一个特殊层, 参见图 1c, 从下至上层合板外表面及结合面的厚度方向坐标可用 z_1, z_2, \dots, z_{N+1} 表示, N 为总层数.

在层合板中任取一层, 层号为 $i, i = 1, 2, \dots, N$, 则该层中应力和应变的本构关系可表示为

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}^{(i)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{61} & \bar{Q}_{62} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^{(i)} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}^{(i)}. \quad (1)$$

这里 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ 分别为第 i 层 x, y 平面

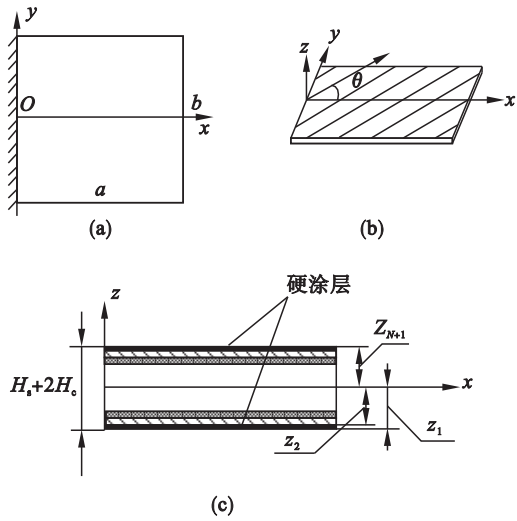


图 1 硬涂层悬臂层合板结构
Fig. 1 Cantilevered laminate plate structure applied with hard coating
(a)—悬臂矩形板; (b)—纤维角; (c)—涂层后.

内的应力和应变; $\bar{Q}_{jl}, j, l = 1, 2, 6$ 为弹性矩阵 $\bar{Q}^{(i)}$ 的元素. 对于硬涂层, 假定为各向同性, 包含 2 个材料参数, 分别为复弹性模量 E_c^* 和泊松比 ν_c , 其中复弹性模量 E_c^* 可表达为

$$E_c^* = E_c (1 + i\eta_c). \quad (2)$$

这里 E_c 为硬涂层的杨氏模量, η_c 为硬涂层的损耗因子. 另外, 对于硬涂层, 计算弹性矩阵时需取纤维方向角 $\theta = 0$.

按照经典薄板理论, 并仅考虑硬涂层层合板的横向运动, 则层合板的应变能 U 可表达为

$$U = \frac{1}{2} \iint \left[D_{11} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right)^2 + D_{22} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right)^2 + 2D_{12} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) + 4D_{66} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right)^2 + 4D_{16} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) + 4D_{26} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) \right] dx dy. \quad (3)$$

这里 w_0 为层合板中面的横向位移; $D_{jl} (j, l = 1, 2, 6)$ 为层合板的弯曲刚度系数, 可组成如下弯曲刚度矩阵:

$$D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ D_{61} & D_{62} & D_{66} \end{bmatrix}. \quad (4)$$

上述弯曲刚度的求解式为

$$D = \sum_{i=1}^N \bar{Q}^{(i)} \left(\frac{z_{i+1}^3 - z_i^3}{3} \right). \quad (5)$$

硬涂层层合板的动能 T 可表示为

$$T = \frac{m}{2} \iint \dot{w}_0^2 dx dy. \quad (6)$$

这里 m 为硬涂层层合板单位面积的质量:

$$m = \sum_{i=1}^N \rho_i (z_{i+1} - z_i). \quad (7)$$

这里 ρ_i 为第 i 层的密度.

硬涂层悬臂层合板的自由振动可假设成谐振形式, 表达为

$$w_0(x, y, t) = W(x, y) \sin \omega_0 t. \quad (8)$$

$W(x, y)$ 为响应幅度, ω_0 为固有频率.

参照式(3)及式(8), 硬涂层层合板的最大应变能可表达为

$$U_{\max} = \frac{1}{2} \iint \boldsymbol{\kappa}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\kappa} dx dy. \quad (9)$$

其中

$$\boldsymbol{\kappa} = [\partial^2 W / \partial x^2, \partial^2 W / \partial y^2, 2\partial^2 W / \partial x \partial y]^T. \quad (10)$$

类似地, 参照式(6)和式(8), 硬涂层层合板的最大动能可表示为

$$T_{\max} = \frac{1}{2} m \omega^2 \iint W^2 dx dy. \quad (11)$$

2 运动方程的建立及固有特性求解

将硬涂层悬臂层合板的响应幅度 $W(x, y)$ 写成量纲为一的多项式组合形式^[9],

$$W(\alpha, \beta) \cong \sum_{m=1}^{\bar{M}} \sum_{n=1}^{\bar{N}} c_{mn} P_m(\alpha) P_n(\beta). \quad (12)$$

这里 $\alpha = x/a, \beta = y/b; \bar{M}$ 和 \bar{N} 为考虑的多项式的数量, 通常取 $\bar{M} = \bar{N}$; c_{mn} 为待定参数; $P_m(\alpha)$ 和 $P_n(\beta)$ 为特征正交多项式, 对应于悬臂状态, 可利用以下迭代公式求解:

$$\begin{aligned} P_1(\alpha) &= \alpha^2, P_1(\beta) = 1, P_2(\zeta) = (\zeta - B_2) P_1(\zeta), \\ P_k(\zeta) &= (\zeta - B_k) P_{k-1}(\zeta) - C_k P_{k-2}(\zeta), \\ \zeta &= \alpha, \beta; k > 2. \end{aligned} \quad (13)$$

其中,

$$\left. \begin{aligned} B_k &= \frac{\int_0^1 [P_{k-1}(\zeta)]^2 \zeta d\zeta}{\int_0^1 [P_{k-1}(\zeta)]^2 d\zeta}, \\ C_k &= \frac{\int_0^1 P_{k-1}(\zeta) P_{k-2}(\zeta) \zeta d\zeta}{\int_0^1 [P_{k-2}(\zeta)]^2 d\zeta}. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

可见在指定 \bar{M} 和 \bar{N} 数量后, 式(12)变为关于 α 和 β 的量纲为一的多项式函数. 如果将 $\alpha = x/a, \beta = y/b$ 再代回式(12), 则横向位移 W 重新变成关于 x, y 的函数. 进一步, 根据 Ritz 法,

$$\frac{\partial (T_{\max} - U_{\max})}{\partial c_{mn}} = 0. \quad (15)$$

$$\bar{m} = 1, 2, \dots, \bar{M}; \bar{n} = 1, 2, \dots, \bar{N}.$$

可得到关于 c_{mn} 的广义特征值问题, 具体如下:

$$(\mathbf{K}_R - \omega_0^2 \mathbf{M}) \mathbf{c} = 0. \quad (16)$$

这里 \mathbf{K}_R 和 \mathbf{M} 分别为复刚度矩阵的实部及质量矩阵, ω_0^2 为特征值, \mathbf{c} 是由待定常数 c_{mn} 组成的向量 (对应于特征向量). 质量矩阵 \mathbf{M} 中第 $(\bar{m} - 1)\bar{N} + \bar{n}$ 行, 第 $l + (j - 1)\bar{N}$ 列的元素的表达式为

$$M[(\bar{m} - 1)\bar{N} + \bar{n}, l + (j - 1)\bar{N}] = m \int_0^a \bar{P}_m(x) \bar{P}_j(x) dx \int_0^b \bar{P}_n(y) \bar{P}_l(y) dy. \quad (17)$$

复刚度矩阵 \mathbf{K}^* 中第 $(\bar{m} - 1)\bar{N} + \bar{n}$ 行, 第 $l + (j - 1)\bar{N}$ 列的元素的表达式为

$$\begin{aligned} K^*[(\bar{m} - 1)\bar{N} + \bar{n}, l + (j - 1)\bar{N}] &= D_{11} \int_0^a \bar{P}_j'(x) \bar{P}_m''(x) dx \int_0^b \bar{P}_l(y) \bar{P}_n(y) dy + \\ D_{22} \int_0^a \bar{P}_j(x) \bar{P}_m(x) dx \int_0^b \bar{P}_l''(y) \bar{P}_n''(y) dy + \\ 4D_{66} \int_0^a \bar{P}_j'(x) \bar{P}_m'(x) dx \int_0^b \bar{P}_l'(y) \bar{P}_n'(y) dy + \\ D_{12} \left[\int_0^a \bar{P}_j''(x) \bar{P}_m(x) dx \int_0^b \bar{P}_l(y) \bar{P}_n''(y) dy + \right. \\ \left. \int_0^a \bar{P}_j(x) \bar{P}_m''(x) dx \int_0^b \bar{P}_l''(y) \bar{P}_n(y) dy \right] + \\ 2D_{16} \left[\int_0^a \bar{P}_j''(x) \bar{P}_m'(x) dx \int_0^b \bar{P}_l(y) \bar{P}_n'(y) dy + \right. \\ \left. \int_0^a \bar{P}_j'(x) \bar{P}_m''(x) dx \int_0^b \bar{P}_l'(y) \bar{P}_n(y) dy \right] + \\ 2D_{26} \left[\int_0^a \bar{P}_j(x) \bar{P}_m'(x) dx \int_0^b \bar{P}_l''(y) \bar{P}_n'(y) dy + \right. \\ \left. \int_0^a \bar{P}_j'(x) \bar{P}_m(x) dx \int_0^b \bar{P}_l'(y) \bar{P}_n''(y) dy \right]. \end{aligned} \quad (18)$$

利用方程(16), 采用数值算法, 可获得硬涂层悬臂层合板的特征值 (固有频率) 和特征量. 将特征向量代入到方程(12)可得到硬涂层层合板的二维模态振型.

为了表征硬涂层的减振能力, 获得涂覆硬涂层后复合结构的模态损耗因子至关重要, 这里按经典的模态应变能法^[10]求解, 求解公式可描述为

$$\eta_r = \frac{\mathbf{c}_r^T \mathbf{K}_I \mathbf{c}_r}{\mathbf{c}_r^T \mathbf{K}_R \mathbf{c}_r}, (r = 1, 2, \dots, \bar{M}). \quad (19)$$

这里 η_r 为第 r 阶模态损耗因子, \mathbf{K}_I 为所获得的复刚度矩阵虚部.

3 实例研究

3.1 问题描述

以涂覆 NiCoCrAlY + YSZ 硬涂层的 T300/QY8911 型层合板为例实践本文所研发的方法. 设涂覆硬涂层后, 整个复合板层数为 6. 其中上下

表面为硬涂层,基体层数为 4,从上到下各层的纤维方向角分别为: $0^{\circ}, 30^{\circ}, -30^{\circ}, -30^{\circ}, 30^{\circ}, 0^{\circ}$. 硬涂层层合板的长和宽均为 100 mm,基体每层厚 0.5 mm,硬涂层每层厚 0.06 mm. 基体及硬涂层材料参数见表 1.

表 1 复合板的材料参数					
Table 1 Material parameters of composite plate					
基体	E_1/GPa	E_2/GPa	G_{12}/GPa	ν_{12}	$\rho/(\text{kg}\cdot\text{m}^{-3})$
	135.0	8.80	4.47	0.33	1 380.0
硬涂层	E_c/GPa		η_c	ν_c	$\rho_c/(\text{kg}\cdot\text{m}^{-3})$
	54.494		0.021 2	0.3	5 600

3.2 硬涂层层合板固有特性的求解

分别采用本文所研发的方法及 ANSYS 软件计算该硬涂层层合板的前 6 阶固有频率、模态振型及模态损耗因子. 层合板有限元模型见图 2.

用 Matlab 编程实现所研发的解析算法. 这里式(15)中考虑的多项式数为 $\bar{M}=\bar{N}=8$. 为了验证收敛性,分别选取了 6 项,7 项,8 项,9 项,10 项. 实践表明,当项数取为 8 的时候,结果收敛,保证了计算精度和效率. 利用式(16)及式(12)可分别获得硬涂层层合板固有频率和模态振型,利用式(19)可获得复合结构的模态损耗因子. 相应的计算结果见表 2、表 3 和图 3.

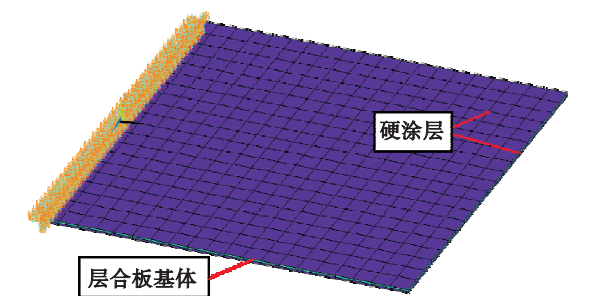


图 2 硬涂层悬臂层合板有限元模型
Fig. 2 Finite element model of hard-coating cantilevered laminate plate

表 2 采用解析法和基于 ANSYS 软件获得的硬涂层悬臂层合板的固有频率
Table 2 Natural frequencies of hard-coating cantilevered laminate plate obtained by analytical method and ANSYS

阶次	固有频率/Hz		$ \omega_A - \omega_F $
	解析计算(ω_A)	ANSYS(ω_F)	
1	214.6	212.5	0.99 %
2	504.2	495.1	1.84 %
3	1 137.2	1 089.3	4.40 %
4	1 401.6	1 373.8	2.02 %
5	1 855.9	1 799.6	3.13 %
6	2 514.8	2 396.5	4.94 %

在基于 ANSYS 软件的求解中,采用

SHELL281 单元来模拟硬涂层层合板. 有限元模型(见图 2)共有 1 200 个单元,1 281 个节点. 在该有限元模型中共用了三层单元,其中上下两层单元为硬涂层,中间单元为层合板基体. 利用 section/shell 命令设置各层几何参数,利用 nummgr 和 numcmp 命令将上中下层对应的各个节点耦合在一起. 针对所创建的有限元模型采用分块兰索斯法计算固有频率和模态振型,同样采用经典的模态应变能法计算损耗因子,将获得的结果同样列在表 2、表 3 和图 3 中.

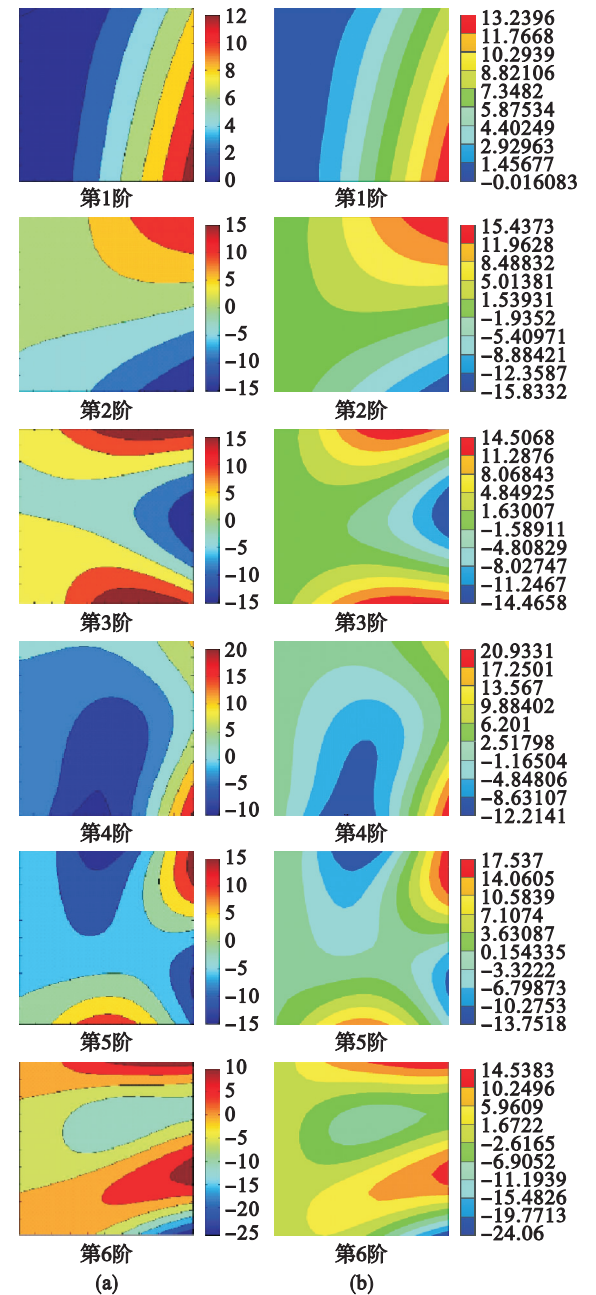


图 3 采用解析法和基于 ANSYS 软件获得的硬涂层悬臂层合板模态振型
Fig. 3 Mode shapes of hard-coating cantilevered laminate plate obtained by analytical method and ANSYS
(a)—解析法; (b)—基于 ANSYS 软件.

表 3 采用解析法和基于 ANSYS 软件获得的硬涂层悬臂层合板的模态损耗因子

Table 3 Modal loss factors of hard-coating cantilevered laminate plate obtained by analytical method and ANSYS

阶次	模态损耗因子 $\times 10^{-4}$		$\frac{ \eta_A - \eta_F }{\eta_F}$
	解析计算(η_A)	ANSYS(η_F)	
1	37	36	2.78 %
2	43	41	4.88 %
3	63	61	3.28 %
4	42	40	5.00 %
5	44	43	2.33 %
6	77	74	3.90 %

比较解析法和基于 ANSYS 软件计算获得的硬涂层层合板固有特性可以看出,固有频率计算的最大偏差为 4.94 % ,模态损耗因子计算的最大偏差为 5 % ,模态振型基本一致;证明了本文研发的用于获得硬涂层层合板固有特性的解析算法的合理性.

4 结 论

- 1) 将硬涂层视为层合板特殊的层是一种有效分析硬涂层层合板结构振动特性的方法. 在具体实施中,只需将硬涂层的材料参数变为各向同性及复模量,即可按照统一的层合板理论获得该复合结构的固有特性.
- 2) 先将硬涂层悬臂层合板的响应幅度用量纲为一的多项式表达,然后通过量纲反变换并代入拉格朗日方程则可获得有量纲的特征方程,进而实现有量纲的固有频率求解.
- 3) 将解析计算获得的硬涂层层合板固有特性与基于 ANSYS 软件获得的结果进行比较,发现:固有频率和模态损耗因子最大偏差小于 5% ,两者模态振型基本一致,充分说明了本文解析方法的合理性.

参考文献:

[1] Chen W Q,Lü C F. 3D free vibration analysis of cross-ply laminated plates with one pair of opposite edges simply supported[J]. *Composite Structures*,2005,69(1):77-87.

[2] Leyens C,Kocian F,Hausmann J,et al. Materials and design concepts for high performance compressor components[J]. *Aerospace Science and Technology*,2003,7(3):201-210.

[3] Limarga A M,Duong T L,Gregori G,et al. High-temperature vibration damping of thermal barrier coating materials[J]. *Surface and Coatings Technology*,2007,202(4):693-697.

[4] Grzesik W,Zalisz Z,Nieslony P. Friction and wear testing of multilayer coatings on carbide substrates for dry machining applications[J]. *Surface and Coatings Technology*,2002,155(1):37-45.

[5] Blackwell C,Palazotto A,George T J,et al. The evaluation of the damping characteristics of a hard coating on titanium[J]. *Shock and Vibration*,2007,14(1):37-51.

[6] Khdeir A A. Forced vibration of antisymmetric angle-ply laminated plates with various boundary conditions [J]. *Journal of Sound and Vibration*,1995,188(2):257-267.

[7] Narita Y, Leissa A W. Frequencies and mode shapes of cantilevered laminated composite plates[J]. *Journal of Sound and Vibration*,1992,154(1):161-172.

[8] Qatu M S. Natural frequencies for cantilevered laminated composite right triangular and trapezoidal plates [J]. *Composites Science and Technology*, 1994, 51 (3): 441-449.

[9] Mahi A, Tounsi A. A new hyperbolic shear deformation theory for bending and free vibration analysis of isotropic, functionally graded,sandwich and laminated composite plates [J]. *Applied Mathematical Modeling*, 2015, 39 (9): 2489-2508.

[10] 孙伟,郝春磊,张洪浩,等. 基于修正模态应变能法的硬涂层薄板阻尼性能预估[J]. *东北大学学报(自然科学版)*, 2014,35(4):551-554.

(Sun Wei, Hao Chun-lei, Zhang Hong-hao, et al. Modified modal strain energy method used for predicting damping characteristics of hard-coating thin plate [J]. *Journal of Northeastern University (Natural Science)*, 2014, 35 (4): 551-554.)