

基于均匀圆阵的稳健迭代波束形成算法

宋 昕¹, 汪晋宽², 刘文敏², 高 静¹
(1. 东北大学秦皇岛分校, 计算机与通信工程学院, 河北 秦皇岛 066004; 2. 东北大学 计算机科学与工程学院, 辽宁 沈阳 110169)

摘 要: 针对导向矢量偏差和转换误差导致传统波束形成器的性能下降及均匀圆阵不具有范德蒙结构的问题, 提出了一种基于均匀圆阵的稳健迭代波束形成算法. 该算法利用相位模式转换技术推导出虚拟自相关矩阵, 并把导向矢量限定于确定的椭圆集合中. 从最差性能优化的设计思想出发, 构造基于均匀圆阵的二阶凸规划的代价函数, 再利用拉格朗日乘子法求得权重矢量的闭式解表达式且能够准确求出优化解中的对角载入值. 仿真结果表明: 所提算法能够提高系统的稳健性, 改善了阵列的输出性能.

关 键 词: 稳健自适应波束形成; 均匀圆阵; 相位模式转换; 信号导向矢量偏差

中图分类号: TN 911.7 **文献标志码:** A **文章编号:** 1005-3026(2017)10-1369-04

Robust Iterative Beamforming Algorithm Based on Uniform Circular Array

SONG Xin¹, WANG Jin-kuan², LIU Wen-min², GAO Jing¹
(1. School of Computer and Communication Engineering, Northeastern University at Qinhuangdao, Qinhuangdao 066004, China; 2. School of Computer Science & Engineering, Northeastern University, Shenyang 110169, China. Corresponding author: SONG Xin, professor, E-mail: sxin78916@neuq.edu.cn)

Abstract: The performances of traditional beamformers degrade severely in the presence of signal steering vector mismatches and transformation errors, and the uniform circular array (UCA) does not have the Vandermonde structure, a novel robust iterative beamforming algorithm based on the uniform circular array was proposed. Using phase-mode transformation technique, the virtual correlation matrix was obtained and the steering vector was belong to the certain ellipsoid set. The worst-case performance optimization was used and the cost function of second convex programming was constructed based on UCA. The weight vector has a closed-form solution by the Lagrange multiplier method, in which the diagonal loading factor was derived exactly. The simulation results showed that the proposed algorithm can provide efficient robustness and improve the array output performance.

Key words: robust adaptive beamforming; uniform circular array; phase-mode transformation; signal steering vector mismatches

作为阵列信号处理的一项关键技术, 自适应波束形成已在无线通信、雷达和自适应信道均衡等诸多领域获得广泛应用^[1-3]. 最小方差无畸变响应(MVDR)算法具有稳定性高、结构简单、易于实现等优点, 而且能够突破瑞利限的限制. 然而, 当假定的和真实的导向矢量存在偏差, 将会导致传统MVDR算法的性能急剧下降. 因此, 提高波束形成器的稳健性成为了研究者们关注的热点. 近年来, 为了解决传统波束形成算法存在的问题, 学者们提出了一些有效的稳健波束形成算法^[4-6], 其中大多数是以均匀线阵为基础展开研究的, 理论上比较严格, 但实际应用中通常是基于均匀圆阵(UCA)的, 且UCA的阵列流形不具备范德蒙结构, 致使那些自适应算法不能直接应用于UCA中. 文献[7]所提出的算法虽然采用了相位模式转化的方法, 但权重矢量的求解是利用了

Matlab 软件并没有给出闭式解表达式. 为克服以上所述问题,提出了一种基于均匀圆阵的稳健迭代自适应算法. 采用相位模式转换法与拉格朗日乘子法相结合的方式,对信号导向矢量进行优化求解,更新对角载入值,最终推导出权重矢量的闭式解表达式.

1 基于均匀圆阵的相位模式转换

假设均匀圆阵是由 M 个阵元组成,则自适应阵列接收的数据矢量在 k 时刻的表达式为

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{s}(k) + \mathbf{i}(k) + \mathbf{n}(k) = s_0(k)\mathbf{a} + \mathbf{i}(k) + \mathbf{n}(k). \quad (1)$$

均匀圆阵的导向矢量为

$$\mathbf{a}(\theta_i) = [e^{jqrcos(\theta_i)}, \dots, e^{jqrcos(\theta_i - (2\pi(M-1)/m))}]^T. \quad (2)$$

式中: q 为接收信号的波数; r 为阵列半径.

采用相位模式转换将均匀圆阵变换为虚拟的均匀线阵,使其具有范德蒙结构.

相位模式转换矩阵定义为^[7]

$$\Psi_0 = PT. \quad (3)$$

将转换矩阵 Ψ_0 左乘导向矢量 $\mathbf{a}(\theta_i)$,得到新的导向矢量:

$$\hat{\mathbf{a}}(\theta_i) = \Psi_0 \mathbf{a}(\theta_i) = [e^{-j\theta_i}, e^{-j(h-1)\theta_i}, \dots, e^{j(h-1)\theta_i}, e^{j\theta_i}]^T. \quad (4)$$

而在实际应用中,考虑转换矩阵 Ψ_0 存在误差,则实际的转换矩阵为

$$\Psi = \Psi_0 + \Delta\Psi. \quad (5)$$

式中, $\Delta\Psi = \Delta PT$ 是由频率偏差引起的误差矩阵.

传统最小方差无畸变响应 MVDR 算法的优化函数为

$$\min_{\mathbf{w}} \mathbf{w}^H \mathbf{R}_{i+n} \mathbf{w} \quad \text{subject to } \mathbf{w}^H \mathbf{a} = 1. \quad (6)$$

式中, $\mathbf{R}_{i+n} = E\{(\mathbf{i}(k) + \mathbf{n}(k))(\mathbf{i}(k) + \mathbf{n}(k))^H\}$ 是干扰加噪声的相关矩阵. 推导出最优权重矢量为

$$\mathbf{w}_{\text{opt}} = \frac{\mathbf{R}_{i+n}^{-1} \mathbf{a}}{\mathbf{a}^H \mathbf{R}_{i+n}^{-1} \mathbf{a}}. \quad (7)$$

在实际通信环境中,传统最小方差无畸变响应算法的输出性能受限于式(6)的约束条件,产生信号相消现象. 另外,基于线性阵列 ULA 的 MVDR 算法不能直接用于 UCA 中,需通过预处理进行适当变换.

2 基于均匀圆阵的稳健迭代自适应波束形成算法

2.1 权重向量的求解

在实际中往往把导向矢量偏差 $\Delta\mathbf{a}$ 的模值上限假定为 $\xi > 0$,同时考虑其他偏差情况(如采样数少、数据非平稳性等). 从而基于均匀线阵的稳健算法的代价函数为^[8]

$$\min_{\mathbf{w}} \mathbf{w}^H \hat{\mathbf{R}}_{xx} \mathbf{w} \quad \text{subject to } |\mathbf{w}^H \mathbf{a} - 1|^2 = \xi^2 \mathbf{w}^H \mathbf{w}. \quad (8)$$

式中, $\hat{\mathbf{R}}_{xx} = \mathbf{R}_{xx} + r\mathbf{I}$.

基于均匀圆阵的代价函数(8)可转换为

$$\min_{\hat{\mathbf{w}}} \hat{\mathbf{w}}^H \hat{\mathbf{G}} \hat{\mathbf{w}} \quad \text{subject to } |\hat{\mathbf{w}}^H \mathbf{b} - 1|^2 = \xi^2 \hat{\mathbf{w}}^H \hat{\mathbf{w}}. \quad (9)$$

式中: $\mathbf{b} = \Delta\Psi\mathbf{a} + \Psi_0\mathbf{a}$;

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{G}} &= (\Psi_0 + \Delta\Psi) \hat{\mathbf{R}}_{xx} (\Psi_0 + \Delta\Psi)^H = \\ &\Delta\Psi \hat{\mathbf{R}}_{xx} \Delta\Psi^H + \Delta\Psi \hat{\mathbf{R}}_{xx} \Psi_0^H + \Psi_0 \hat{\mathbf{R}}_{xx} \Delta\Psi^H + \\ &\Psi_0 \hat{\mathbf{R}}_{xx} \Psi_0^H. \end{aligned} \quad (10)$$

从式(10)可以看出, $\hat{\mathbf{G}}$ 属于确切的椭圆集合^[7].

对式(9)利用拉格朗日乘子法得到函数:

$$\begin{aligned} H(\hat{\mathbf{w}}, \varphi) &= \hat{\mathbf{w}}^H \hat{\mathbf{G}} \hat{\mathbf{w}} + \varphi(\xi^2 \hat{\mathbf{w}}^H \hat{\mathbf{w}} - \\ &\hat{\mathbf{w}}^H \mathbf{b} \mathbf{b}^H \hat{\mathbf{w}} + \hat{\mathbf{w}}^H \mathbf{b} + \mathbf{b}^H \hat{\mathbf{w}} - 1). \end{aligned} \quad (11)$$

由此,可以得到权重矢量的更新公式:

$$\hat{\mathbf{w}}(k+1) = \hat{\mathbf{w}}(k) - \mu[\mathbf{C}\hat{\mathbf{w}}(k) + \varphi\mathbf{b}]. \quad (12)$$

式中: $\mathbf{C} = \hat{\mathbf{G}} + \varphi\xi^2\mathbf{I} - \varphi\mathbf{b}\mathbf{b}^H$; μ 为迭代步长,其取值为^[9]

$$\mu = \frac{\sigma \nabla^H(k) \nabla(k)}{\nabla^H(k) \mathbf{G} \nabla(k)}, \quad (13)$$

σ 为可调因子^[10].

令 Lagrange 函数 $H(\hat{\mathbf{w}}, \varphi)$ 的梯度矢量为零,推导出最优权重矢量为

$$\hat{\mathbf{w}}_{\text{opt}} = \nu(\varphi) (\hat{\mathbf{G}} + \varphi\xi^2\mathbf{I})^{-1} \mathbf{b}. \quad (14)$$

式中, $\nu(\varphi) = \frac{\varphi}{\mathbf{b}^H (\hat{\mathbf{G}} + \varphi\xi^2\mathbf{I})^{-1} \mathbf{b} - 1}$.

显而易见,所提稳健迭代自适应算法属于对角载入的范畴,其载入因子为 $\varphi\xi^2$.

式(9)的约束条件为

$$\hat{\mathbf{w}}^H \mathbf{b} \geq \xi \|\hat{\mathbf{w}}\| + 1. \quad (15)$$

把式(12)代入式(15)中,可得

$$[(\mathbf{I} - \mu\mathbf{C}) \hat{\mathbf{w}}(k) + \varphi\mathbf{b}]^H \mathbf{b} \geq \xi \|(\mathbf{I} - \mu\mathbf{C}) \hat{\mathbf{w}}(k) +$$

$$\varphi \mathbf{b} \parallel +1. \quad (16)$$

Lagrange 乘子的计算式为

$$\varphi = \frac{1}{2\mu^2 [\mathbf{F}^H(k)(\hat{\xi}^2 \mathbf{I} - \mathbf{b}\mathbf{b}^H)\mathbf{F}(k)]} (\boldsymbol{\zeta}(k) + \boldsymbol{\rho}(k)). \quad (17)$$

式中：

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(k) &= (\hat{\xi}^2 \mathbf{I} - \mathbf{b}\mathbf{b}^H) \hat{\mathbf{w}}(k) + \mathbf{b}; \\ \mathbf{q}(k) &= [\mathbf{I} - \mu \mathbf{G}] \hat{\mathbf{w}}(k); \\ \boldsymbol{\zeta}(k) &= \mu [\mathbf{q}^H(k)(\hat{\xi}^2 \mathbf{I} - \mathbf{b}\mathbf{b}^H)\mathbf{F}(k) + \mathbf{F}^H(k)(\hat{\xi}^2 \mathbf{I} - \mathbf{b}\mathbf{b}^H)\mathbf{q}(k) + \mathbf{F}^H(k)\mathbf{b} + \mathbf{b}^H\mathbf{F}(k)]; \\ \lambda(k) &= \mathbf{q}^H(k)(\hat{\xi}^2 \mathbf{I} - \mathbf{b}\mathbf{b}^H)\mathbf{q}(k) + \mathbf{q}^H(k)\mathbf{b} + \mathbf{b}^H\mathbf{q}(k); \\ \boldsymbol{\rho}^H(k)\boldsymbol{\rho}(k) &= \boldsymbol{\zeta}^H(k)\boldsymbol{\zeta}(k) - 4\mu^2 \mathbf{F}^H(k)(\hat{\xi}^2 \mathbf{I} - \mathbf{b}\mathbf{b}^H)\mathbf{F}(k)(\lambda(k) - 1). \end{aligned} \quad (18)$$

2.2 步长因子的选取

式(12)的权重矢量可重新整理为

$$\hat{\mathbf{w}}(k+1) = [\mathbf{I} - \mu \mathbf{C}] \hat{\mathbf{w}}(k) - \mu \varphi \mathbf{b}. \quad (19)$$

在式(19)的两边左乘 \mathbf{C} 的特征矢量 $\boldsymbol{\Sigma}^H$ ：

$$\boldsymbol{\Sigma}^H \hat{\mathbf{w}}(k+1) = [\mathbf{I} - \mu \mathbf{I}'] \boldsymbol{\Sigma}^H \hat{\mathbf{w}}(k) - \mu \varphi \boldsymbol{\Sigma}^H \mathbf{b}. \quad (20)$$

由式(20)可知,所提稳健自适应算法的性能收敛只需满足

$$|1 - \mu \omega_i| < 1. \quad (21)$$

由式(21)可得

$$0 < \mu < \frac{2}{\tau_{\max}}. \quad (22)$$

式中, $\tau_{\max} < \sum_{i=1}^M \tau_i = \text{tr}[\mathbf{C}]$ 为最大特征值.

2.3 信号偏差约束参数 ξ 的选取

信号偏差的优化函数为

$$\min |\mathbf{w}^H \mathbf{a} + \mathbf{w}^H \Delta \mathbf{a}| \geq 1 \text{ subject to } \|\Delta \mathbf{a}\| \leq \xi. \quad (23)$$

利用柯西-施瓦茨不等式,由式(23)可得

$$|\mathbf{w}^H \mathbf{a} + \mathbf{w}^H \Delta \mathbf{a}| \geq |\mathbf{w}^H \mathbf{a}| - |\mathbf{w}^H \Delta \mathbf{a}| \geq |\mathbf{w}^H \mathbf{a}| - \xi \|\mathbf{w}\|. \quad (24)$$

由式(24)可知,只有满足 $|\mathbf{w}^H \mathbf{a}| > \xi \|\mathbf{w}\|$,白色噪声增益才是足够的.从而获得约束参数 ξ 的取值范围为

$$0 < \xi < \frac{|\mathbf{w}^H \mathbf{a}|}{\|\mathbf{w}\|}. \quad (25)$$

根据式(8)得到权重矢量的最优解为

$$\mathbf{w}_{\text{opt}} = \psi \{ \mathbf{R}_{xx}^{-1} (\mathbf{a}\mathbf{a}^H - \xi \mathbf{I}) \}. \quad (26)$$

由式(26)可知,为了保证 $(\mathbf{a}\mathbf{a}^H - \xi \mathbf{I})$ 为正定的,需要约束参数 ξ 满足

$$\xi < \tau(\mathbf{R}_s). \quad (27)$$

式中, $\tau(\mathbf{R}_s)$ 为 \mathbf{R}_s 的最大特征值.

综合式(26)和(27),得出参数 ξ 的范围为

$$0 < \xi < \min\left(\frac{|\mathbf{w}^H \mathbf{a}|}{\|\mathbf{w}\|}, \tau(\mathbf{R}_s)\right). \quad (28)$$

3 仿真实验结果及分析

假设由 $M=13$ 个阵元组成均匀圆阵,考虑 2 个干扰信号的波达方向分别为 -50° 和 50° ,1 个期望信号的波达方向为 0° ,而信号的实际波达方向为 3° ,即误差为 3° . 参数 $\hat{\xi}=3.7, r=10$. 仿真实验结果如图 1、图 2 所示.

实验 1 传统 MVDR 算法和本文算法在不同采样数下的性能比较.

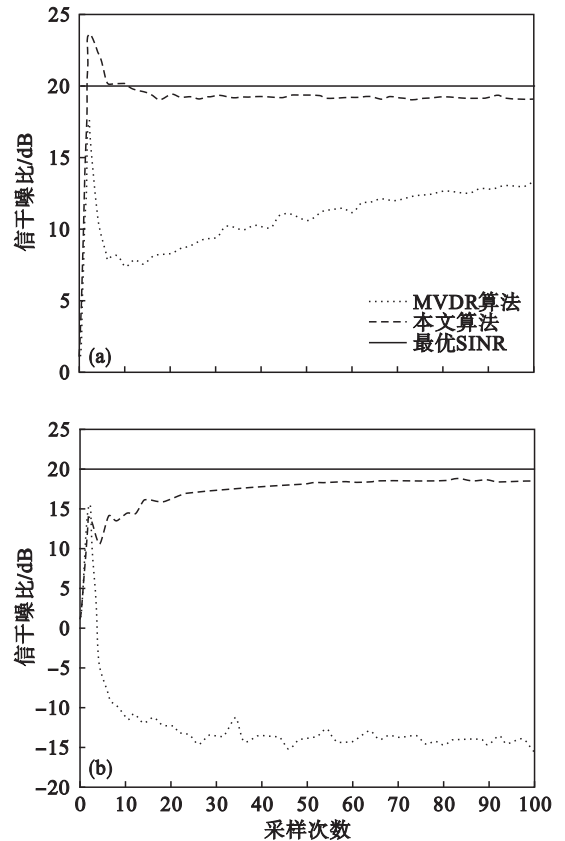


图 1 阵列输出的信干噪比

Fig. 1 Array output SINR

(a) 无偏差; (b) 3° 偏差.

设条件为信噪比 $\text{SNR} = 10 \text{ dB}$. 在图 1a 中,当采样数大于 10 时, MVDR 算法的性能随着采样数的增加而增加;在采样数较小时,本文算法的输出性能更优. 在图 1b 中,本文算法的输出性能比传统 MVDR 算法高出约 33 dB,更趋近于最优值.

实验 2 5 种算法在不同频率下的性能比较

在推导最优权重矢量时,选定的中心频率 $f_c=10.5\text{ kHz}$. 图 2 表明,在频率范围 $[10\text{ kHz}, 11\text{ kHz}]$ 内,传统 MVDR 算法输出的信干噪比性能最差,RAB-WC 算法的性能有所提高,RB 算法和本文算法的性能比较接近.但本文算法无论是在无偏差还是有偏差的情况下,输出的信干噪比性能都最优.

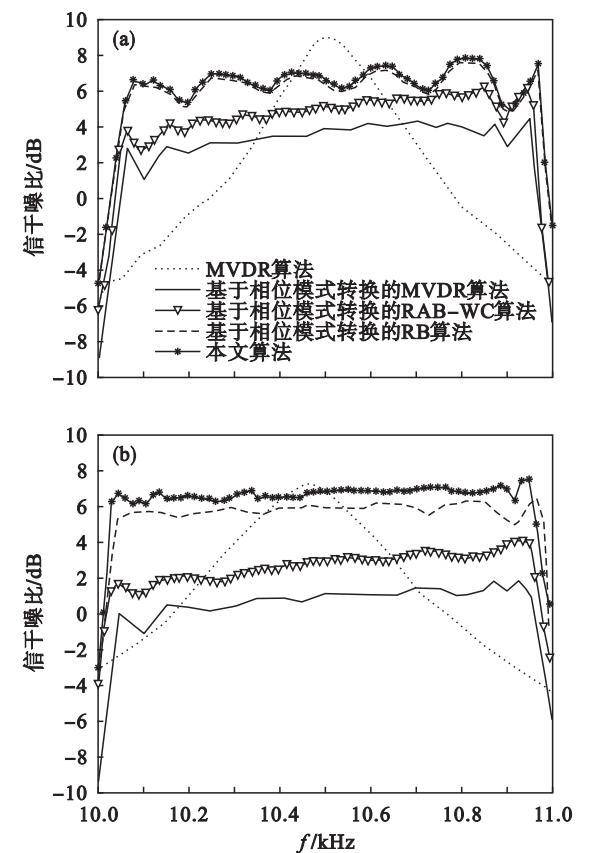


图 2 阵列输出的信干噪比
Fig. 2 Array output SINR
(a)—无偏差; (b)—3°偏差.

4 结 论

为了降低信号导向矢量偏差和相位模式转化误差对输出性能的影响,提出了一种新的基于均匀圆阵的稳健迭代自适应波束形成算法.该算法通过最差性能优化法和拉格朗日乘子法推导出权重矢量的闭式解表达式,给出了求解最优对角载

入值的方法,解决了载入值估计的难题.该算法能够对波束主瓣区域内信号的畸变进行有效控制,具有快速的收敛性,系统的稳健性得以提高.仿真实验结果表明,本文算法能够适用于均匀圆阵,并且改善了输出的信干噪比性能.

参考文献:

[1] Jiang X, Zeng W J, Yasotharan A, et al. Quadratically constrained minimum dispersion beamforming via gradient projection [J]. *IEEE Transaction on Signal Processing*, 2015, 63(1):192–205.

[2] Zhang W, Wang J, Wu S L. Adaptive multiple-input multiple-output radar beamforming based on direct data domain approach [J]. *IET Radar, Sonar & Navigation*, 2014, 8(6):632–638.

[3] Somasundaram S D, Parsons N H, Li P, et al. Reduced-dimension robust Capon beamforming using Krylov-subspace techniques [J]. *IEEE Transaction on Aerospace & Electronic Systems*, 2015, 51(1):270–289.

[4] Huang L, Zhang J, Xu X, et al. Robust adaptive beamforming with a novel interference-plus-noise covariance matrix reconstruction [J]. *IEEE Transaction on Signal Processing*, 2015, 63(7):1643–1650.

[5] Jiang X, Zeng W J, Yasotharan A, et al. Robust beamforming by linear programming [J]. *IEEE Transaction on Signal Processing*, 2014, 62(7):1834–1849.

[6] Huang L, Zhang J, Xu X, et al. Robust adaptive beamforming with a novel interference-plus-noise covariance matrix reconstruction method [J]. *IEEE Transaction on Signal Processing*, 2015, 63(7):1643–1650.

[7] Mohsen A, Mahmood K, Zakiyeh A. Robust beamforming in circular arrays using phase-mode transformation [J]. *IET Signal Processing*, 2013, 7(8):693–703.

[8] Shahbazpanahi S, Gershman A B, Luo Z Q, et al. Robust adaptive beamforming for general-rank signal models [J]. *IEEE Transaction on Signal Processing*, 2003, 51(9):2257–2269.

[9] Elnashar A. Efficient implementation of robust adaptive beamforming based on worst-case performance optimization [J]. *IET Signal Processing*, 2008, 2(12):381–393.

[10] Elnashar A, Elnoubi S, El-Makati H. Performance analysis of blind adaptive MOE multiuser receivers using inverse QRD-RLS algorithm [J]. *IEEE Transaction on Circuits Systems*, 2008, 55(1):398–411.