

# 基于 SORA 的多学科协同优化可靠性优化方法

李海燕<sup>1</sup>, 井元伟<sup>2</sup>

(1. 东北大学 计算机科学与工程学院, 辽宁 沈阳 110169; 2. 东北大学 信息科学与工程学院, 辽宁 沈阳 110819)

**摘 要:** 针对多学科可靠性优化问题计算过程具有复杂性的特点,从简化计算复杂性的角度,研究协同优化可靠性优化方法. 鉴于序列优化与可靠性评估 (SORA) 方法采用可靠性分析与优化过程相分离的方式,提出了基于 SORA 的协同优化可靠性优化方法. 该方法将具有三层嵌套循环的协同优化可靠性优化问题,转变为顺序地执行确定性协同优化和可靠性分析过程. 因而,该可靠性优化模型维持了协同优化的两级优化结构,降低了计算复杂性. 最后,利用工程算例对该方法的有效性进行了验证.

**关 键 词:** 多学科设计优化;协同优化;序列优化与可靠性评估;可靠性优化;可靠性分析

**中图分类号:** TP 391.9      **文献标志码:** A      **文章编号:** 1005-3026(2018)01-0001-05

## SORA-Based Reliability Optimization Method for Multidisciplinary Collaborative Optimization

LI Hai-yan<sup>1</sup>, JING Yuan-wei<sup>2</sup>

(1. School of Computer Science & Engineering, Northeastern University, Shenyang 110169, China; 2. School of Information Science & Engineering, Northeastern University, Shenyang 110819, China. Corresponding author: LI Hai-yan, E-mail: lihaiyan@mail.neu.edu.cn)

**Abstract:** Aimed at the computation complexity of multidisciplinary reliability optimization, reliability-based collaborative optimization method was studied to simplify the computation process. Considering that the sequential optimization and reliability assessment (SORA) carries out reliability analysis and deterministic optimization with the sequential cycle mode, the SORA-based collaborative optimization was presented. The presented method converts the 3-layer nested reliability optimization structure into sequential deterministic collaborative optimization and reliability analysis, which maintains the two-level structure of collaborative optimization and simplifies the computation process. At last, an engineering example is used to demonstrate the effectiveness of the presented method.

**Key words:** multidisciplinary design optimization; collaborative optimization; sequential optimization and reliability assessment; reliability optimization; reliability analysis

复杂产品的设计过程往往涉及多个学科知识,为解决该问题而产生的多学科设计优化 (multidisciplinary design optimization, MDO) 方法,受到了航空航天等领域众多学者的青睐. 针对多学科可靠性设计优化 (reliability based MDO, RBMDO) 问题,在关于单级 MDO 算法的可靠性优化方面, Du 等<sup>[1-2]</sup> 和 Agarwal 等<sup>[3]</sup> 均做出了一定贡献. 关于多级 MDO 算法的可靠性优化问题的相关研究较少,在 Padmanabhan 等<sup>[4]</sup> 所给出的

RBMDO 问题研究中,采用并行子空间方法求解最可能点 (most probable point, MPP). Meng 等<sup>[5]</sup> 采用一阶马鞍点近似方法求解协同优化 (collaborative optimization, CO) 可靠性优化问题,该方法需在马鞍点对可靠性约束进行线性化处理,不适合处理非线性化程度高和离散性问题. 正如 Park 等<sup>[6]</sup> 所描述,对于 MDO 问题中的可靠性优化问题,相比于其他 MDO 算法,CO 算法具有明显的优越性.

将可靠性分析与优化过程相分离,是简化计算过程和提高计算效率的有效方式.在 Sues 等<sup>[7]</sup>所给出的 RBMDO 框架中,采用了将可靠性分析从 MDO 优化中分离出来的策略,将最可能失效点的计算移出优化过程,并根据每次优化结果更新最可能失效点. AHN 等<sup>[8]</sup>则提出将可靠性分析从多学科分析中解耦出来,采用顺序循环的方式分别进行可靠性分析和多学科分析. Du 等<sup>[1]</sup>对序列解耦执行策略做了进一步的完善,提出了序列优化与可靠性评估(sequential optimization and reliability assessment, SORA)方法, SORA 采用序列的方式,分别执行可靠性分析和优化过程,从而将可靠性分析从优化过程中分离出来,避免了传统的两重循环方式.同时, Du 等<sup>[2]</sup>将 SORA 方法应用于单学科可行方法和多学科可行方法两种单级 MDO 方法,将可靠性分析与单级 MDO 算法的优化过程分割开来,显著地降低了 RBMDO 的计算复杂性.由于 SORA 方法具有形式简洁和计算效率较高的特点,得到了学者们的青睐.如 Zhang 等<sup>[9]</sup>分别针对离散连续混合设计变量以及随机和认知混合不确定性因素,基于 SORA 方法,在单级 MDO 算法中开展 RBMDO 问题的研究.

相关研究者在通过分离可靠性分析和优化过程来提高 RBMDO 计算效率方面,已做出了一定的工作,尤其以 Du 等<sup>[1-2]</sup>所提出的 SORA 方法具有代表性.为了提高 CO 可靠性优化方法的计算效率,本文研究基于 SORA 方法的 CO 可靠性优化方法.

## 1 可靠性分析

在可靠性优化过程中,对于每个优化点,在分析可靠性约束  $g(\mathbf{z})$  的可靠性时,均需计算性能函数  $g(\mathbf{z})$  的概率密度  $f_z(\mathbf{z})$  的积分:

$$P\{g(\mathbf{z}) \leq 0\} = \int_{g(\mathbf{z}) \leq 0} f_z(\mathbf{z}) d\mathbf{z}. \quad (1)$$

式(1)的积分计算过程复杂,计算效率较低.为此, Tu 等<sup>[10]</sup>提出了性能度量法(performance measure approach, PMA),在 PMA 方法中,式(1)所表示的可靠性约束计算问题可转化为如下各式的表述形式:

$$P\{g(\mathbf{z}) \leq g^R\} = R, \quad (2)$$

$$g^R \leq 0, \quad (3)$$

$$R = \Phi(\beta). \quad (4)$$

其中:  $R$  为设计所需达到的可靠性要求;  $\beta$  表示可靠性指标;  $g^R$  的物理意义为可靠性约束  $g(\mathbf{z})$  的

概率分布中  $1 - \Phi(-\beta)$  的上分位点,  $g^R$  的值可通过逆 MPP 方法求出,具体过程如下.

首先,需将随机量转换到标准正态空间.对于服从正态分布的随机变量  $z_i \sim N(\mu_i, \sigma_i)$ , 转换为标准正态空间变量的公式为

$$u_i = \frac{z_i - \mu_i}{\sigma_i}. \quad (5)$$

将所有随机变量转换到标准正态空间后,通过逆可靠性方法可求得  $g^R$  及 MPP 点. MPP 点是从约束边界到原点的最短距离的点,而可靠性指标  $\beta$  则称为最短距离,寻找 MPP 点是一个最小化问题.

最终,可靠性分析优化模型(1)将变为如下形式:

$$\left. \begin{aligned} & \max g(\mathbf{u}), \\ & \text{s. t. } \|\mathbf{u}\|_2 = \beta. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

## 2 基于 SORA 的协同优化可靠性优化

鉴于 SORA 方法在采用序列方式执行确定性优化与可靠性分析方面的优点,提出基于 SORA 的协同优化(SORA-CO)方法.

### 2.1 SORA-CO 模型表示形式

系统级优化:

$$\left. \begin{aligned} & \min F(\mathbf{z}), \\ & \text{s. t. } J_i^*(\mathbf{z}) = \sum_{j=1}^{s_i} (z_j - x_{ij}^*)^2 = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

其中:  $\mathbf{z}$  表示设计向量;  $z_j$  为第  $j$  个设计变量;  $s_i$  表示第  $i$  个子学科的设计变量个数;  $x_{ij}^*$  为第  $i$  个子学科所产生的第  $j$  个设计变量结果值.

第  $i$  个子学科优化:

确定性优化为

$$\left. \begin{aligned} & \min J_i(\mathbf{x}_i) = \sum_{j=1}^{s_i} (x_{ij} - z_j^*)^2, \\ & \text{s. t. } g_{im}(\mathbf{x}_i - \mathbf{s}_{im}^k) \leq 0. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

其中:  $\mathbf{x}_i$  表示设计向量;  $x_{ij}$  为第  $j$  个设计变量;  $z_j^*$  表示由系统级传递来的第  $j$  个设计变量目标值;  $g_{im}$  为第  $i$  个子学科第  $m$  个需要表示的可靠性约束;  $\mathbf{s}_{im}^k$  为当前第  $k$  次循环的移动向量.

第  $m$  个可靠性约束分析:

$$\left. \begin{aligned} & \max g_{im}(\mathbf{u}_{im}), \\ & \text{s. t. } \|\mathbf{u}_{im}\| = \beta. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

式中,  $\mathbf{u}_{im}$  表示随机量通过式(5)转换到标准正态

空间的设计向量,优化结束后,根据式(10)计算相应的 MPP 点:

$$\mathbf{x}_i^{\text{MPP}} = \mu_{x_i} + \mathbf{u}_{im}^* \sigma. \quad (10)$$

其中:  $\mathbf{u}_{im}^*$  表示式(9)的优化结果;  $\mu_{x_i}$  表示  $\mathbf{x}_i$  的均值;  $\sigma$  表示方差.

在第  $k$  次循环,根据所得 MPP 点的结果计算第  $k+1$  次循环转移量  $\mathbf{s}_{im}^{k+1}$ :

$$\mathbf{s}_{im}^{k+1} = \mu_{x_i}^k - \mathbf{x}_i^{(\text{MPP},k)}. \quad (11)$$

其中,  $\mu_{x_i}^k$  和  $\mathbf{x}_i^{(\text{MPP},k)}$  分别表示第  $k$  次循环时的设计向量  $\mathbf{x}_i$  的均值及其 MPP 点.

## 2.2 实现步骤

优化实现过程的流程图如图 1 所示.

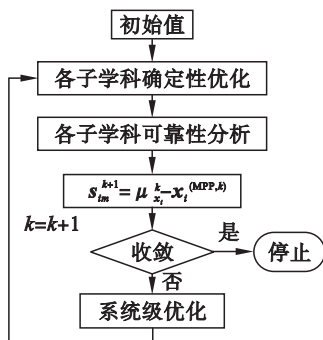


图 1 优化过程流程图

Fig. 1 Flowchart of optimization process

步骤 1 设置系统级优化的起始值. 首先,需要为 SORA-CO 的系统级优化设置各设计变量的初始值,并将其值分配给相关子学科,作为设计变量优化结果的目标值.

步骤 2 子学科级确定性优化. 第 1 次循环时,各设计变量的移动量设为 0,从第 2 次循环开始,若收敛性条件未满足,子学科则根据第  $k-1$  次循环所计算出的 MPP 点,通过移动量  $\mathbf{s}_{im}^k$  修改可靠性约束,求解确定性优化问题.

步骤 3 子学科级可靠性分析. 对于各子学科,每个可靠性约束,均需按照确定性优化结果,进行可靠性分析. 首先,依据式(5),将各不确定性变量转化到标准正态空间,然后依此计算各子学科的所有可靠性分析. 以子学科  $i$  的第  $m$  个可靠性分析为例,根据确定性优化结果计算  $\mathbf{g}_{im}^r$  的值,即目标函数式(9)的最优值. 同时,需利用式(9)的优化结果  $\mathbf{u}^*$ ,通过式(10)计算各相应随机变量的 MPP 点,进而利用式(11),为  $k+1$  次循环计算出随机向量的移动量  $\mathbf{s}_{im}^{k+1}$ .

步骤 4 检查收敛性. 收敛性检查包括三个方面:其一,各子学科间的一致性是否满足;其二,目标函数是否收敛;其三,各可靠性约束是否满足

$g^R \leq 0$ ,即所有可靠性约束是否均满足. 如果三方面的收敛条件均满足,则停止,输出结果;否则,  $k = k + 1$ ,将各子学科的优化结果返回给系统级.

步骤 5 系统级优化. 根据各子学科返回的优化结果,构造系统级一致性约束,对式(7)进行求解,同时把优化结果返回给各相关子学科,进入步骤 2.

## 3 减速器设计优化问题

减速器问题是典型的 MDO 问题测试算例,来自于 NASA (national aeronautics and space administration) 的 MDO 评估算法性能的 10 个标准算例<sup>[5,11]</sup>,优化目标为体积最小:

$$\begin{aligned} \min f(\mathbf{z}) = & 0.785 4 z_1 z_2^2 (3.333 3 z_3^2 + 14.933 4 z_3 - \\ & 43.093 4) - 1.507 9 z_1 (z_6^2 + z_7^2) + \\ & 7.477 (z_6^3 + z_7^3) + 0.785 4 (z_4 z_6^2 + z_5 z_7^2). \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \text{s. t. } g_1 = & 27 / (z_1 z_2^2 z_3) - 1.0 \leq 0, \\ g_2 = & 397.5 / (z_1 z_2^2 z_3^2) - 1.0 \leq 0, \\ g_3 = & 1.93 z_4^3 / (z_2 z_3^4) - 1.0 \leq 0, \\ g_4 = & 1.93 z_5^3 / (z_2 z_3^4) - 1.0 \leq 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_5 = & \frac{\sqrt{\left(\frac{745 z_4}{z_2 z_3}\right)^2 + 16.9 \times 10^6}}{110 z_6^3} - 1.0 \leq 0, \\ g_6 = & \frac{\sqrt{\left(\frac{745 z_5}{z_2 z_3}\right)^2 + 157.5 \times 10^6}}{85 z_7^3} - 1.0 \leq 0, \\ g_7 = & z_2 z_3 - 40.0 \leq 0, \\ g_8 = & 5.0 - z_1 / z_2 \leq 0, \\ g_9 = & z_1 / z_2 - 12.0 \leq 0, \\ g_{10} = & (1.5 z_6 + 1.9) / z_4 - 1.0 \leq 0, \\ g_{11} = & (1.1 z_7 + 1.9) / z_5 - 1.0 \leq 0; \\ & 2.6 \leq z_1 \leq 3.6, \quad 0.7 \leq z_2 \leq 0.8, \\ & 17 \leq z_3 \leq 28, \quad 7.3 \leq z_4 \leq 8.3, \\ & 7.3 \leq z_5 \leq 8.3, \quad 2.9 \leq z_6 \leq 3.9, \\ & 5.0 \leq z_7 \leq 5.5. \end{aligned}$$

该优化问题共有 7 个设计变量,11 个约束,各设计变量和约束的物理意义可参见文献[5, 11]. 假设  $z_4 \sim z_7$  为随机变量<sup>[5]</sup>,且服从正态分布  $N(\mu, \sigma)$ ,取  $\sigma = 0.1$ ,  $\Phi^{-1}(R) = \beta$ . 在系统级,用  $\mathbf{z}$  表示该问题的设计向量;在学科级,用  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$  分别表示 3 个子学科的设计向量. 可靠性优化表示形式如下<sup>[5]</sup>.

系统级优化:

$$\left. \begin{aligned} \min F(\mathbf{z}), \\ \text{s. t. } J_1^*(\mathbf{z}) \leq \varepsilon, \\ J_2^*(\mathbf{z}) \leq \varepsilon, \\ J_3^*(\mathbf{z}) \leq \varepsilon. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

子学科 1:

$$\left. \begin{aligned} \min J_1(\mathbf{x}_1), \\ \text{s. t. } g_j(\mathbf{x}_1) \leq 0, j = 1, 2, 7, 8, 9. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

子学科 2:

$$\left. \begin{aligned} \min J_2(\mathbf{x}_2), \\ \text{s. t. } g_j(\mathbf{x}_2) \leq 0, j = 1, 2, 7, 8, 9; \\ P(g_j(\mathbf{x}_2) \leq 0) \geq R, j = 4, 6, 11. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

子学科 3:

$$\left. \begin{aligned} \min J_3(\mathbf{x}_3), \\ \text{s. t. } g_j(\mathbf{x}_3) \leq 0, j = 1, 2, 7, 8, 9; \\ P(g_j(\mathbf{x}_3) \leq 0) \geq R, j = 3, 5, 10. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

当可靠性要求  $R$  取不同值时, SORA – CO 的可靠性优化结果如表 1 所示. 从表 1 中的优化结

果可以看出,随着可靠性要求  $R$  值的增大,目标函数  $f$  的值也逐渐增大,由此可推断出,可靠性要求  $R$  的值越大,所产生的目标函数  $f$  值越大,故是以牺牲目标函数值为代价,来换取较高的可靠性. 当可靠性要求  $R = 0.5$ , 即  $\beta = 0$  时,可靠性优化结果与确定性优化结果相同,这一点可从式(9) ~ 式(11)推断出. 即把  $\beta = 0$  代入式(9)中的约束,可得优化结果  $\mathbf{u}_{im}^*$  的所有分量均为 0, 将其代入式(10)和式(11),可得到  $\mathbf{s}_{im}^{k+1}$  的所有分量为 0, 再代入式(8)的约束中,即可得到确定性 CO 优化问题.

因此,当  $\beta = 0$  时,可靠性优化问题即变为确定性优化问题,而本文  $\beta = 0$  所得出的 SORA – CO 优化结果,与文献[11]所给出的确定性优化结果相同. 这一点,可进一步验证了所提出的 SORA – CO 方法在维持 CO 优化特性方面的有效性. 表 2 为可靠性优化结果指标.

表 1 可靠性优化结果  
Table 1 Optimization results of reliability

$z_1$	$z_2$	$z_3$	$z_4$	$z_5$	$z_6$	$z_7$	$f$	$R$	$\beta$
3.501 1	0.700 0	17.000 5	7.619 8	8.259 4	3.560 8	5.496 6	3 206.8	0.982 1	2.1
3.500 1	0.700 0	17.000 0	7.524 0	8.080 0	3.490 5	5.426 5	3 133.5	0.919 2	1.4
3.500 0	0.700 0	17.000 0	7.300 0	7.896 4	3.423 4	5.356 7	3 062.6	0.758 0	0.7
3.500 0	0.700 0	17.000 0	7.300 0	7.715 6	3.350 2	5.286 6	2 994.3	0.5	0

表 2 可靠性优化结果指标  
Table 2 Reliability indexes of optimization results

GR1	GR2	GR3	GR4	GR5	GR6	$I$	$R$
-0.881 0	-0.003 0	$-9.412\ 3 \times 10^{-5}$	-0.423 4	$-3.272\ 7 \times 10^{-7}$	$-2.032\ 5 \times 10^{-8}$	$3.344\ 7 \times 10^{-4}$	0.982 1
-0.889 2	$-4.269\ 4 \times 10^{-8}$	$-2.998\ 5 \times 10^{-4}$	-0.447 0	$-8.499\ 6 \times 10^{-8}$	-0.018 2	$3.305\ 2 \times 10^{-4}$	0.919 2
-0.897 1	$-2.532\ 3 \times 10^{-7}$	$-1.235\ 7 \times 10^{-7}$	-0.498 7	-3.168 2	-0.019 1	$1.713\ 4 \times 10^{-5}$	0.758 0

在表 2 中, GR1, GR2, GR3, GR4, GR5 和 GR6 分别表示  $g_4, g_6, g_{11}, g_3, g_5$  和  $g_{10}$  的约束可靠性指标的值. 当其值等于 0 时,说明恰好满足所设定的可靠性要求  $R$  值;当其值小于 0 时,说明可靠性约束的优化结果好于所设定的可靠性要求  $R$  值. 从表 2 中的结果可知,部分可靠性指标的值等于 0,其余部分小于 0,说明所有可靠性约束均恰好满足或好于所设定的可靠性要求. 由此可见, SORA – CO 方法的优化结果可以满足可靠性要求.

该问题所涉及的 3 个子学科具有不同的设计变量,所采用的学科间不一致性信息值的计算式为

$$I = J_1(\mathbf{x}_1^*) + J_2(\mathbf{x}_2^*) + J_3(\mathbf{x}_3^*). \quad (17)$$

式中,  $\mathbf{x}_1^*, \mathbf{x}_2^*, \mathbf{x}_3^*$  分别为  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$  的最优值. 从表 2 中结果数据可知,在这几种可靠性要求  $R$  值下,所产生的学科间不一致信息值非常小,均近似为 0,即满足了学科间一致性要求,说明了 SORA – CO 方法在维持 MDO 问题学科间一致性方面具有有效性. 图 2 和图 3 给出了系统级优化目标和学科间不一致信息随迭代过程的变化曲线. 图 2 中 4 条曲线分别给出了  $R$  的取值为 0.982 1, 0.919 2, 0.758 0, 0.5 时,系统级目标函数值随迭代过程的收敛情况,均得到了满意值. 图 3 给出了不同可靠性指标时,各子学科间一致性的收敛情况,式(17)所给出的各学科间不一致信息的定义值逐渐趋于 0,达到了各学科间的一致性需求.



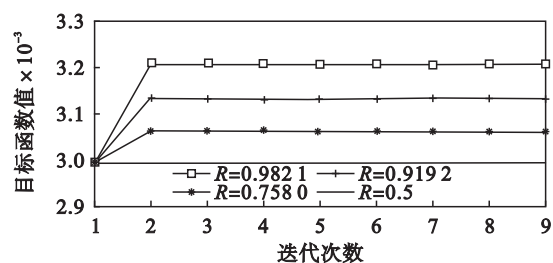


图 2 目标函数变化曲线  
Fig. 2 Curves for objective function

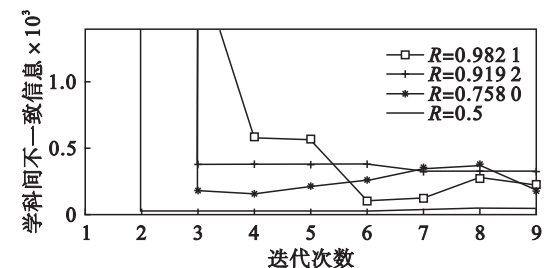


图 3 学科间不一致信息曲线  
Fig. 3 Curves for interdisciplinary inconsistency

## 4 结 论

以 RBMDO 问题为研究对象,在协同优化框架下,提出了基于 SORA 的协同优化可靠性优化方法.在算例验证部分,针对不同的可靠性要求的  $R$  值进行了计算,优化结果的可靠性指标以及学科间一致性均得到满足.同时,优化结果表明,满足较大的可靠性指标  $R$ ,是以牺牲一定的目标函数值为代价的.当  $R=0.5$  时,优化结果与确定性优化结果相同,从而进一步验证了该方法在维持 CO 优化特性方面的有效性.所给出的 SORA - CO 方法,由于以顺序执行的方式进行确定性协同优化计算和可靠性分析计算,即变为两层循环问题,而传统的可靠性 CO 方法需采用三层循环计算方式,因而 SORA - CO 方法的计算效率会明显提高.减速器工程算例作为评估 MDO 算法的

标准算例,常用来测试各类 CO 算法的性能,具有典型的代表性,本文方法可适用于计算量更大的其他 RBMDO 问题.

## 参考文献:

[1] Du X P, Chen W. Sequential optimization and reliability assessment method for efficient probabilistic design [J]. *ASME Journal of Mechanical Design*, 2004, 126 (2): 225 - 233.

[2] Du X P, Guo J, Beeram H. Sequential optimization and reliability assessment for multidisciplinary systems design [J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2008, 35 (2): 117 - 130.

[3] Agarwal H, Renaud J E, Mack J D. A decomposition approach for reliability-based multidisciplinary design optimization [C]//The 44th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference. Norfolk: AIAA, 2003: 3439 - 3448.

[4] Padmanabhan D, Batill S. Reliability based optimization using approximations with applications to multi-disciplinary system design [C]//The 40th AIAA Sciences Meeting and Exhibit. Reno: AIAA, 2002: 14 - 17.

[5] Meng D B, Huang H Z, Wang Z L, et al. Mean-value first-order saddlepoint approximation based collaborative optimization for multidisciplinary problems under aleatory uncertainty [J]. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 2014, 28 (10): 3925 - 3935.

[6] Park H U, Chung J, Behdinan K, et al. Multidisciplinary wing design optimization considering global sensitivity and uncertainty of approximation models [J]. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 2014, 28 (6): 2231 - 2242.

[7] Sues R H, Cesare M A. An innovative framework for reliability-based MDO [R]. Atlanta: AIAA, 2000.

[8] Ahn J, Lee J, Kim S, et al. Sequential reliability analysis framework for multidisciplinary systems [C]//The 10th AIAA/ISSMO Multidisciplinary Analysis and Optimization Conference. Albany: AIAA, 2004: 2380 - 2390.

[9] Zhang X D, Huang H Z. Sequential optimization and reliability assessment for multidisciplinary design optimization under aleatory and epistemic uncertainties [J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2010, 40 (1/2/3/4/5/6): 165 - 175.

[10] Tu J, Choi K K, Park Y H. A new study on reliability-based design optimization [J]. *ASME Journal of Mechanical Design*, 1999, 121 (4): 557 - 564.

[11] Li H Y, Ma M X, Zhang W L. Improving collaborative optimization for MDO problems with multi-objective subsystems [J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2014, 49 (4): 609 - 620.