

# 基于改进反步法的四旋翼无人机轨迹跟踪控制

周来宏, 窦景欣, 张居乾, 闻邦椿

(东北大学 机械工程与自动化学院, 辽宁 沈阳 110819)

**摘 要:** 四旋翼无人机是一个欠驱动、强耦合、高度不稳定的非线性系统. 无人机系统的鲁棒性和抗干扰能力是飞行控制的关键问题. 在经典反步控制(classical backstepping control, CBC)方法的基础上, 增加了误差积分和饱和函数, 设计了积分饱和反步控制(integral saturation backstepping control, ISBC)策略, 用于抵抗无人机飞行过程中受到的常值干扰和变值干扰. 系统的稳定性由 Lyapunov 稳定性定理证明. 在 MATLAB/SIMULINK 环境下做了轨迹跟踪仿真实验. 仿真结果表明, 相比 CBC 控制策略, ISBC 控制策略对四旋翼无人机系统有更好的抗干扰能力和优越的鲁棒性.

**关 键 词:** 四旋翼无人机; 反步控制; 饱和函数; 误差积分; 轨迹跟踪

**中图分类号:** V 249 **文献标志码:** A **文章编号:** 1005-3026(2018)01-0066-05

## Trajectory Tracking Control for a Quadrotor UAV Based on Improved Backstepping

ZHOU Lai-hong, DOU Jing-xin, ZHANG Ju-qian, WEN Bang-chun

(School of Mechanical Engineering & Automation, Northeastern University, Shenyang 110819, China.

Corresponding author: ZHOU Lai-hong, E-mail: lai\_h@126.com)

**Abstract:** Quadrotor unmanned aerial vehicle (UAV) is an underactuated, strongly coupled and highly unstable nonlinear system. The robustness and ability of anti-jamming for UAV system are the key problems of flight control. In order to restrain constant disturbance and variable disturbance during UAV flight, a novel control method named integral saturation backstepping control (ISBC) was proposed by introducing both the error integral and saturation function into classical backstepping control (CBC). The system stability was verified by the Lyapunov stability theorem. The simulation experiment of trajectory tracking was carried out using MATLAB/SIMULINK. Results of simulation experiment indicate that the quadrotor UAV system with ISBC control strategy performs better for anti-jamming and superior robustness than that with CBC control strategy.

**Key words:** quadrotor UAV; backstepping control; saturation function; error integral; trajectory tracking

四旋翼无人机是一种新型的小型无人机, 它具有很高的机动性和敏捷性, 可完成悬停、垂直起降、低速巡航等飞行任务, 被广泛应用于军事侦察、灾害监测、航空测绘、农业植保等领域<sup>[1-3]</sup>. 虽然四旋翼无人机相比传统直升机在飞行效率、体积、安全性等方面有很大的优势, 但其应用范围仍然受到一定限制. 原因主要是四旋翼无人机为一个欠驱动系统, 即有 6 个输出和 4 个控制输入. 此

外, 四旋翼系统还有强非线性、强耦合、多变量和时变等性质, 容易受外界干扰的影响. 因此, 需要设计具有良好抗干扰能力的飞行控制策略, 保证无人机能够高质量完成各种飞行任务<sup>[4-5]</sup>.

近年来, 国内外学者对四旋翼无人机提出了一些新的控制方法. 如自适应线性 PID (proportional-integral-derivative) 控制<sup>[6]</sup>、滑膜可重构控制<sup>[7]</sup>、鲁棒自适应姿态跟踪控制<sup>[8]</sup>、反步

滑膜变结构控制<sup>[9]</sup>、基于反步法的PD (proportional derivative) 控制<sup>[10]</sup>等。

虽然前人研究的控制方法有一定的抗干扰能力,但大多忽略了不同类型干扰对系统的影响。在此次研究中,将外部干扰区分为常值干扰和变值干扰,并在传统反步控制 (classical backstepping control, CBC) 方法的基础上,增加了误差积分和饱和函数,设计了积分饱和反步控制 (integral saturation backstepping control, ISBC) 策略,用于抵抗上述两种干扰。仿真实验结果表明,ISBC 方法可以很好地抑制常值干扰和变值干扰对系统的影响。

## 1 四旋翼无人机动力学模型

### 1.1 运动原理

四旋翼无人机在空间有6个自由度,但是只有4个控制输入,因此它是一个典型的欠驱动系统。如图1所示,定义地球坐标系  $E(x_e, y_e, z_e)$  和机体坐标系  $B(x_b, y_b, z_b)$ 。通过改变4个旋翼的转速,无人机可以产生俯仰、横滚、偏航三种姿态角。两对旋翼(1,3和2,4)分别朝两个方向旋转。同时增大或减小4个旋翼的转速,无人机会产生升降运动。增大一对而减小另一对旋翼的转速,可以产生偏航运动。保持一对旋翼转速不变,分别增大和减小另一对旋翼中两旋翼的转速,就可产生横滚、俯仰、左右和前后运动,如图2所示。

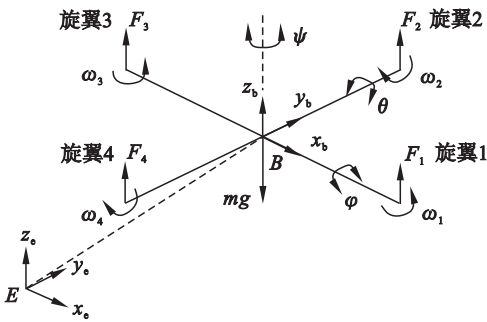


图1 四旋翼无人机结构图

Fig. 1 Configuration of a quadrotor UAV

### 1.2 模型假设

为了简化四旋翼无人机系统,便于求解计算,对系统模型作如下假设:

- 1) 无人机的机身是刚体并且严格对称;
- 2) 机体坐标系的原点与无人机质心重合;
- 3) 桨叶没有挥舞运动。

### 1.3 动力学模型

在地球坐标系下,定义四旋翼无人机的位移和欧拉角为  $\xi = [x, y, z]^T$ ,  $\eta = [\varphi, \theta, \psi]^T$ 。其中  $\varphi$ ,  $\theta$ ,  $\psi$  分别为横滚角、俯仰角和偏航角。无人机在机

体坐标系下的线速度和角速度分别为  $V = [u, v, w]^T$ ,  $\Omega = [p, q, r]^T$ 。两坐标系下线速度和角速度的关系为

$$\begin{cases} \dot{\xi} = RV, \\ \dot{\eta} = N\Omega. \end{cases} \quad (1)$$

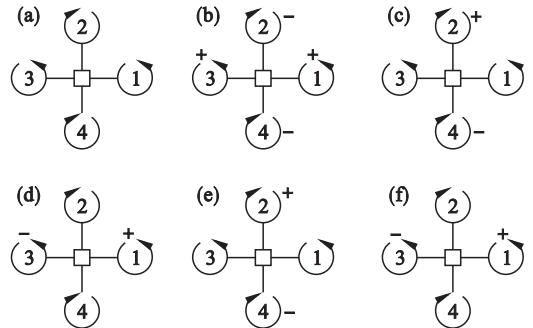


图2 四旋翼无人机运动示意图

Fig. 2 Schematic of the motions for quadrotor UAV

- (a)—悬停或上下运动; (b)—偏航运动; (c)—横滚运动;  
(d)—俯仰运动; (e)—左右运动; (f)—前后运动。

这里转换矩阵  $R$  和  $N$  分别为

$$R = \begin{bmatrix} C_\psi C_\theta & C_\psi S_\theta S_\varphi - S_\psi C_\varphi & C_\psi S_\theta C_\varphi + S_\psi S_\varphi \\ S_\psi C_\theta & S_\psi S_\theta S_\varphi + C_\psi C_\varphi & S_\psi S_\theta C_\varphi - C_\psi S_\varphi \\ -S_\theta & C_\theta S_\varphi & C_\theta C_\varphi \end{bmatrix}, \quad (2)$$

$$N = \begin{bmatrix} 1 & S_\varphi T_\theta & C_\varphi T_\theta \\ 0 & C_\varphi & -S_\varphi \\ 0 & S_\varphi / C_\theta & C_\varphi / C_\theta \end{bmatrix}. \quad (3)$$

其中,  $S_{(\cdot)}$ ,  $C_{(\cdot)}$  和  $T_{(\cdot)}$  分别为  $\sin(\cdot)$ ,  $\cos(\cdot)$  和  $\tan(\cdot)$ 。

根据牛顿定律和欧拉方程,得到四旋翼无人机动力学方程为

$$\begin{cases} m\dot{\xi} = F_f + F_d + F_g, \\ I\dot{\Omega} + \Omega \times I\Omega = M_f - M_d. \end{cases} \quad (4)$$

其中:  $F_f$ ,  $F_d$  和  $F_g$  分别为平动力、平动空气阻力和重力;  $\Omega \times I\Omega$ ,  $M_f$  和  $M_d$  分别为陀螺力矩、转动力矩和空气阻力力矩。考虑假设条件,并将上述力和力矩代入整理得到无人机非线性动力学模型如下:

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \\ \ddot{\varphi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (C_\varphi C_\psi S_\theta + S_\varphi S_\psi) \frac{1}{m} U_1 \\ (C_\varphi S_\theta S_\psi - C_\psi S_\varphi) \frac{1}{m} U_1 \\ (C_\theta C_\varphi) \frac{1}{m} U_1 \\ \dot{\theta} \dot{\varphi} \left( \frac{I_y - I_z}{I_x} \right) \\ \dot{\varphi} \dot{\psi} \left( \frac{I_z - I_x}{I_y} \right) \\ \dot{\theta} \dot{\psi} \left( \frac{I_x - I_y}{I_z} \right) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{k_{dx}}{m} \dot{x} \\ -\frac{k_{dy}}{m} \dot{y} \\ -\frac{k_{dz}}{m} \dot{z} \\ \frac{l}{I_x} U_2 \\ \frac{l}{I_y} U_3 \\ \frac{l}{I_z} U_4 \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \\ -\frac{k_{\text{dmx}}}{I_x}\dot{\varphi} - \frac{J_r}{I_x}\dot{\theta}\omega_r \\ -\frac{k_{\text{dmy}}}{I_y}\dot{\theta} + \frac{J_r}{I_y}\dot{\varphi}\omega_r \\ -\frac{k_{\text{dmz}}}{I_z}\dot{\psi} \end{bmatrix}. \quad (5)$$

式中:  $J_r$  为电机转动惯量;  $\omega_r = \omega_2 + \omega_4 - \omega_1 - \omega_3$ .

控制输入为

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= b(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + \omega_4^2), \\ U_2 &= b(\omega_4^2 - \omega_2^2), \\ U_3 &= b(\omega_3^2 - \omega_1^2), \\ U_4 &= d(\omega_1^2 + \omega_3^2 - \omega_2^2 - \omega_4^2). \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

其中,  $\omega_i, i=1,2,3,4$  为第  $i$  个电机的转速.

## 2 经典反步控制 CBC

在忽略空气阻力及阻力矩,且不考虑外部干扰的情况下,非线性动力学方程可以写为

$$\ddot{\mathbf{X}} = f(\mathbf{X}) + g(\mathbf{X})\mathbf{U}. \quad (7)$$

式中:

$$\mathbf{X} = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5 \quad x_6]^T = [z \quad \varphi \quad \theta \quad \psi \quad x \quad y]^T; \quad (8)$$

$$\mathbf{U} = [U_1 \quad U_2 \quad U_3 \quad U_4]^T. \quad (9)$$

动力学方程(5)可以改写为

$$\ddot{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \\ \ddot{x}_4 \\ \ddot{x}_5 \\ \ddot{x}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -g \\ a_1\dot{x}_3\dot{x}_5 + a_2\boldsymbol{\Omega}_r\dot{x}_3 \\ a_3\dot{x}_1\dot{x}_5 + a_4\boldsymbol{\Omega}_r\dot{x}_1 \\ a_5\dot{x}_1\dot{x}_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{m}u_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 \\ \frac{1}{m}u_x & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{m}u_y & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{U}. \quad (10)$$

用经典反步控制(CBC)方法设计四旋翼无人机的控制率,其具体过程如下:

步骤 1 定义四旋翼无人机的期望基准轨迹为

$$\mathbf{X}_d = [x_{1d} \quad x_{2d} \quad x_{3d} \quad x_{4d} \quad x_{5d} \quad x_{6d}]^T =$$

$[z_d \quad \varphi_d \quad \theta_d \quad \psi_d \quad x_d \quad y_d]^T$ , 以高度通道为例,引入跟踪误差

$$e_1 = x_{1d} - x_1, \quad (11)$$

选取 Lyapunov 函数为

$$V_1(e_1) = \frac{1}{2}e_1^2. \quad (12)$$

对  $V_1$  按时间求导

$$\dot{V}_1(e_1) = e_1\dot{e}_1 = e_1(\dot{x}_{1d} - \dot{x}_1). \quad (13)$$

为了使  $e_1$  稳定,引入函数

$$\alpha_1 = \dot{x}_{1d} + k_1e_1, \quad (14)$$

用方程(14)代替  $\dot{x}_1$ ,则方程(13)可以改写为

$$\dot{V}_1(e_1) = e_1(\dot{x}_{1d} - \dot{x}_{1d} - k_1e_1) = -k_1e_1^2 \leq 0. \quad (15)$$

这里  $k_1$  为一个正常数.

步骤 2 引入第二个跟踪误差

$$e_2 = \dot{x}_1 - \alpha_1 = \dot{x}_1 - \dot{x}_{1d} - k_1e_1, \quad (16)$$

对  $e_2$  按时间求导

$$\dot{e}_2 = \ddot{x}_1 - \dot{\alpha}_1 = f(x_1) + g(x_1)U_1 - \ddot{x}_{1d} - k_1\dot{e}_1. \quad (17)$$

选取 Lyapunov 函数为

$$V_2(e_1, e_2) = \frac{1}{2}(e_1^2 + e_2^2). \quad (18)$$

对  $V_2$  按时间求导,

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(e_1, e_2) &= e_1\dot{e}_1 + e_2\dot{e}_2 = e_1(\dot{x}_{1d} - \dot{x}_1) + e_2(\ddot{x}_1 - \dot{\alpha}_1) \\ &= e_1(-e_2 - k_1e_1) + e_2(f(x_1) + g(x_1)u_1 - \ddot{x}_{1d} - k_1\dot{e}_1) \\ &= -k_1e_1^2 + e_2(-e_1 + f(x_1) + g(x_1)u_1 - \ddot{x}_{1d} - k_1\dot{e}_1). \end{aligned} \quad (19)$$

步骤 3 为了使  $e_2$  稳定,选取控制率  $u_1$  为

$$u_1 = \frac{1}{g(x_1)}(e_1 - f(x_1) + \ddot{x}_{1d} + k_1\dot{e}_1 - k_2e_2). \quad (20)$$

式中,  $k_2$  为一个正常数. 将方程(20)代入方程(19),则  $V_2$  的导数可以改写为

$$\dot{V}_2(e_1, e_2) = -k_1e_1^2 - k_2e_2^2 \leq 0, \quad (21)$$

即  $\dot{V}_2(e_1, e_2)$  是负半定的. 因此,使用式(20)可以使非线性系统(7)渐近稳定. 四旋翼无人机其他通道的控制器设计与  $u_1$  类似.

## 3 ISBC 控制器设计

四旋翼无人机在飞行过程中通常受到两种类型的外部干扰:常值干扰和变值干扰. CBC 方法无法抵抗这些干扰,因此需要一些辅助控制来消除干扰. 本节在 CBC 方法的基础上,引入了误差积分和饱和函数来提高控制率的鲁棒性. 当考虑

外部干扰时,非线性动力学方程(7)应写成

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{f}(\mathbf{X}) + \mathbf{g}(\mathbf{X})\mathbf{U} + \boldsymbol{\delta}. \quad (22)$$

这里,  $\boldsymbol{\delta} = [\delta_1 \ \delta_2 \ \delta_3 \ \delta_4 \ \delta_5 \ \delta_6]^T$  是外部干扰矢量,且  $|\delta_i| \leq \beta, i=1,2,\dots,6, \beta$  是一个正常数.

将误差积分和饱和函数  $\text{sat}\left(\frac{e_2}{\mu_1}\right)$  引入 CBC 中,则式(20)改写为

$$\mathbf{u}'_1 = \frac{1}{g(x_1)} (e_1 - f(x_1) + \ddot{x}_{1d} + k_1 \dot{e}_1 - k_2 e_2 + \varepsilon_1 \text{sat}\left(\frac{e_2}{\mu_1}\right) + \lambda_1 p_1). \quad (23)$$

式中:  $\lambda_1$  为积分系数;  $p_1$  为误差  $e_1$  的积分,

$$p_1 = \int_0^t e_1(\tau) d\tau; \quad (24)$$

$\varepsilon_1$  为设计参数; 饱和函数  $\text{sat}\left(\frac{e_2}{\mu_1}\right)$  表示为

$$\text{sat}\left(\frac{e_2}{\mu_1}\right) = \begin{cases} 1, & \frac{e_2}{\mu_1} > 1; \\ -1, & \frac{e_2}{\mu_1} < -1; \\ \frac{e_2}{\mu_1}, & \left| \frac{e_2}{\mu_1} \right| \leq 1. \end{cases} \quad (25)$$

**定理** 考虑 1.2 节的模型假设,如果系统误差由式(23)控制,则四旋翼无人机非线性动力学系统方程(22)将渐近稳定.

**证明** 为了证明 ISBC 控制率的稳定性,选取 Lyapunov 函数为

$$V_3 = \frac{1}{2}(e_1^2 + e_2^2). \quad (26)$$

对  $V_3$  按时间求导

$$\begin{aligned} \dot{V}_3 &= e_1 \dot{e}_1 + e_2 \dot{e}_2 = \\ &= e_1 (\dot{x}_{1d} - \dot{x}_1) + e_2 (\ddot{x}_1 - \ddot{\alpha}_1) = \\ &= e_1 (-e_2 - k_1 e_1) + e_2 (f(x_1) + g(x_1)u'_1 + \delta_1 - \ddot{x}_{1d} - k_1 \dot{e}_1) = \\ &= -k_1 e_1^2 + e_2 (-e_1 + f(x_1) + g(x_1)u'_1 + \delta_1 - \ddot{x}_{1d} - k_1 \dot{e}_1). \end{aligned} \quad (27)$$

将方程(23)代入方程(27)得

$$\dot{V}_3 = -k_1 e_1^2 - k_2 e_2^2 + e_2 \left( \varepsilon_1 \text{sat}\left(\frac{e_2}{\mu_1}\right) + \lambda_1 p_1 + \delta_1 \right). \quad (28)$$

通过合理选取参数  $\varepsilon_1, \mu_1, \lambda_1$ , 可以使导数  $\dot{V}_3$  保持负定,即满足  $\dot{V}_3 < 0$ . 根据 Lyapunov 稳定性定理,非线性系统(22)渐近稳定. 其他通道的控制器设计和证明与  $u'_1$  相似.

## 4 仿真结果

为了验证 ISBC 方法的控制效果,在 MATLAB / SIMULINK 环境下做了轨迹跟踪的

仿真实验,控制的目标是保证四旋翼无人机的仿真飞行轨迹可以跟踪上期望的螺旋轨迹,实验过程中,分别添加了常值干扰和变值干扰. 期望的螺旋轨迹表达式如下:

$$\left. \begin{aligned} x_d &= \sin(t), \\ y_d &= \sin(t), \\ z_d &= 0.3 + 0.2t, \\ \psi_d &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

初始值设定为  $\psi = 0, z = 0.3, x = 0, y = 1$ . 仿真时间为 20 s. 从第 0 s 开始分别给系统施加两种不同形式的干扰:第一种干扰为常值干扰,干扰力和干扰力矩分别为  $f_x = 1 \text{ N}, f_y = 1 \text{ N}, f_z = 1 \text{ N}, M_x = M_y = M_z = 0.1 \text{ N} \cdot \text{m}$ ;第二种为变值干扰,干扰力和干扰力矩分别为  $f_x = f_y = f_z = 0.3 \times \sin(t) \text{ N}, M_x = M_y = M_z = 0.05 \times \sin(t) \text{ N} \cdot \text{m}$ . 仿真结果见图 3 和图 4.

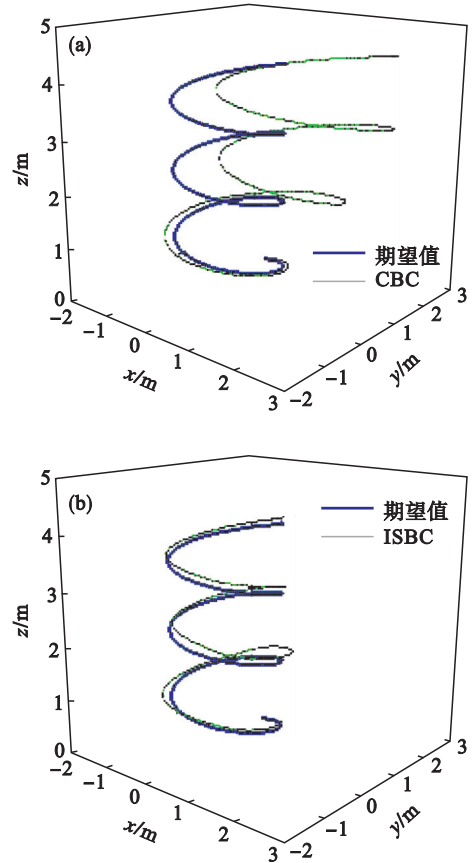


图 3 常值干扰下轨迹跟踪结果

Fig. 3 Trajectory tracking results under constant disturbance

(a)—CBC 方法; (b)—ISBC 方法.

从图 3a 和图 4a 中可以看出,采用 CBC 方法,在受到常值干扰时,轨迹跟踪的误差随时间不断扩大;受到变值干扰时,轨迹跟踪的误差虽然没有随时间扩大,但误差值仍然很大. 相比之下,采用 ISBC 方法,仿真飞行轨迹与期望轨迹的误差

一直保持稳定,而且误差值远小于 CBC 方法,见图 3b 和图 4b. 因此,由轨迹跟踪仿真实验的结果可以证明,ISBC 控制策略的抗干扰能力要远优于 CBC 控制策略.

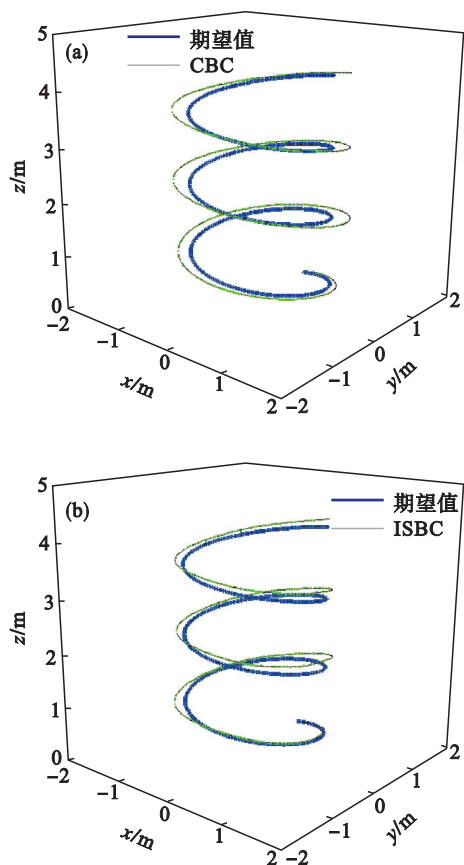


图 4 变值干扰下轨迹跟踪结果

Fig. 4 Trajectory tracking results under variable disturbance

(a)—CBC 方法;(b)—ISBC 方法.

## 5 结 论

1) 将误差积分和饱和函数引入经典反步控制方法 CBC,设计出了 ISBC 控制策略,用于四旋翼无人机的飞行控制.

2) 基于 Lyapunov 稳定性定理,证明受控于 ISBC 控制策略的四旋翼无人机系统是渐近稳定的.

3) 轨迹跟踪仿真实验表明,采用 CBC 控制方法,在常值干扰或变值干扰下,四旋翼系统轨迹跟踪的效果很差,即 CBC 方法不具备抵抗这两种干扰的能力.相反,采用 ISBC 控制方法,无人机可较好地跟踪预定轨迹,跟踪误差也较小.因此,可以证明 ISBC 控制方法比 CBC 方法有更好的抗干扰能力和鲁棒性.

## 参考文献:

- [1] Bouabdallah S, Siegwart R. Full control of a quadrotor [C]// International Conference on Intelligent Robots and Systems. San Diego: IEEE, 2007: 153–158.
- [2] Choi Y C, Ahn H S. Nonlinear control of quadrotor for point tracking: actual implementation and experimental tests [J]. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 2015, 20(3): 1179–1192.
- [3] 史添玮,王宏,孙明星. 基于组合导航与 EKPF 飞行器的地形边界与面积估计 [J]. *东北大学学报(自然科学版)*, 2015, 36(8): 1069–1073.  
(Shi Tian-wei, Wang Hong, Sun Ming-xing. Estimation of boundary and area using aircraft with integrated navigation and EKPF [J]. *Journal of Northeastern University (Natural Science)*, 2015, 36(8): 1069–1073.)
- [4] Raffa G V, Ortega M G, Rubio F R. An underactuated  $H_\infty$  control strategy for a quadrotor helicopter [C] // Proceedings of the European Control Conference. Budapest, 2009: 3845–3850.
- [5] Raffa G V, Ortega M G, Rubio F R. An integral predictive/nonlinear  $H_\infty$  control structure for a quadrotor helicopter [J]. *Automatica*, 2010, 46(1): 29–39.
- [6] Zuo Z. Trajectory tracking control design with command-filtered compensation for a quadrotor [J]. *IET Control Theory & Applications*, 2010, 4(11): 2343–2355.
- [7] Wang T, Xie W F, Zhang Y M. Sliding mode reconfigurable control using information on the control effectiveness of actuators [J]. *Journal of Aerospace Engineering*, 2014, 27(3): 587–596.
- [8] Lee T. Robust adaptive attitude tracking on  $SO(3)$  with an application to a quadrotor UAV [J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2013, 21(5): 1924–1930.
- [9] Bouadi H, Bouchoucha M, Tadjine M. Sliding mode control based on backstepping approach for an UAV type-quadrotor [J]. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Sciences*, 2008, 4(1): 12–17.
- [10] Basri M A M, Husain A R, Danapalasingam K A. Enhanced backstepping controller design with application to autonomous quadrotor unmanned aerial vehicle [J]. *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, 2014, 79(2): 295–321.