

doi: 10.12068/j.issn.1005-3026.2018.02.015

两端支承式输流管路的强迫振动分析

孙志礼, 于 瀛, 赵千里, 柴小冬
(东北大学 机械工程与自动化学院, 辽宁 沈阳 110819)

摘 要: 研究水平放置的两端支承式输流管路的强迫振动问题, 将欧拉-伯努利梁模型视为管路的简化力学模型. 利用格林函数法对无量纲的强迫振动微分方程进行推导, 得到一般支承形式管路的格林函数, 并最终得到挠度的一般表达式. 在此基础上研究一端固定、另一端弹性支承输流管路的振动响应, 分别利用微分变换法和伽辽金法验证其正确性与准确性, 并研究了集中载荷和分布载荷情况下的振动响应. 利用该方法可以得到封闭的精确解, 比其他数值方法具有较大的优势.

关 键 词: 输流管路; 强迫振动; 格林函数法; 挠度响应; 固有频率

中图分类号: TH 212; TH 213.3 **文献标志码:** A **文章编号:** 1005-3026(2018)02-0221-05

Forced Vibration Analysis of Fluid Conveying Pipe with Both Ends Supported

SUN Zhi-li, YU Ying, ZHAO Qian-li, CHAI Xiao-dong
(School of Mechanical Engineering & Automation, Northeastern University, Shenyang 110819, China.
Corresponding author: YU Ying, E-mail: yuying_0513@163.com)

Abstract: The forced vibration of fluid conveying pipe with elastic support was investigated. Euler-Bernoulli beam was adopted to simplify the mechanical model of the pipe. Green's Function method was used to deduce the dimensionless differential equation of forced vibration and Green's Function of pipes with general supporting formats was obtained. Finally, the general expression of the deflection was obtained. On this basis, dynamic responses of the pipe with one end fixed and the other elastically supported was studied. Differential Transformation method and Galerkin's Method were utilized to verify the validity and accuracy of the proposed method, and the responses of the pipe under concentrated and distributed force were investigated. The proposed model has advantages compared with other numerical methods because it is capable for offering precise closed solutions.

Key words: fluid conveying pipe; forced vibration; Green's function method; deflection response; natural frequency

输流管路被广泛应用于城市供热系统、飞机叶片的冷却系统、液压系统等各类需要传送流体介质的场合, 因其广泛的应用范围, 使得与之相关的流固耦合振动问题在近一个世纪以来受到广泛的关注并发表了大量的研究成果^[1-6]. 现阶段关于这类问题的研究主要分为物理模型的建立和求解方法的寻求. 近年来随着计算技术的飞速发展, 多类求解方法也随之产生, 比较典型的包括: 微分变换法(DTM), 微分求积法(DQM), 伽辽金法(GM), 传递矩阵法(TMM)等.

输流管路在工作过程中难免受到外部载荷的影响, 求解管路的强迫振动问题显得尤为重要. 格林函数(GF)在物理上被称为点源影响函数, 通常用来求解由“点源”引起的“场”, 格林函数法(GFM)优越于其他数值方法的地方在于它可以快捷地获得精确的解析解. 近几年, GFM常被用于求解欧拉-伯努利梁的强迫振动问题^[7-10]. 本文借鉴GFM求解细长梁振动问题的过程, 对线

性的输流管路强迫振动微分方程进行计算,旨在获得精确的计算结果,不仅能作为其他数值方法的参照,也能为研究其余形式的振动微分方程提供思路.

1 振动微分方程

一般情况下,不同支承形式的管路受到相同的外载荷可能导致不同结果. 考虑到用扭转弹簧和直弹簧组合来表示固定或弹性支承具有普适性,输流管路的受激振动力学模型如图 1 所示.

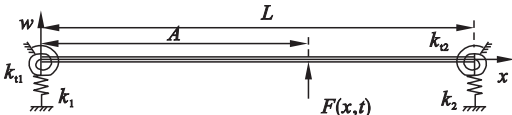


图 1 输流管路受激振动力学模型
Fig. 1 Mechanical model of forced vibration of fluid conveying pipe

若不考虑重力、外部张力等因素的影响,线性振动微分方程可以表示为

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + MU^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2MU \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + (M + m) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = F(x, t) . \tag{1}$$

式中: EI 为弯曲刚度; M 和 m 分别为单位长度上流体和管路的质量; U 为流体流速; w 为管路的横向挠度; x 和 t 分别为轴向坐标和时间; $F(x, t)$ 代表单位长度上的外载荷.

引入下面一些无量纲参量:

$$\xi = \frac{x}{L}, \eta = \frac{w}{L}, u = \left(\frac{M}{EI} \right)^{\frac{1}{2}} LU, \tau = \left(\frac{EI}{M + m} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{t}{L^2}, \beta = \frac{M}{M + m}, f(\xi, \tau) = \frac{L^3}{EI} F(x, t) , \text{ 则式(1)可以表示为}$$

$$\frac{\partial^4 \eta}{\partial \xi^4} + u^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} + 2u \sqrt{\beta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi \partial \tau} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial \tau^2} = f(\xi, \tau) . \tag{2}$$

2 管路的格林函数

假设管路受到简谐激励的作用,则有

$$f(\xi, \tau) = f(\xi) \cos(\omega \tau) . \tag{3}$$

式中: $f(\xi)$ 为无量纲的作用力; $\omega = \left(\frac{M + m}{EI} \right)^{\frac{1}{2}} \Omega L^2$ 为无量纲频率,其中 Ω 为激振频率.

式(3)可用复数形式表示为

$$\frac{\partial^4 \tilde{\eta}}{\partial \xi^4} + u^2 \frac{\partial^2 \tilde{\eta}}{\partial \xi^2} + 2u \sqrt{\beta} \frac{\partial^2 \tilde{\eta}}{\partial \xi \partial \tau} + \frac{\partial^2 \tilde{\eta}}{\partial \tau^2} = \tilde{f}(\xi) e^{i\omega \tau} . \tag{4}$$

其中,

$$\eta(\xi, \tau) = \text{Re} \{ \tilde{\eta}(\xi, \tau) \} .$$

则式(4)的稳态解可以表示为

$$\tilde{\eta}(\xi, \tau) = y(\xi) e^{i\omega \tau} . \tag{5}$$

结合式(4)和式(5)可知

$$\eta(\xi, \tau) = \text{Re} \{ y(\xi) \} \cos(\omega \tau) - \text{Im} \{ y(\xi) \} \sin(\omega \tau) . \tag{6}$$

将式(5)代入式(4),可得到

$$\frac{d^4 y}{d\xi^4} + u^2 \frac{d^2 y}{d\xi^2} + 2u\omega \sqrt{\beta} i \frac{dy}{d\xi} - \omega^2 y = \tilde{f}(\xi) . \tag{7}$$

依据格林函数法的定义,式(6)的解可以表示为

$$y(\xi) = \int_0^1 \tilde{f}(\xi_0) G(\xi, \xi_0) d\xi_0 . \tag{8}$$

式中, $G(\xi, \xi_0)$ 为输流管路的格林函数,是当管路在任意位置 ξ_0 处受到单位集中力时的响应,即式(9)的解为

$$\frac{d^4 y}{d\xi^4} + u^2 \frac{d^2 y}{d\xi^2} + 2u\omega \sqrt{\beta} i \frac{dy}{d\xi} - \omega^2 y = \delta(\xi - \xi_0) . \tag{9}$$

为求解式(8),考虑 Laplace 变换,可得到

$$Y(s, \xi_0) = \frac{1}{s^4 + u^2 s^2 + 2u\omega \sqrt{\beta} i s - \omega^2} \{ e^{-s\xi_0} + (s^3 + u^2 s + 2u\omega \sqrt{\beta} i) y(0) + (s^2 + u^2) y'(0) + s y''(0) + y'''(0) \} . \tag{10}$$

式中, $y(0), y'(0), y''(0)$ 和 $y'''(0)$ 均为 ξ_0 的函数.

将式(10)中的分母进行有理化,得到

$$s^4 + u^2 s^2 + 2u\omega \sqrt{\beta} i s - \omega^2 = \prod_{i=1}^4 (s - s_i) . \tag{11}$$

则利用式(10)可得式(9)的逆变换为

$$\frac{1}{\prod_{i=1}^4 (s - s_i)} e^{-s\xi_0} + \frac{s^3 + u^2 s + 2u\omega \sqrt{\beta} i}{\prod_{i=1}^4 (s - s_i)} y(0) + \frac{s^2 + u^2}{\prod_{i=1}^4 (s - s_i)} y'(0) + \frac{s y''(0)}{\prod_{i=1}^4 (s - s_i)} + \frac{y'''(0)}{\prod_{i=1}^4 (s - s_i)} . \tag{12}$$

为便于表达,引入以下 4 个参量:

$$A_1(\xi) = \frac{e^{s_1 \xi}}{(s_1 - s_2)(s_1 - s_3)(s_1 - s_4)} , A_2(\xi) = \frac{e^{s_2 \xi}}{(s_2 - s_1)(s_2 - s_3)(s_2 - s_4)} , A_3(\xi) = \frac{e^{s_3 \xi}}{(s_3 - s_1)(s_3 - s_2)(s_3 - s_4)} , A_4(\xi) = \frac{e^{s_4 \xi}}{(s_4 - s_1)(s_4 - s_2)(s_4 - s_3)} .$$

通过 Laplace 逆变换可得格林函数的解:

$$\begin{aligned} G(\xi, \xi_0) &= y(\xi, \xi_0) = \\ &\varphi_4(\xi - \xi_0)H(\xi - \xi_0) + \varphi_1(\xi)y(0) + \\ &\varphi_2(\xi)y'(0) + \varphi_3(\xi)y''(0) + \varphi_4(\xi)y'''(0). \end{aligned} \quad (13)$$

其中 $H(\cdot)$ 为单位阶跃函数, 且

$$\begin{aligned} \varphi_1(\xi) &= \sum_{i=1}^4 (s_i^3 + u^2 s_i + 2u\omega \sqrt{\beta i}) A_i(\xi), \\ \varphi_2(\xi) &= \sum_{i=1}^4 (s_i^2 + u^2) A_i(\xi), \\ \varphi_3(\xi) &= \sum_{i=1}^4 s_i A_i(\xi), \varphi_4(\xi) = \sum_{i=1}^4 A_i(\xi). \end{aligned}$$

3 管路的稳态响应

通过推导过程可知, 式(12)中的 $y(0)$, $y'(0)$, $y''(0)$ 和 $y'''(0)$ 均与边界条件有关且决定了格林函数的表达形式, 为了得到这4个参量, 对 $y(\xi, \xi_0)$ (当 $\xi > \xi_0$ 时) 关于 ξ 求导, 得到

$$y'(\xi - \xi_0) = \varphi_4'(\xi - \xi_0) + \varphi_1'(\xi)y(0) + \varphi_2'(\xi)y'(0) + \varphi_3'(\xi)y''(0) + \varphi_4'(\xi)y'''(0), \quad (14)$$

$$y''(\xi - \xi_0) = \varphi_4''(\xi - \xi_0) + \varphi_1''(\xi)y(0) + \varphi_2''(\xi)y'(0) + \varphi_3''(\xi)y''(0) + \varphi_4''(\xi)y'''(0), \quad (15)$$

$$\begin{aligned} y'''(\xi - \xi_0) &= \varphi_4'''(\xi - \xi_0) + \varphi_1'''(\xi)y(0) + \\ &\varphi_2'''(\xi)y'(0) + \varphi_3'''(\xi)y''(0) + \varphi_4'''(\xi)y'''(0). \end{aligned} \quad (16)$$

将 $\xi = 1$ 代入式(13)~式(16), 可得到

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} \varphi_1(1) & \varphi_2(1) & \varphi_3(1) & \varphi_4(1) \\ \varphi_1'(1) & \varphi_2'(1) & \varphi_3'(1) & \varphi_4'(1) \\ \varphi_1''(1) & \varphi_2''(1) & \varphi_3''(1) & \varphi_4''(1) \\ \varphi_1'''(1) & \varphi_2'''(1) & \varphi_3'''(1) & \varphi_4'''(1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(0) \\ y'(0) \\ y''(0) \\ y'''(0) \end{bmatrix} = \\ &\begin{bmatrix} y(1) - \varphi_4(1 - \xi_0) \\ y'(1) - \varphi_4'(1 - \xi_0) \\ y''(1) - \varphi_4''(1 - \xi_0) \\ y'''(1) - \varphi_4'''(1 - \xi_0) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (17)$$

对于如图1所示的管路系统, 其无量纲边界条件为

$$\left. \begin{aligned} \eta''(0, \tau) &= k_{11}\eta'(0, \tau), \eta'''(0, \tau) = -k_1\eta(0, \tau). \\ \eta''(1, \tau) &= -k_{12}\eta'(1, \tau), \eta'''(1, \tau) = -k_2\eta(1, \tau). \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

结合式(6)和式(18)可知,

$$\left. \begin{aligned} y''(0) &= k_{11}y'(0), y'''(0) = -k_1y(0), \\ y''(1) &= -k_{12}y'(1), y'''(1) = k_2y(2). \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

将式(19)代入式(17), 可得

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} \varphi_1(1) - k_{11}\varphi_4(1) & \varphi_2(1) + k_{11}\varphi_3(1) & -1 & 0 \\ \varphi_1'(1) - k_{11}\varphi_4'(1) & \varphi_2'(1) + k_{11}\varphi_3'(1) & 0 & -1 \\ \varphi_1''(1) - k_{11}\varphi_4''(1) & \varphi_2''(1) + k_{11}\varphi_3''(1) & 0 & k_{12} \\ \varphi_1'''(1) - k_{11}\varphi_4'''(1) & \varphi_2'''(1) + k_{11}\varphi_3'''(1) & -k_2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \\ &\begin{bmatrix} y(0) \\ y'(0) \\ y(1) \\ y'(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\varphi_4(1 - \xi_0) \\ -\varphi_4'(1 - \xi_0) \\ -\varphi_4''(1 - \xi_0) \\ -\varphi_4'''(1 - \xi_0) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (20)$$

通过式(20)可以求出 $y(0)$, $y'(0)$ 的表达式, 表达式中必然包含变量 ξ_0 , 将 $y(0)$, $y'(0)$ 代入式(13)中, 结合式(19), 可得到一般支承形式下管路的格林函数为

$$\begin{aligned} G(\xi, \xi_0) &= \\ &\varphi_4(\xi - \xi_0)u(\xi - \xi_0) + [\varphi_1(\xi) - k_{11}\varphi_4(\xi)] \times \\ &y(0) + [\varphi_2(\xi) + k_{11}\varphi_3(\xi)]y'(0). \end{aligned} \quad (21)$$

根据式(8), 可得到 $y(\xi)$ 的表达式为

$$\begin{aligned} y(\xi) &= \int_0^1 \tilde{f}(\xi_0) \{ \varphi_4(\xi - \xi_0)u(\xi - \xi_0) + \\ &[\varphi_1(\xi) - k_{11}\varphi_4(\xi)]y(0) + \\ &[\varphi_2(\xi) + k_{11}\varphi_3(\xi)]y'(0) \} d\xi_0. \end{aligned} \quad (22)$$

假设管路受到图1所示的集中载荷作用, 其无量纲的表达形式为

$$f(\xi, \tau) = f_0 \delta(\xi - a) \cos(\omega \tau). \quad (23)$$

式中 $a = A/L$, 表示无量纲加载位置.

然而严格来说, 管路受到的外载荷通常是分布载荷. 假设载荷为均匀分布, 则

$$f(\xi, \tau) = \begin{cases} \frac{f_0}{\alpha} \cos(\omega \tau), & c \leq \xi \leq d; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases} \quad (24)$$

式中, $\alpha = d - c$, 表示分布区间的长度.

为保持统一, 依然用 a 表示载荷中心距离管路左端点的距离.

4 计算结果

以一端固定、另一端弹性支承的输流管路 (即取 $k_1 = k_{11} = \infty$, k_2, k_{12} 取有限值) 为例, 当 $f_0 = 2.0$, $\beta = 0.5$, $\omega = 10.0$, $a = 0.5$, $u = 4.0$ 时, 计算管路的振动响应.

4.1 方法的有效性

根据推导过程可知, 格林函数法计算得到的解是精确解, 其准确性亦可以通过计算 $\xi = 0.8$ 处的挠度幅值与伽辽金方法的解进行对比得到, 当 N 足够大时, 取前 N 项的和便可得到近似解, 因此, 利用伽辽金法, 管路的挠度可近似表示为

$$\eta(\xi,\tau)=\sum_{n=1}^N\phi_n(\xi)q_n(\tau). \tag{25}$$

其中,

$$\phi_n(\xi)=a_n\xi^{n+1}(1-\xi)^2. \tag{26}$$

a_n 可通过归一化条件求得, q_n 可通过正则化条件得到,具体过程参考文献[11]. 对于两端固定式输流管路的计算结果如表 1 所示.

表 1 无量纲挠度幅值			
Table 1 Dimensionless amplitude of dynamic deflection			
流速 u	格林函数法	伽辽金法	
		$N=6$ $N=10$	
0	0.004 646	0.004 626	0.004 649
1	0.004 802	0.004 783	0.004 806
5	0.029 739	0.029 716	0.029 742
10	0.003 902	0.003 923	0.003 900

由表 1 可知, N 越大,伽辽金法的解越接近格林函数法的解,当 $N=10$ 时,二者已十分接近.

依据共振原理,格林函数法同样可用于求解固有频率.如图 2 所示,当取 $k_2=k_{i2}=k=100$ 时,可得到 $\xi=0.8$ 处的挠度幅值随激振频率的变化曲线.

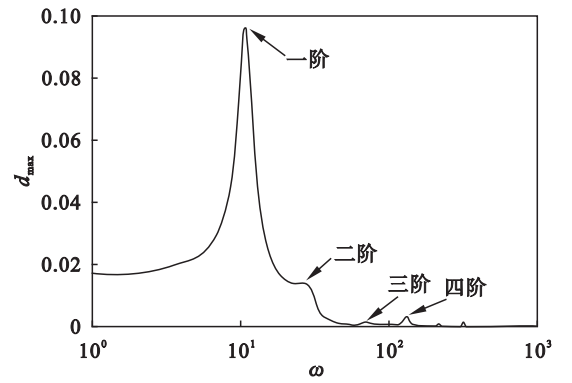


图 2 挠度幅值 d_{\max} 与激振频率 ω 的关系
Fig. 2 Relationship between exciting frequency ω and deflection d_{\max}

表 2 所示为分别利用本文方法以及微分变换法所求解的固有频率.

表 2 无量纲固有频率 ($k=100$)		
Table 2 Dimensionless frequency ($k=100$)		
固有频率	格林函数法	微分变换法
ω_1	10. 96	10. 90
ω_2	28. 87	28. 93
ω_3	69. 18	69. 37
ω_4	131. 98	132. 34

如表 2 所示,二者的结果十分一致,证明了本

方法的精确性.

4. 2 集中和分布载荷下的振动响应

表 3 列举了集中载荷和分布载荷在不同 k 和 α 下的挠度幅值以及偏差.

表 3 集中载荷和分布载荷下管路的挠度幅值				
Table 3 Maximum deflection of the pipe under concentrated and distributed force				
k	集中载荷 $d_{\max 1}$	分布载荷		$\frac{d_{\max 2}-d_{\max 1}}{d_{\max 1}}/\%$
		α	$d_{\max 2}$	
0	0.042 939 11	0.1	0.042 637 52	-7.02
		0.01	0.042 936 08	-0.070 6
		0.001	0.042 939 08	-0.000 699
		0.1	0.028 078 91	-5.38
10	0.028 230 74	0.01	0.028 229 21	-0.0542
		0.001	0.028 230 72	-0.000 708
		0.1	0.077 157 67	-4.82
		0.01	0.077 527 98	-0.0484
100	0.077 531 73	0.001	0.077 531 69	-0.000 516

当 α 足够小,如表 3 所示,约为管路长度的百分之一时,挠度幅值的偏差已经极小(小数点后 5 位),此时可以将均匀分布的载荷视为集中载荷,由此不难知道,任意形式的分布载荷在 α 足够小时均可视为集中载荷.在设计实际受载的管路之前可由格林函数法计算出挠度,根据设计准则判断所受载荷为集中或分散;这样的计算方法比有限元更加高效实用,计算结果有助于设计人员在初始阶段简化问题,提高设计效率.

取 $k_2=k_{i2}=100, \alpha=0.1$,利用格林函数法计算输流管路在集中载荷和均匀分布载荷作用下的稳态响应,得到的挠度幅值如图 3 所示.

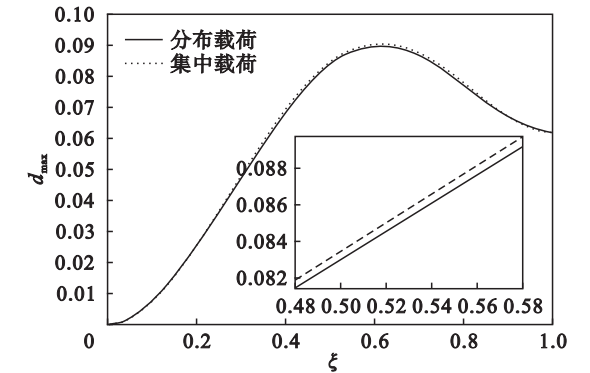


图 3 挠度幅值与集中和分布载荷的关系
Fig. 3 Relationship between concentrated and distributed force and deflection

在计算整个管路的最大挠度时发现两类载荷下的计算结果接近,因此任意选取一段放大并一同置于图 3 中.如图 3 所示,在集中和分布载荷的作用下,管路任意位置处的挠度幅值总是前者大

于后者. 因此,综合图 3 和表 3 的结果可得,当管路受到分布载荷时,计算得到的挠度幅值会比受集中载荷时小,而且分布区间越大,影响越大.

5 结 论

1) 本文利用格林函数法推导了输流直管强迫振动的微分方程,并最终得到了稳态响应的精确解,相比其他数值方法更加精确,计算结果可为设计人员提供良好的参考.

2) 研究了不同分布形式的外载荷对管路挠度的影响. 研究发现,当受力相同时,分布载荷作用下的挠度总是小于集中载荷下的挠度,并且分布区间越大,二者的差距越大.

3) 方法可推广为研究任意支承形式的直管、弯管的强迫振动问题,载荷形式也可为多样,方法具有良好的广适性.

参考文献：

[1] Dai H L, Wang L, Qian Q, et al. Vibration analysis of three-dimensional pipes conveying fluid with consideration of steady combined force by transfer matrix method[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2012, 219(5) : 2453 – 2464.

[2] Faal R T, Derakhshan D. Flow-induced vibration of pipeline on elastic support [J]. *Procedia Engineering*, 2011, 14: 2986 – 2993.

[3] Paidoussis M P, Li G X. Pipes conveying fluid: a model dynamical problem [J]. *Journal of Fluids and Structures*, 1993, 7(2) : 137 – 204.

[4] Li S J, Liu G M, Kong W T. Vibration analysis of pipes conveying fluid by transfer matrix method [J]. *Journal of Fluids and Structures*, 2014, 266(1) : 78 – 88.

[5] Guo C Q, Zhang C H, Paidoussis M P. Modification of equation of motion of fluid-conveying pipe for laminar and turbulent flow profiles[J]. *Journal of Fluids and Structures*, 2010, 26(5) : 793 – 803.

[6] Karami H, Farid M. A new formulation to study in-plane vibration of curved carbon nanotubes conveying viscous fluid [J]. *Journal of Vibration and Control*, 2015, 21 (12) : 2360 – 2371.

[7] Foda M A, Abduljabber Z. A dynamic Green function formulation for the response of a beam structure to a moving mass[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1998, 210 (3) : 295 – 306.

[8] Abu-Hilal M. Forced vibration of Euler-Bernoulli beams by means of dynamic Green functions[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2003, 267(2) : 191 – 207.

[9] Abu-Hilal M. Dynamic response of a double Euler-Bernoulli beam due to a moving constant load[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2006, 297(3) : 477 – 491.

[10] Li X Y, Zhao X, Li Y H. Green ’ s functions of the forced vibration of Timoshenko beams with damping effect [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2014, 333(6) : 1781 – 1795.

[11] Lee S I, Chung J. New non-linear modeling for vibration analysis of a straight pipe conveying fluid [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2002, 254(2) : 313 – 325.