

# 考虑表面应力的微悬臂梁质量传感器的建模与仿真

马树军, 修 强  
(东北大学 机械工程与自动化学院, 辽宁 沈阳 110819)

**摘 要:** 为了考虑悬臂梁谐振器表面吸附层或者不同材料涂层引起的表面应力的影响,进而提高质量传感器的精度和性能,基于瑞利-里兹法提出了考虑表面应力的悬臂梁质量传感器的理论方法.在悬臂梁振动的控制方程中引入应力系数对其振型函数进行修正,并系统地分析对悬臂梁振动频率的影响,再根据瑞利法建立微悬臂梁质量传感器的理论模型.应用该方法,纳米颗粒的位置和质量可以通过颗粒吸附前后悬臂梁的频率移动来精确确定.该方法的准确性和可行性通过有限元仿真进行了验证.

**关 键 词:** 微悬臂梁;质量传感;表面应力;欧拉-伯努利梁理论;瑞利-里兹法

中图分类号: TP 206      文献标志码: A      文章编号: 1005-3026(2018)02-0237-05

## Modelling and Simulation of a Surface Stress-Included Microcantilever-based Mass Sensor

MA Shu-jun, XIU Qiang  
(School of Mechanical Engineering & Automation, Northeastern University, Shenyang 110819, China.  
Corresponding author: MA Shu-jun, E-mail: mashujun@me.neu.edu.cn)

**Abstract:** A theoretical model, which takes surface stress into account by applying Rayleigh-Ritz theorem, for a cantilever-based mass sensor is proposed, in order to consider the surface stress induced by the adsorbed layer or coating of different materials on the cantilever resonator and to further enhance the accuracy and performance of the cantilever sensor. Stress parameter is introduced into the governing equation of the cantilever vibration to adjust the mode shape function, and the influence of the surface stress towards the vibration is systematically analyzed. With this model, the position and mass of the particle can be precisely determined through the frequency shifts of the microcantilever before and after the particle adsorption. The accuracy and the reliability of this method were validated by finite element simulation.

**Key words:** microcantilever; mass sensing; surface stress; Euler-Bernoulli beam theory; Rayleigh-Ritz theorem

由于其微小的质量、极高的共振频率和品质因子,微纳米机械系统(NMES/MEMS)广泛应用于许多科学技术领域<sup>[1-3]</sup>.在20世纪90年代中期开始出现了基于MEMS的传感器,它的出现使得量取用其他测量方法很难测得的微观物理量(如极小的质量、力、变形、温度等)成为可能,因而成为探索微观领域的有力工具<sup>[4]</sup>.基于微悬臂梁结构的质量传感器就是其广泛应用的一个典型代表.有研究表明,微悬臂梁质量传感器的质量分辨率已经达到了 $10^{-18} \sim 10^{-21}$  g的量级<sup>[5]</sup>.这样的质量分辨率使得其能够用于生物金属原子<sup>[6]</sup>和生物化学分子<sup>[7]</sup>的检测,甚至是同位素的鉴定<sup>[8]</sup>.在其众多应用中,即使是单层的吸附层或者谐振器表面的不同材料喷涂层都会产生很大的表面应力,影响悬臂梁的振动频率<sup>[9-10]</sup>,进而影响质量的精确检测;然而在悬臂梁质量传感器的研究中却很少考虑表面应力的影响.

本文考虑悬臂梁表面应力对其振动频率的影响

响. 将悬臂梁的表面应力等效分解, 通过引入应力系数对悬臂梁的振型函数加以修正, 再应用瑞利法建立悬臂梁共振频率和吸附微粒的位置和质量之间的关系. 根据这个关系便可以利用悬臂梁的共振频率同时求得吸附微粒的位置和质量.

## 1 传感器模型的建立

### 1.1 悬臂梁的振型函数

悬臂梁的表面应力可以按集中载荷模型分解为作用于悬臂梁自由端的等效轴向力和等效弯矩<sup>[11-12]</sup>, 如图 1 所示:  $\sigma_s$  为因为吸附作用而产生

的悬臂梁表面应力;  $T_e, M_e$  分别为表面应力的等效轴向力和等效弯矩. 等效弯矩对悬臂梁的振动频率没有影响<sup>[13]</sup>, 这样受表面应力悬臂梁的振动问题就转化成为受单一轴向力的悬臂梁振动的一般问题.

现有一微悬臂梁, 在其任意位置  $l_{\Delta m}$  处吸附有一质量为  $\Delta m$  微纳颗粒. 如考虑吸附层表面应力引起的轴向力, 忽略其引起的其他影响 (如对弯曲刚度和弯曲截面转动惯量的影响), 并且假设吸附层的厚度非常薄而可以将其忽略. 根据欧拉-伯努利梁理论, 可得承受轴向力的悬臂梁的控制方程, 见式(1).

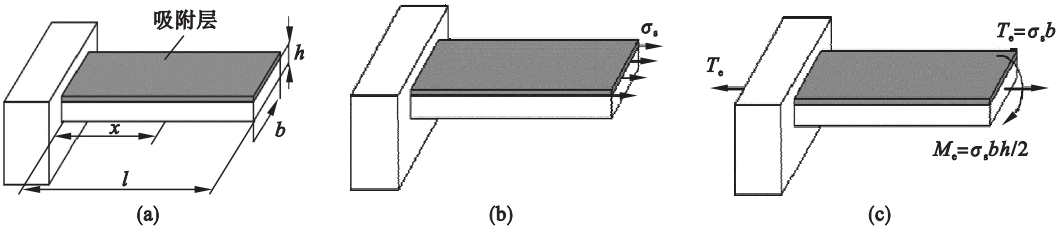


图 1 带吸附层的悬臂梁及其表面应力  
Fig. 1 Cantilever with adsorption layer and it's surface stress

(a) —上表面具有均匀吸附层的悬臂梁; (b) —集中载荷模型; (c) —表面应力的等效分解模型.

$$EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, (0 \leq x \leq l) \quad (1)$$

式中:  $t$  为时间;  $E, I$  (对于方形截面梁  $I = bh^3/12$ ),  $T$  ( $T > 0$  时为轴向拉力,  $T < 0$  为轴向压力, 限于篇幅文中只讨论  $T > 0$  的情况) 和  $m$  ( $m = \rho S, \rho$  为密度,  $S = bh$  为弯曲截面面积) 分别为杨氏模量, 弯曲截面转动惯量, 轴向力和梁的单位长度质量. 为方便计算引入无量纲系数  $\xi = x/l$  ( $0 \leq \xi \leq 1$ ), 设悬臂梁的第  $n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) 阶标准化挠度函数的形式为

$$\bar{u}_n(\xi, t) = \bar{U}_n(\xi) e^{i\omega_n t} \quad (2)$$

式中:  $\omega_n$  为悬臂梁的第  $n$  阶共振频率;  $\bar{U}_n(\xi)$  为悬臂梁的第  $n$  阶标准化的振型函数. 将式(2)代入式(1)可得

$$\frac{\partial^4 \bar{U}_n}{\partial \xi^4} - \lambda^2 \frac{\partial^2 \bar{U}_n}{\partial \xi^2} - \Omega_n^2 \bar{U}_n = 0, (0 \leq \xi \leq 1) \quad (3)$$

$$\begin{cases} Y_1 = \alpha_{1n}^2 \cos(\alpha_{1n}) + \alpha_{2n}^2 \cosh(\alpha_{2n}) , \\ Y_2 = \alpha_{1n}^2 \sin(\alpha_{1n}) + \alpha_{1n} \alpha_{2n} \sinh(\alpha_{2n}) , \\ Y_3 = \alpha_{1n}^3 \sin(\alpha_{1n}) + \alpha_{1n} \lambda^2 \sin(\alpha_{1n}) - \alpha_{2n}^3 \sinh(\alpha_{2n}) + \alpha_{2n} \lambda^2 \sinh(\alpha_{2n}) , \\ Y_4 = \alpha_{1n}^3 \cos(\alpha_{1n}) + \alpha_{1n} \lambda^2 \cos(\alpha_{1n}) + \frac{\alpha_{1n} (\alpha_{2n}^3 \cosh(\alpha_{2n}) - \alpha_{2n} \lambda^2 \cosh(\alpha_{2n}))}{\alpha_{2n}} . \end{cases}$$

$\Omega_n$  即为满足式(6)的正根, 根据式(6)可以得到任意应力系数情况下悬臂梁的共振频率系数

其中  $\Omega_n = \omega_n l^2 \sqrt{\frac{m}{EI}}$  为频率系数,  $\lambda = l \sqrt{\frac{T}{EI}}$  为应力系数. 求解式(3)可得第  $n$  阶标准化振型函数:

$$\bar{U}_n(\xi) = A_1 \cos(\alpha_{1n} \xi) + A_2 \sin(\alpha_{1n} \xi) + A_3 \cosh(\alpha_{2n} \xi) + A_4 \sinh(\alpha_{2n} \xi) \quad (4)$$

式中  $\alpha_{1n} = \sqrt{\sqrt{\Omega_n^2 + \lambda^4/4} - \lambda^2/2}$ ,  $\alpha_{2n} = \sqrt{\sqrt{\Omega_n^2 + \lambda^4/4} + \lambda^2/2}$ ;  $\alpha_{1n}$  和  $\alpha_{2n}$  为悬臂梁横向振动的模态系数. 引入悬臂梁的边界条件:

$$\begin{aligned} \bar{U}_n(\xi) \Big|_{\xi=0} = 0, \quad \frac{\partial \bar{U}_n(\xi)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} = 0, \quad \frac{\partial^2 \bar{U}_n(\xi)}{\partial \xi^2} \Big|_{\xi=1} = 0, \\ \left( \frac{\partial^3 \bar{U}_n(\xi)}{\partial \xi^3} - \lambda^2 \frac{\partial \bar{U}_n(\xi)}{\partial \xi} \right) \Big|_{\xi=1} = 0 . \end{aligned} \quad (5)$$

则可得悬臂梁横向振动的动力学特征方程:

$$Y_1 Y_2 + Y_3 Y_4 = 0 \quad (6)$$

式中:

$\Omega_n$ , 进而由式(7)得到相应的共振频率:

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{\Omega_n}{2\pi l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}} \quad (7)$$

根据式(6)可以得到应力系数  $\lambda^2$  和各阶的频率系数  $\Omega_n$  的关系,如图 2 所示。

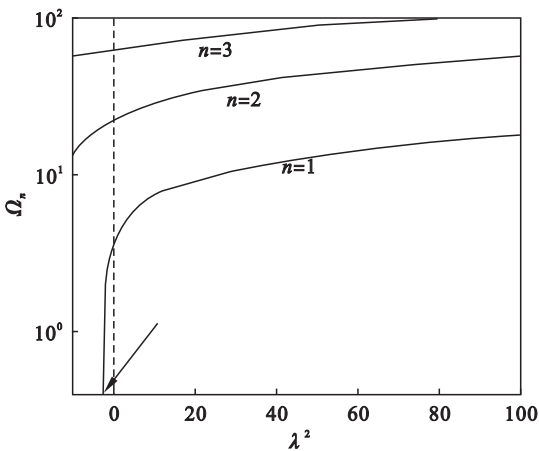


图 2 频率系数  $\Omega_n$  随应力系数  $\lambda^2$  的变化  
Fig. 2 Variation of the frequency coefficient  $\Omega_n$  as the stress coefficient  $\lambda^2$  varies

由图 2 可知,随着应力系数  $\lambda^2$  的增大,各阶

$$\bar{U}_n(\xi) = a_n \left[ (\cos(\alpha_{1n}\xi) - \cosh(\alpha_{2n}\xi)) - K(\sin(\alpha_{1n}\xi) - \frac{\alpha_{1n} \sinh(\alpha_{2n}\xi)}{\alpha_{2n}}) \right] \quad (8)$$

式中: $a_n$  为满足条件  $\int_0^1 \bar{U}_n^2(\xi) d\xi = 1$  的常数; $K$  为常数,

$$K = \frac{\alpha_{1n}^2 \cos(\alpha_{1n}) + \alpha_{2n}^2 \cosh(\alpha_{2n})}{\alpha_{1n}^2 \sin(\alpha_{1n}) + \alpha_{1n} \alpha_{2n} \sinh(\alpha_{2n})}.$$

的频率系数  $\Omega_n$  也随之单调地增大. 图中的虚线表示应力系数为零,表征悬臂梁不受轴向力的一般情况;虚线左边区域表示悬臂梁处于压曲状态;右边区域表示悬臂梁处于拉伸状态. 值得指出的是,第一阶曲线与横轴的交点表示此时处于压曲状态的悬臂梁的一阶频率为零(图中箭头所指处),对于更高阶的模态也有类似的结论. 表 1 列出了应力系数  $\lambda^2$  分别为 0,10,20 和 40 时的悬臂梁的前 3 阶频率系数.

表 1 不同应力系数下的频率系数 Table 1 Frequency coefficients with different stress parameters				
$n$	$\Omega_n$			
	$\lambda^2 = 0$	$\lambda^2 = 10$	$\lambda^2 = 20$	$\lambda^2 = 40$
1	3.5	7.2	9.2	12.0
2	22.0	28.3	33.1	40.7
3	61.7	67.7	73.1	82.7

将由式(6)求得的频率系数  $\Omega_n$  代入式(4)中,可得到悬臂梁第  $n$  阶标准化振型函数:

图 3 为悬臂梁在应力系数  $\lambda^2$  为 0,10,20 和 40 的情况下的前三阶振型。

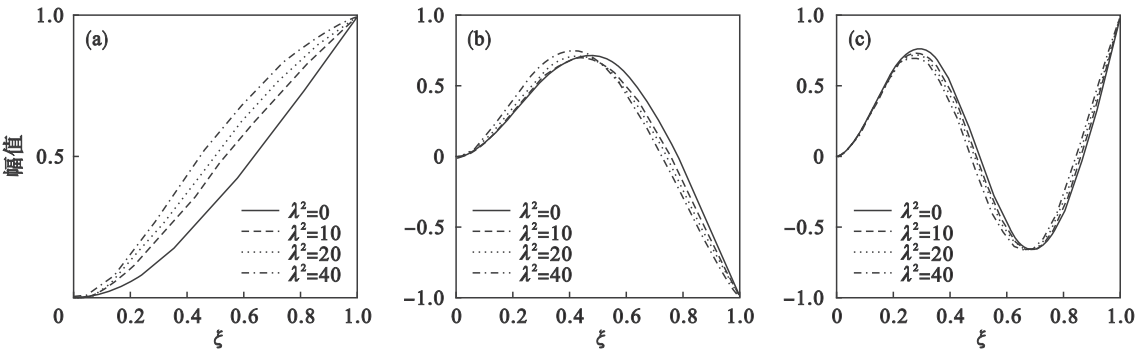


图 3 不同应力系数下的悬臂梁前三阶振型  
Fig. 3 First three vibration modes of the cantilever with different stress parameters  
(a)——一阶振型; (b)——二阶振型; (c)——三阶振型。

1.2 传感器理论模型建立

图 4 所示为一基于微悬臂梁的质量传感器,  $\Delta m$  为吸附微粒质量. 如果  $\Delta m$  远小于悬臂梁的质量  $M$  ( $M = \rho S$ ), 在微粒吸附前后可以假设悬臂梁的振型函数保持不变<sup>[14]</sup>. 根据瑞利-里兹法, 振动系统的最大动能  $E_{\text{kin}}$  等于其最大应变能  $E_{\text{strain}}$ . 对于一个吸附微小质量的悬臂梁系统, 认为其最大势能不变, 因此可得  $E_{\text{strain}} = E_{\text{kin}} + E_{\text{kin}, \Delta m}$ ,

$E_{\text{kin}, \Delta m}$  为质点质量的动能. 其中

$$\left. \begin{aligned} E_{\text{strain}} &= \frac{1}{2} EI \int_0^l \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)^2 dx + \frac{1}{2} T \int_0^l \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 dx, \\ E_{\text{kin}} &= \frac{1}{2} m \int_0^l U^2 dx, \\ E_{\text{kin}, \Delta m} &= \frac{1}{2} \Delta m U^2 l_{\Delta m}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

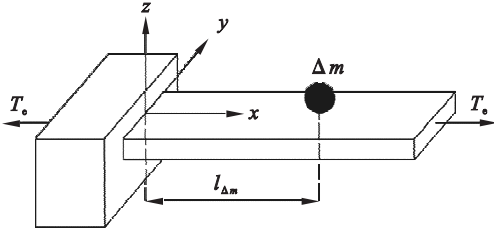


图 4 在位置  $l_{\Delta m}$  有一质点质量  $\Delta m$  的悬臂梁示意图  
Fig. 4 Schematic of a cantilever with a point mass  $\Delta m$  positioned at  $l_{\Delta m}$

将式(9)中各项代入瑞利方程并化简,可得

$$\Omega_{\Delta m}^2 = \frac{\int_0^1 \left( \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \xi^2} \right)^2 d\xi + \lambda^2 \int_0^1 \left( \frac{\partial \bar{U}}{\partial \xi} \right)^2 d\xi}{1 + \alpha U^2 \xi_{\Delta m}}. \quad (10)$$

其中  $\Omega_{\Delta m} = \omega L^2 \sqrt{\frac{m}{EI}}$  为吸附微粒后的频率系数,

$\alpha = \frac{\Delta m}{M}$  为吸附微粒和悬臂梁的质量比.

因为  $\alpha \ll 1$ , 因此对式(10)进行泰勒展开得到

$$\Omega_{\Delta m} = \Omega (1 + \alpha \bar{U}^2 \xi_{\Delta m})^{-\frac{1}{2}} = \Omega \left( 1 - \frac{1}{2} \alpha \bar{U}^2 \xi_{\Delta m} \right). \quad (11)$$

式中  $\Omega = \sqrt{\int_0^1 \left( \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \xi^2} \right)^2 d\xi + \lambda^2 \int_0^1 \left( \frac{\partial \bar{U}}{\partial \xi} \right)^2 d\xi}$  为吸附微小质量前的频率系数.

改写式(11)可以得到

$$\alpha = \frac{2}{U^2 \xi_{\Delta m}} \frac{\Delta \omega_n}{\omega_n}. \quad (12)$$

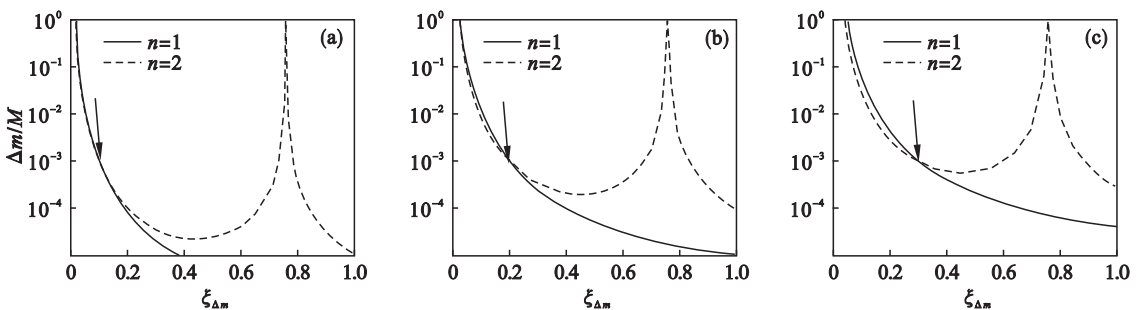
其中  $\Delta \omega_n = \omega_n - \omega_{n, \Delta m}$ ,  $\omega_n$  和  $\omega_{n, \Delta m}$  为吸附微粒前后悬臂梁的共振角频率.

在传感器的实际应用中, 式(12)中质量比  $\alpha$  和吸附位置  $\xi_{\Delta m}$  均为待确定的未知量且与悬臂梁的振动模态和振型函数  $\bar{U}_n$  无关; 频率比  $\Delta \omega_n / \omega_n$  为试验中的测量值, 其值和振动模态相关. 对于第  $i$  阶振动模态, 频率比  $\Delta \omega_i / \omega_i$  为已知定值, 由式(12)可知, 有无数个点  $(\xi_{\Delta m}, \alpha)$  可以满足关系式  $\Delta \omega_i / \omega_i = \alpha \bar{U}_i^2 \xi_{\Delta m} / 2$ . 因此要确定两个未知量  $\xi_{\Delta m}$  和  $\alpha$ , 则至多需要三阶振动模态的频率移动

$\Delta \omega_n / \omega_n$  来唯一确定微粒的位置和质量.

## 2 仿真与验证

用有限元仿真结果作为虚拟试验数据对本文方法进行验证. 借助有限元软件 ANSYS14.5 建立一个三维的悬臂梁有限元模型. 悬臂梁模型的材料参数和尺寸参数都为任意选定, 杨氏模量、泊松比和密度分别为 100 GPa, 0.28 和 2 850 kg/m<sup>3</sup>; 梁的长、宽和厚度分别设定为 100, 10 和 1 μm. 吸附微粒为六面体, 其尺寸设为长、宽为 2 μm 高为 1 μm. 三维模型采用 10 节点的 solid 86 四面体单元, 该单元支持塑性、超弹性、蠕变、应力刚化、大挠度和大应变能力等分析. 在模态分析之前进行静态力分析, 以便在有限模型中施加初始应力. 不失一般性, 将悬臂梁所受轴向力的应力系数取为  $\lambda^2 = 10$ , 对应于受拉伸轴向力的悬臂梁. 在有限元仿真中, 将质量比  $\Delta m / M$  设为 0 和  $1 \times 10^{-3}$  (质量比为 0 时表示悬臂梁无吸附质量), 标准化位置  $\xi_{\Delta m}$  设为 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 共进行 10 次仿真 (一次为吸附质量为 0 的情况, 其余 9 次为  $\Delta m / M = 1 \times 10^{-3}$ ,  $\xi_{\Delta m} = 0.1 \sim 0.9$  的情况). 每次仿真提取前三阶共振频率  $\omega_1, \omega_2$  和  $\omega_3$  (或  $\omega_{1, \Delta m}, \omega_{2, \Delta m}$  和  $\omega_{3, \Delta m}$ ), 最后可以得到 9 组频率比数据  $\Delta \omega_1 / \omega_1, \Delta \omega_2 / \omega_2$  和  $\Delta \omega_3 / \omega_3$ . 将这些数据代入到式(12)中便可以求得吸附微粒的位置  $\xi_{\Delta m}$  和质量比  $\alpha$ . 验证结果如图 5 所示, 各阶曲线的交点  $(\xi_{\Delta m}, \alpha)$  (箭头所指处) 即为根据频率移动得出的计算结果, 图 5a ~ 图 5i 依次对应于  $(0.1, 10^{-3}), (0.2, 10^{-3}), \dots, (0.9, 10^{-3})$ . 这里需要指出的是, 如图 5a ~ 图 5e 中所示,  $n=1$  和  $n=2$  的曲线仅有唯一的交点, 所以针对这种情况, 只需  $\Delta \omega_1 / \omega_1$  和  $\Delta \omega_2 / \omega_2$  便可唯一确定  $\xi_{\Delta m}$  和  $\alpha$ . 而图 5f ~ 图 5i,  $n=1$  和  $n=2$  的曲线有两个交点, 因此为唯一确定  $\xi_{\Delta m}$  和  $\alpha$  需要引入  $n=3$  来确定其真实值.



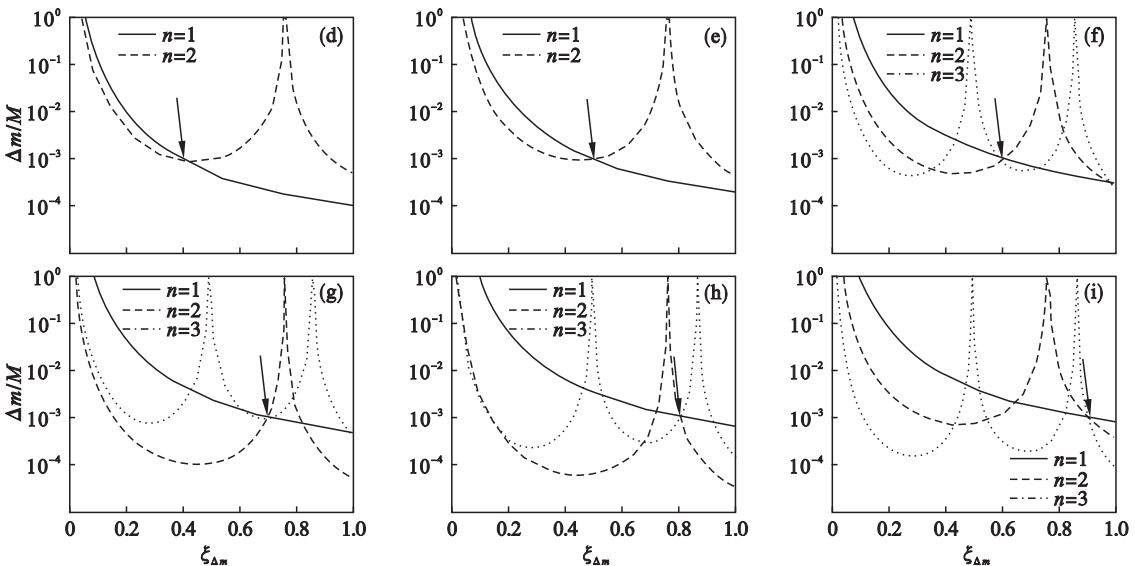


图 5 函数  $\alpha=2(\Delta\omega_i/\omega_i)\bar{U}_i^2\xi_{\Delta m}$  的曲线

Fig. 5 Curves of function  $\alpha=2(\Delta\omega_i/\omega_i)\bar{U}_i^2\xi_{\Delta m}$

(a) — (0.1, 10<sup>-3</sup>); (b) — (0.2, 10<sup>-3</sup>); (c) — (0.3, 10<sup>-3</sup>); (d) — (0.4, 10<sup>-3</sup>); (e) — (0.5, 10<sup>-3</sup>); (f) — (0.6, 10<sup>-3</sup>); (g) — (0.7, 10<sup>-3</sup>); (h) — (0.8, 10<sup>-3</sup>); (i) — (0.9, 10<sup>-3</sup>).

### 3 结 语

本文提出一个同时确定单一吸附微粒位置和质量的方法,该方法为单个细胞、药物分子等微小粒子的位置和质量测定提供了更加简单便捷的方法.不同于以往的很多其他研究,本文将表面应力对悬臂梁质量传感器的影响考虑在内,对悬臂梁的振型函数进行了修正,因此可以提高传感器的准确性和可靠性.利用该方法,通过测量悬臂梁的最多三阶共振频率就可以确定出微粒的位置和质量.

### 参考文献:

[ 1 ] Stachiv I, Fedorchenko A I, Chen Y L. Mass detection by means of the vibrating nanomechanical resonators [ J ]. *Applied Physics Letters*, 2012, 100 ( 9 ) : 093110.

[ 2 ] Gil-Santos E, Ramos D, Martinez J, et al. Nanomechanical mass sensing and stiffness spectrometry based on two-dimensional vibrations of resonant nanowires [ J ]. *Nature Nanotechnology*, 2010, 5 ( 9 ) : 641 – 645.

[ 3 ] Park J, Qin H, Scalf M, et al. A mechanical nanomembrane detector for time-of-flight mass spectrometry [ J ]. *Nano Letters*, 2011, 11 ( 9 ) : 3681 – 3684.

[ 4 ] Boisen A, Dohn S, Keller S S, et al. Cantilever-like micromechanical sensors [ J ]. *Reports on Progress in Physics*, 2011, 74 ( 3 ) : 036101.

[ 5 ] Dohn S, Svendsen W, Boisen A, et al. Mass and position determination of attached particles on cantilever based mass sensors [ J ]. *The Review of Scientific Instruments*, 2007, 78 ( 10 ) : 103303.

[ 6 ] Jensen K, Kim K, Zettl A. An atomic-resolution nanomechanical mass sensor [ J ]. *Nature Nanotechnology*, 2008, 3 ( 9 ) : 533 – 537.

[ 7 ] Hanay M S, Kelber S, Naik A K, et al. Single-protein nanomechanical mass spectrometry in real time [ J ]. *Nature Nanotechnology*, 2012, 7 ( 9 ) : 602 – 608.

[ 8 ] Chiu H Y, Hung P, Postma H W C, et al. Atomic-scale mass sensing using carbon nanotube resonators [ J ]. *Nano Letters*, 2008, 8 ( 12 ) : 4342 – 4346.

[ 9 ] Berger R, Delamarche E, Lang H P, et al. Surface stress in the self-assembly of alkanethiols on gold [ J ]. *Science*, 1997, 276 ( 5321 ) : 2021 – 2024.

[ 10 ] Koev S T, Powers M A, Yi H, et al. Mechano-transduction of DNA hybridization and dopamine oxidation through electrodeposited chitosan network [ J ]. *Lab on a Chip*, 2007, 7 ( 1 ) : 103 – 111.

[ 11 ] Ren Q, Zhao Y P. Influence of surface stress on frequency of microcantilever-based biosensors [ J ]. *Microsystem Technologies*, 2004, 10 ( 4 ) : 307 – 314.

[ 12 ] Cherian S, Thundat T. Determination of adsorption-induced variation in the spring constant of a microcantilever [ J ]. *Applied Physics Letters*, 2002, 80 ( 12 ) : 2219 – 2221.

[ 13 ] McFarland A W, Poggi M A, Doyle M J, et al. Influence of surface stress on the resonance behavior of microcantilevers [ J ]. *Applied Physics Letters*, 2005, 87 ( 5 ) : 053505.

[ 14 ] Nieradka K, Stegmann H, Gotszalk T. Focused ion beam milling and deposition techniques in validation of mass change value and position determination method for micro and nanomechanical sensors [ J ]. *Journal of Applied Physics*, 2012, 112 ( 11 ) : 114509.