第39卷第2期 东北大学学报(自然科学版) Vol. 39, No. 2
2018年2月 Journal of Northeastern University(Natural Science) Feb. 2018

doi: 10.12068/j.issn.1005-3026.2018.02.030

三维欧氏空间中主法线曲面的结构函数

于延华, 岳立冬
(东北大学 理学院, 辽宁 沈阳 110819)

摘 要: 在三维欧氏空间中,主法线曲面作为特殊的非可展直纹面具有良好的代数和几何性质. 运用微分几何的方法研究主法线曲面的结构函数. 根据三维欧氏空间中不可展直纹面的定义和标准方程,给出曲线的主法线曲面的定义和标准方程. 从主法线曲面的定义和标准方程出发,得到主法线曲面的结构函数之间满足的关系,以及曲线的主法线曲面的结构函数、准线和腰曲线三者之间的联系. 讨论 Mannheim 曲线和一般螺线的主法线曲面,得到 Mannheim 曲线的主法线曲面是其侣线的副法线曲面,一般螺线的主法线曲面是正螺面.

关 键 词: 三维欧氏空间;非可展直纹面;主法线曲面;结构函数;腰曲线

中图分类号: O 186 **文献标志码**: A **文章编号**: 1005-3026(2018)02-0301-04

Structure Functions on Normal Ruled Surface in 3-D Euclidean Space

YU Yan-hua, *YUE Li-dong*
(School of Sciences, Northeastern University, Shenyang 110819, China. Corresponding author: YUE Li-dong, E-mail: yuelidonglq@126.com)

Abstract: As special non-developable ruled surface, the normal ruled surface has good algebraic and geometric properties. Using the classical methods of differential geometry, the structure functions of the normal ruled surface in 3-D Euclidean Space are studied. According to the definition and standard equation of non-developable ruled surface in 3-D Euclidean Space, the definition and standard equation are given to the normal ruled surface. Based on the definition and standard equation of the normal ruled surface, the deep relation of the structure functions is obtained. Then some conclusions about the directrix, the striction line and the structure functions are obtained. By discussing the normal ruled surfaces of general helices and Mannheim curves in 3-D Euclidean Space, conclusions can be drawn that the normal ruled surfaces of general helices are positive spiral surfaces and the normal ruled surfaces of Mannheim curves are binormal ruled surfaces of their Mannheim partner curves.

Key words: 3-D Euclidean Space; non-developable ruled surface; normal ruled surface; structure function; striction line

直纹面是由直线的轨迹所形成的曲面. 柱面、锥面、单页双曲面、双曲抛物面、空间曲线的切线曲面等都是直纹面[1-2]. 直纹面广泛应用于工程实践中,例如飞机机翼、汽轮机叶轮等零件就常常采用直纹面作为型面;齿轮滚刀、某些特种回转刀具的刀槽曲面的一部分也是直纹面;对于某些法曲率绝对值稍大的曲面,通过构造衍生曲面的方法,也可以将其近似为直纹面进行处理[3].

本文主要研究三维欧氏空间中曲线的主法线曲面. 主法线曲面是由一条曲线的主法线所产生的直纹面. 主法线曲面是一类非可展直纹面,因此,对主法线曲面的研究可以丰富不可展曲面的相关内容.

收稿日期: 2016-09-21
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11371080).
作者简介: 于延华(1978-),女,湖北荆门人,东北大学副教授,博士.

1 预备知识

对于任意三维欧氏空间中的不可展直纹面,可以给出如下表示.

定义 1[4] 设不可展曲面 $\boldsymbol{X}(u,v)$ 的方程为

$$\boldsymbol{X}(u,v)=\boldsymbol{a}(u)+v\boldsymbol{b}(u), \tag{1}$$

其中 $|\boldsymbol{b}(u)|=1$,参数 u 是 $\boldsymbol{b}(u)$ 的弧长参数,导线 $\boldsymbol{a}(u)$ 是不可展曲面 $\boldsymbol{X}(u,v)$ 的腰曲线. 则 $\boldsymbol{X}(u,v)$ 的这种参数表示称为不可展曲面 $\boldsymbol{X}(u,v)$ 的标准方程.

设 $\boldsymbol{x}(u)=\boldsymbol{b}(u)$, $\dot{\boldsymbol{x}}(u)=\boldsymbol{\alpha}(u)$, $\boldsymbol{y}(u)=\boldsymbol{\alpha}(u)\times\boldsymbol{x}(u)$, 则

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{b}(u)=\boldsymbol{x}(u),\\&\dot{\boldsymbol{x}}(u)=\boldsymbol{\alpha}(u),\\&\dot{\boldsymbol{\alpha}}(u)=-\boldsymbol{x}(u)+\kappa_g(u)\boldsymbol{y}(u),\\&\dot{\boldsymbol{y}}(u)=-\kappa_g(u)\boldsymbol{\alpha}(u).\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

函数 $\kappa_g(u)$ 是球曲率函数[5-7], $\{\boldsymbol{\alpha}(u),\boldsymbol{x}(u),\boldsymbol{y}(u)\}$ 是单位球面曲线 $\boldsymbol{b}(u)$ 的球面 Frenet 标架. 由于 $\boldsymbol{a}(u)$ 是不可展曲面 $\boldsymbol{X}(u,v)$ 的腰曲线,由 $\boldsymbol{a}(u)\cdot\boldsymbol{b}(u)=0$,假设

$$\boldsymbol{a}(u)=\lambda(u)\boldsymbol{x}(u)+\mu(u)\boldsymbol{y}(u), \tag{3}$$

$\lambda(u)$, $\mu(u)$ 是 u 的函数.

定义 2[4] 函数 $\kappa_g(u)$, $\lambda(u)$ 和 $\mu(u)$ 称为非可展曲面 $\boldsymbol{X}(u,v)$ 的结构函数.

命题 1[4] 给定一个非可展直纹面 $\boldsymbol{X}(u,v)$ 及其标准方程,则除了空间位置差别外,不可展曲面完全由它的结构函数 $\kappa_g(u)$, $\lambda(u)$ 和 $\mu(u)$ 确定.

2 曲线的主法线曲面

2.1 主法线曲面的结构函数

定义 3 一条曲线的主法线所产生的直纹面称为主法线曲面.

设曲线 $\varGamma$:$\boldsymbol{r}(s)$,以及沿 $\boldsymbol{r}(s)$ 的 Frenet 标架 $\boldsymbol{\alpha}(s)$, $\boldsymbol{\beta}(s)$, $\boldsymbol{\gamma}(s)$ 满足 Frenet 公式:

$$\left.\begin{aligned}&\dot{\boldsymbol{r}}(s)=\boldsymbol{\alpha}(s),\\&\dot{\boldsymbol{\alpha}}(s)=\kappa(s)\boldsymbol{\beta}(s),\\&\dot{\boldsymbol{\beta}}(s)=-\kappa(s)\boldsymbol{\alpha}(s)+\tau(s)\boldsymbol{\gamma}(s),\\&\dot{\boldsymbol{\gamma}}(s)=-\tau(s)\boldsymbol{\beta}(s).\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

其中 s, $\kappa(s)$ 和 $\tau(s)$ 分别为 $\boldsymbol{r}(s)$ 的弧长参数、曲率和挠率.

曲线 $\boldsymbol{r}(s)$ 的主法线曲面 Σ 的方程为

$$\boldsymbol{X}(s,v)=\boldsymbol{r}(s)+v\boldsymbol{\beta}(s).$$

定义 4 设主法线曲面的方程为

$$\boldsymbol{X}(u,v)=\boldsymbol{A}(u)+v\boldsymbol{b}(u).$$

其中 $\boldsymbol{b}(u)=\boldsymbol{\beta}(u)$, $|\boldsymbol{b}(u)|=1$,参数 u 是 $\boldsymbol{b}(u)$ 的弧长参数,导线 $\boldsymbol{A}(u)$ 是主法线曲面 $\boldsymbol{X}(u,v)$ 的腰曲线;则 $\boldsymbol{X}(u,v)$ 的这种参数表示称为主法线曲面 $\boldsymbol{X}(u,v)$ 的标准方程.

由于 $|\boldsymbol{b}(u)|=1$, $\boldsymbol{b}(u)$ 是参数为 u 的球面曲线,由式(2)有

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{\beta}(u)=\boldsymbol{b}(u)=\bar{\boldsymbol{x}}(u),\\&\dot{\bar{\boldsymbol{x}}}(u)=\bar{\boldsymbol{\alpha}}(u),\\&\dot{\bar{\boldsymbol{\alpha}}}(u)=-\bar{\boldsymbol{x}}(u)+\kappa_g(u)\bar{\boldsymbol{y}}(u),\\&\dot{\bar{\boldsymbol{y}}}(u)=-\kappa_g(u)\bar{\boldsymbol{\alpha}}(u).\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

其中 $\bar{\boldsymbol{x}}(u)=\boldsymbol{b}(u)=\boldsymbol{\beta}(u)$, $\dot{\bar{\boldsymbol{x}}}(u)=\bar{\boldsymbol{\alpha}}(u)$, $\bar{\boldsymbol{y}}(u)=\bar{\boldsymbol{\alpha}}(u)\times\bar{\boldsymbol{x}}(u)$.

定理 1 设 $\boldsymbol{X}(u,v)$ 是一个主法线曲面,(u,v) 是主法线曲面上的任意点,则在这一点的 Frenet 标架 $\{\boldsymbol{\alpha}(s),\boldsymbol{\beta}(s),\boldsymbol{\gamma}(s)\}$ 和球面 Frenet 标架 $\{\bar{\boldsymbol{\alpha}}(u),\bar{\boldsymbol{x}}(u),\bar{\boldsymbol{y}}(u)\}$ 的关系为

$$\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{\alpha}}(u)\\\bar{\boldsymbol{x}}(u)\\\bar{\boldsymbol{y}}(u)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta&0&\sin\theta\\0&1&0\\-\sin\theta&0&\cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}(s)\\\boldsymbol{\beta}(s)\\\boldsymbol{\gamma}(s)\end{bmatrix}, \tag{6}$$

其中

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}u}=-\frac{\cos\theta}{\kappa}=\frac{\sin\theta}{\tau},\ \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}u}=\frac{1}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}},$$

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}=\frac{\dot{\kappa}\tau-\dot{\tau}\kappa}{\kappa^2+\tau^2},\tan\theta=-\frac{\tau}{\kappa},$$

$$\cos\theta=\frac{-\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}},\sin\theta=\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}.$$

证明 由式(4),式(5)可得

$$\bar{\boldsymbol{\alpha}}(u)=\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}u}=[-\kappa(s)\boldsymbol{\alpha}(s)+\tau(s)\boldsymbol{\gamma}(s)]\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}u}. \tag{7}$$

设

$$\bar{\boldsymbol{\alpha}}(u)=\cos\theta\boldsymbol{\alpha}(s)+\sin\theta\boldsymbol{\gamma}(s),\theta=\theta(s). \tag{8}$$

则式(7)两边自己作内积运算得

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}u}=\frac{1}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}.$$

比较式(7),式(8)有

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}u}=-\frac{\cos\theta}{\kappa}=\frac{\sin\theta}{\tau},\ \tan\theta=-\frac{\tau}{\kappa},$$

$$\cos\theta=\frac{-\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}},\ \sin\theta=\frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}.$$

对 $\tan\theta=-\dfrac{\tau}{\kappa}$ 两边同时关于 s 求导,得

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}=\frac{\dot{\kappa}\tau-\dot{\tau}\kappa}{\kappa^2+\tau^2},$$

又因为 $\bar{y}(u)=\bar{\alpha}(u)\times\bar{x}(u)$，所以定理 1 得证.

定理 2　设 $X(u,v)$ 是一个主法线曲面，函数 $\kappa_g(u)$，$\lambda(u)$ 和 $\mu(u)$ 是 $X(u,v)$ 的结构函数，(u,v) 是主法线曲面上的任意点，则在这一点的 Frenet 标架 $\{\alpha(s),\beta(s),\gamma(s)\}$ 和球面 Frenet 标架 $\{\bar{\alpha}(u),\bar{x}(u),\bar{y}(u)\}$ 的夹角 θ 只与 $\kappa_g(u)$ 有关，并有如下关系：

$$\theta=\int\kappa_g(u)\mathrm{d}u.$$

证明　对式(8)两边同时关于 u 求导，可得

$$\frac{\mathrm{d}\bar{\alpha}}{\mathrm{d}u}=-\sin\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}u}\alpha+\left(\kappa\cos\theta\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}u}-\tau\sin\theta\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}u}\right)\beta+\cos\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}u}\gamma.$$

又 $\dfrac{\mathrm{d}\bar{\alpha}}{\mathrm{d}u}=-\bar{x}(u)+\kappa_g(u)\bar{y}(u)$，则

$$\kappa_g(u)=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}u}.\tag{9}$$

对式(9)两边关于 u 作积分运算，定理 2 得证.

定理 3　设 $X(u,v)$ 是一个主法线曲面，函数 $\kappa_g(u)$，$\lambda(u)$ 和 $\mu(u)$ 是 $X(u,v)$ 的结构函数，则函数 $\kappa_g(u)$，$\lambda(u)$ 和 $\mu(u)$ 满足下面关系：

$$\lambda=-\mu\kappa_g-\frac{\int\lambda\mathrm{d}u\left(\kappa_g\int\lambda\mathrm{d}u-\mu'\right)}{\mu}.\tag{10}$$

证明　主法线曲面 $X(u,v)$ 的腰曲线

$$A(u)=r(u)-\frac{r'(u)\cdot b'(u)}{b'(u)^2}b(u)=r(u)-\cos\theta\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}u}b(u),$$

$$A'(u)=-\sin\theta\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}u}\bar{y}+\left[\sin\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}u}\right)^2-\cos\theta\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}u^2}\right]b,$$

由式(3)可得

$$\lambda(u)=\sin\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}u}\right)^2-\cos\theta\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}u^2},\tag{11}$$

$$\mu(u)=-\sin\theta\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}u}.\tag{12}$$

计算式(9)，式(11)，式(12)，定理 3 即得证.

由式(9)，式(11)，式(12)还可以得到主法线曲面 $X(u,v)$ 的结构函数 $\kappa_g(u)$，$\lambda(u)$ 和 $\mu(u)$ 与其导线 $r(s)$ 的曲率 $\kappa(s)$ 和挠率 $\tau(s)$ 之间的关系：

$$\kappa_g(u)=\frac{\kappa'(s)\tau(s)-\kappa(s)\tau'(s)}{(\kappa^2(s)+\tau^2(s))^{\frac{3}{2}}}=\frac{\kappa'(u)\tau(u)-\kappa(u)\tau'(u)}{\kappa^2(u)+\tau^2(u)},$$

$$\lambda(u)=\frac{\kappa'(s)\tau^2(s)-\kappa^2(s)\kappa'(s)-2\kappa(s)\tau(s)\tau'(s)}{(\kappa^2(s)+\tau^2(s))^{\frac{5}{2}}}=\frac{\kappa'(u)\tau^2(u)-\kappa^2(u)\kappa'(u)-2\kappa(u)\tau(u)\tau'(u)}{(\kappa^2(u)+\tau^2(u))^2},$$

$$\mu(u)=-\frac{\tau(s)}{\kappa^2(s)+\tau^2(s)}=-\frac{\tau(u)}{\kappa^2(u)+\tau^2(u)}.$$

2.2　主法线曲面的腰曲线

沿主法线曲面 $X(u,v)$ 的腰曲线 $A(u)$ 的 Frenet 标架 $\{\tilde{\alpha}(\tilde{s}),\tilde{\beta}(\tilde{s}),\tilde{\gamma}(\tilde{s})\}$ 满足 Frenet 公式：

$$\left.\begin{aligned}&\dot{A}(\tilde{s})=\tilde{\alpha}(\tilde{s}),\\&\dot{\tilde{\alpha}}(\tilde{s})=\tilde{\kappa}(\tilde{s})\tilde{\beta}(\tilde{s}),\\&\dot{\tilde{\beta}}(\tilde{s})=-\tilde{\kappa}(\tilde{s})\tilde{\alpha}(\tilde{s})+\tilde{\tau}(\tilde{s})\tilde{\gamma}(\tilde{s}),\\&\dot{\tilde{\gamma}}(\tilde{s})=-\tilde{\tau}(\tilde{s})\tilde{\beta}(\tilde{s}).\end{aligned}\right\}\tag{13}$$

其中 $\tilde{s}$，$\tilde{\kappa}(\tilde{s})$ 和 $\tilde{\tau}(\tilde{s})$ 分别为 $A(\tilde{s})$ 的弧长参数、曲率和挠率.

定理 4　设 $X(u,v)$ 是一个主法线曲面，(u,v) 是主法线曲面上的任意点，则在这一点的 Fernet 标架 $\{\tilde{\alpha}(\tilde{s}),\tilde{\beta}(\tilde{s}),\tilde{\gamma}(\tilde{s})\}$ 和球面 Frenet 标架 $\{\bar{\alpha}(u),\bar{x}(u),\bar{y}(u)\}$ 之间的关系为

$$\begin{bmatrix}\tilde{\alpha}(\tilde{s})\\\tilde{\beta}(\tilde{s})\\\tilde{\gamma}(\tilde{s})\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&\cos\vartheta&\sin\vartheta\\\sin\varphi&-\sin\vartheta\cos\varphi&\cos\vartheta\cos\varphi\\\cos\varphi&\sin\vartheta\sin\varphi&-\cos\vartheta\sin\varphi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{\alpha}(u)\\\bar{x}(u)\\\bar{y}(u)\end{bmatrix}.$$

曲率 $\tilde{\kappa}(\tilde{s})$ 和挠率 $\tilde{\tau}(\tilde{s})$ 满足

$$\tilde{\kappa}^2(\tilde{s})=\frac{(\lambda-\kappa_g\mu)^2(\lambda^2+\mu^2)+(\lambda'\mu-\lambda\mu')^2}{(\lambda^2+\mu^2)^3},$$

$$\tilde{\tau}(\tilde{s})=-\frac{(\lambda-\kappa_g\mu)[\lambda\mu''-\lambda''\mu+(\lambda\kappa_g+\mu)(\lambda-\kappa_g\mu)]}{(\lambda-\kappa_g\mu)^2(\lambda^2+\mu^2)+(\lambda'\mu-\lambda\mu')^2}-\frac{(\lambda'\mu-\lambda\mu')(2\lambda'-2\kappa_g\mu'-\kappa'_g\mu)}{(\lambda-\kappa_g\mu)^2(\lambda^2+\mu^2)+(\lambda'\mu-\lambda\mu')^2}.$$

其中

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{s}}{\mathrm{d}u}=\frac{\lambda}{\cos\vartheta}=\frac{\mu}{\sin\vartheta},\ \tan\vartheta=\frac{\mu}{\lambda},\ \frac{\mathrm{d}\tilde{s}}{\mathrm{d}u}=\sqrt{\lambda^2+\mu^2},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\tilde{s}}{\mathrm{d}u^2}=\frac{\lambda\lambda'+\mu\mu'}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}},\ \cos\vartheta=\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}},$$

$$\sin\vartheta=\frac{\mu}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}},\ \dot{\vartheta}(u)=\frac{\lambda\mu'-\lambda'\mu}{\lambda^2+\mu^2},$$

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{s}}{\mathrm{d}u}\tilde{\kappa}=\frac{\dot{\vartheta}}{\cos\varphi}=\frac{\cos\vartheta-\sin\vartheta\kappa_g}{\sin\varphi},$$

$$\cos\varphi=\frac{\lambda\mu'-\lambda'\mu}{\sqrt{(\lambda-\kappa_g\mu)^2(\lambda^2+\mu^2)+(\lambda'\mu-\lambda\mu')^2}},$$

$$\sin\varphi=\frac{(\lambda-\kappa_g\mu)(\lambda^2+\mu^2)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{(\lambda-\kappa_g\mu)^2(\lambda^2+\mu^2)+(\lambda'\mu-\lambda\mu')^2}},$$

$$\tan\varphi=\frac{(\lambda-\kappa_g\mu)(\lambda^2+\mu^2)^{\frac{1}{2}}}{\lambda\mu'-\lambda'\mu}.$$

$$\dot{\varphi}(u)=-\frac{[(\lambda\kappa_g+\mu)(\lambda\mu'-\lambda'\mu)+\mu\dot{\kappa}_g(\lambda^2+\mu^2)-2(\lambda-\mu\kappa_g)(\lambda\lambda'+\mu\mu')](\lambda\mu'-\lambda'\mu)+(\lambda-\mu\kappa_g)(\lambda\mu''-\lambda''\mu)(\lambda^2+\mu^2)}{(\lambda^2+\mu^2)^{\frac{1}{2}}[(\lambda-\kappa_g\mu)^2(\lambda^2+\mu^2)+(\lambda'\mu-\lambda\mu')^2]}.$$

证明　定理4证明过程同定理1.

由定理1和定理4可得定理5.

定理5　设 $X(u,v)$ 是一个主法线曲面，(u,v) 是主法线曲面上的任意点，则在这一点的 Fernet 标架 $\{\tilde{\boldsymbol{\alpha}}(\tilde{s}),\tilde{\boldsymbol{\beta}}(\tilde{s}),\tilde{\boldsymbol{\gamma}}(\tilde{s})\}$ 和 $\{\boldsymbol{\alpha}(s),\boldsymbol{\beta}(s),\boldsymbol{\gamma}(s)\}$ 之间的关系为

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}(s)\\ \boldsymbol{\beta}(s)\\ \boldsymbol{\gamma}(s)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\sin\theta\sin\vartheta & \cos\theta\sin\varphi-\sin\theta\cos\vartheta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi+\sin\theta\cos\vartheta\sin\varphi\\ \cos\vartheta & -\sin\vartheta\cos\varphi & \sin\vartheta\sin\varphi\\ \cos\theta\sin\vartheta & \sin\theta\sin\varphi+\cos\theta\cos\vartheta\cos\varphi & \sin\theta\cos\varphi-\cos\theta\cos\vartheta\sin\varphi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{\alpha}}(\tilde{s})\\ \tilde{\boldsymbol{\beta}}(\tilde{s})\\ \tilde{\boldsymbol{\gamma}}(\tilde{s})\end{bmatrix}.$$

2.3　特殊曲线的主法线曲面

定理6　在三维欧氏空间中,Mannheim 曲线 Γ 的主法线曲面是其侣线 Γ_1 的副法线曲面.

证明　设曲线 $\boldsymbol{r}(s)$ 是三维欧氏空间中的 Mannheim 曲线,其曲率和挠率满足

$$\kappa(s)=c(\kappa^2(s)+\tau^2(s)),$$

且 c 是非零常数.

三维欧氏空间中 Mannheim 曲线的主法线的腰曲线是 Mannheim 曲线的侣线[8-10]. 又因为

$$\lambda(u)=\frac{\kappa'(u)\tau^2(u)-\kappa^2(u)\kappa'(u)-2\kappa(u)\tau(u)\tau'(u)}{(\kappa^2(u)+\tau^2(u))^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(\frac{\kappa(u)}{\kappa^2(u)+\tau^2(u)}\right)=0,$$

即三维欧氏空间中 Mannheim 曲线的主法线曲面是其侣线的副法线曲面.

定理7　在三维欧氏空间中,一般螺线的主法线曲面是正螺面.

证明　设曲线 $\boldsymbol{r}(s)$ 是三维欧氏空间中的一般螺线,其曲率和挠率满足 $\frac{\kappa(s)}{\tau(s)}=c$,且 c 是非零常数.

把 $\frac{\kappa(s)}{\tau(s)}=c$ 代入 $\kappa_g(u)$,可以得到

$$\kappa_g(u)=\frac{\kappa'(s)\tau(s)-\kappa(s)\tau'(s)}{(\kappa^2(s)+\tau^2(s))^{\frac{3}{2}}}=\frac{\kappa'(u)\tau(u)-\kappa(u)\tau'(u)}{\kappa^2(u)+\tau^2(u)}=0,$$

即在三维欧氏空间中,一般螺线的主法线曲面是正螺面.

3　结　　论

1）主要讨论了三维欧氏空间中主法线曲面的结构函数. 给出主法线曲面的结构函数满足的关系,以及结构函数,导线和腰曲线三者的联系.

2）考虑 Mannheim 曲线和一般螺线的主法线曲面,得到 Mannheim 曲线的主法线曲面是其侣线的副法线曲面,一般螺线的主法线曲面是正螺面.

参考文献:

[1] do Carmo M. Differential geometry of curves and surfaces [M]. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1976: 56-78.

[2] 梅向明,黄敬之. 微分几何[M]. 北京:高等教育出版社, 1998: 37-179.
(Mei Xiang-ming, Huang Jing-zhi. Differential geometry [M]. Beijing: Higher Education Press, 1998: 37-179.)

[3] 焦建彬,于华. 直纹面四坐标侧铣数控加工中的误差分析 [J]. 机械工程学报, 2001, 37(4): 44-47.
(Jiao Jian-bin, Yu Hua. Error analysis of four axis NC machining of ruled surface [J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2001, 37(4): 44-47.)

[4] Liu H L, Yu Y H, Jung S D. Invariants of non-developable ruled surface in Euclidean 3-space [J]. *Contributions to Algebra and Geometry*, 2014, 55(1): 189-199.

[5] Liu H L, Yuan Y. Pitch functions of ruled surfaces and B-scrolls in Minkowski 3-space [J]. *Journal of Geometry and Physics*, 2012, 66(1): 47-52.

[6] Liu H L. Characterizations of ruled surfaces with lightlike ruling in Minkowski 3-space [J]. *Results in Mathematics*, 2009, 56: 357-368.

[7] Olver P J. Differential invariants of surfaces [J]. *Journal of Differential Geometry and Application*, 2009, 27(2): 230-239.

[8] Kenmotsu K. Surfaces with constant mean curvature [M]. Providence, RI: American Mathematical Society, 2003: 21-65.

[9] Yu Y H, Liu H L, Jung S D. Structure and characterization of ruled surface in Euclidean 3-space [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2014, 233: 252-259.

[10] Liu H L, Wang F. Mannheim partner curves in 3-space [J]. *Journal of Geometry*, 2008, 88(1): 120-126.