

doi: 10.12068/j.issn.1005-3026.2018.06.001

# 基于伪数据相关矩阵二次重构的 DOA 估计新算法

刘晓志, 宋牧野, 李鸿儒

(东北大学 信息科学与工程学院, 辽宁 沈阳 110819)

**摘 要:** 针对传统波达方向估计算法在强信号邻近时弱信号难以估计和信源相干情况下算法性能失效的问题,通过对传统波达方向估计算法的理论推导和研究分析,变换阵元的数据接收矩阵来重构协方差矩阵,再对新的协方差矩阵对应信号的较大特征值进行重新排序,构造出伪数据相关矩阵,并结合 MUSIC 谱进行谱峰搜索完成对强弱邻近相干信源的波达方向估计.通过仿真比较,结果表明新算法消除了信号的相干性,不造成阵列孔径损失,并能对强弱邻近信号作出准确估计.

**关键词:** 波达方向估计;伪数据相关矩阵;二次重构;强弱邻近信号;解相干

中图分类号: TN 911.23

文献标志码: A

文章编号: 1005-3026(2018)06-0761-06

## New Algorithm of DOA Estimation Based on the Twice Reconstruction of Pseudo Data Correlation Matrix

LIU Xiao-zhi, SONG Mu-ye, LI Hong-ru

(School of Information Science & Engineering, Northeastern University, Shenyang 110819, China. Corresponding author: LIU Xiao-zhi, E-mail: liuxiaozi@mail.neu.edu.cn)

**Abstract:** Due to the problem that the traditional direction of arrival (DOA) estimation algorithm can hardly estimate the weak signal when the strong signal is adjacent and it will fail when the signals are coherent, the covariance matrix was reconstructed by corresponding transformation for the received data matrix of array elements on the basis of theoretical derivation and analysis of traditional estimation algorithms. Then the pseudo data correlative matrix was constructed by rearranging the larger eigenvalues of the reconstructed covariance matrix. Finally combined with the MUSIC spectrum to search spectral peaks, the DOA estimation of strong and weak adjacent coherent signals were finished. By simulation, the results show that the coherence of signals could be eliminated by the proposed algorithm without reducing the array aperture. What's more, the DOA of strong and weak adjacent signals could be estimated accurately.

**Key words:** direction of arrival (DOA) estimation; pseudo data correlation matrix; twice reconstruction; strong and weak adjacent signals; decoherence

波达方向(direction of arrival, DOA)估计作为阵列信号处理技术的重要研究分支,在雷达、声呐及无线通信等领域被广泛应用<sup>[1-2]</sup>.经典 DOA 估计算法如 MUSIC 算法<sup>[3-4]</sup>对能量差异较小、相距较远和非相关的信号的入射角有良好的估计性能,但当能量差异较大且角度间隔较小的信号入射阵列天线时,强信号谱峰会掩盖弱信号,使弱信号 DOA 无法估计.针对上述问题,现有的解决方法主要包括干扰阻塞法<sup>[5]</sup>、RELAX 法<sup>[6]</sup>、噪声子

空间扩充法<sup>[7]</sup>等.干扰阻塞法要求强信号 DOA 是已知的,且用阻塞矩阵抑制强信号的同时弱信号能量也会被衰减;RELAX 方法通过迭代处理估计信号的 DOA,但该方法在强弱信号夹角较小时,收敛速度慢、运算量大;基于噪声子空间扩充的方法只能在已知强信号个数和信号总个数前提下才可以实现强弱信号的 DOA 估计.另一方面,当受环境影响入射阵列天线的信号发生相干时,传统 DOA 估计算法失效.对于信号的解相干问

题,现有算法主要包括空间平滑算法<sup>[8-9]</sup>、前后向平均法<sup>[10]</sup>和矩阵分解法<sup>[11]</sup>等.空间平滑算法利用被分组的子阵间相位差实现信号间的解相干,却以损失阵列有效孔径为代价,使算法分辨率降低;前后向平均算法只能对两个相干信号进行 DOA 估计,因此该算法的应用范围很有局限性;矩阵分解法对相干信号进行解相干同时也会伴随阵列孔径的损失<sup>[12]</sup>.

在邻近信号能量强弱差异较大且相干的复杂情况下,针对上述方法的限制与不足,本文提出一种基于伪数据相关矩阵二次重构(pseudo data matrix twice reconstruction, PDMTR)算法,通过变换重构协方差矩阵并交换重构矩阵的大特征值顺序构造新的伪数据相关矩阵,最后结合传统算法并通过谱峰搜索实现能量强弱差异较大、间隔较小的相干信号的 DOA 估计,并对新算法的有效性进行仿真验证.

## 1 阵列模型和相干信号

假设有间距为  $d$  的  $M$  个全向天线组成均匀等距线型阵列模型,如图 1 所示.

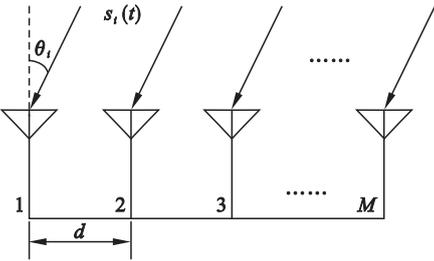


图 1 阵列天线模型

Fig. 1 Model of array antenna

假设有  $N$  个波长相同的远场窄带信号 ( $N < M$ ) 以角度为  $\theta_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) 入射到阵列上,若以阵元 1 为参考阵元,可将第  $k$  ( $k = 1, 2, \dots, M$ ) 个阵元接收到的信号表示为

$$x_k(t) = \sum_{i=1}^N s_i(t) e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}(k-1)d\sin\theta_i} + n_k(t). \quad (1)$$

其中:  $s_i(t)$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) 为第  $i$  个人射到天线阵列的信号;  $\lambda$  为信号波长;  $n_k(t)$  为  $t$  时刻第  $k$  个阵元上接收到的与信号不相关的高斯白噪声,其均值为零、方差为  $\sigma^2$ . 将式(1)用矩阵形式表示为

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{A}(\theta)\mathbf{S}(t) + \mathbf{N}(t). \quad (2)$$

其中:  $\mathbf{X}(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_M(t)]^T$  为数据接收矢量;  $\mathbf{S}(t) = [s_1(t), s_2(t), \dots, s_N(t)]^T$  为入射信号矢量;  $\mathbf{A}(\theta) = [\mathbf{a}(\theta_1) \mathbf{a}(\theta_2) \dots \mathbf{a}(\theta_N)]$  为方

向矩阵,且  $\mathbf{a}(\theta_i) = [1, e^{-j\frac{2\pi d}{\lambda}\sin\theta_i}, \dots, e^{-j(M-1)\frac{2\pi d}{\lambda}\sin\theta_i}]^T$  为入射角度  $\theta_i$  方向的导向矢量;  $\mathbf{N}(t) = [n_1(t), n_2(t), \dots, n_M(t)]^T$  为噪声矢量.

入射到天线阵列的多个信号源之间可以分为相关、不相关和相干三种情况,对于两平稳信号  $s_i(t)$  和  $s_j(t)$ ,其相关系数为

$$\rho_{ij} = \frac{E[s_i(t)s_j^*(t)]}{\sqrt{E[|s_i(t)|^2]E[|s_j(t)|^2]}}. \quad (3)$$

由 Schwartz 不等式可知,  $|\rho_{ij}| \leq 1$ . 因此,信号间相关性定义为:当  $\rho_{ij} = 0$  时,  $s_i(t)$  和  $s_j(t)$  相互独立;当  $0 < |\rho_{ij}| < 1$  时,  $s_i(t)$  和  $s_j(t)$  是相关的;当  $|\rho_{ij}| = 1$  时,  $s_i(t)$  和  $s_j(t)$  相干<sup>[10]</sup>.

## 2 经典 MUSIC 算法

由 Schmidt 提出的经典 MUSIC 算法是最早的高分辨率信号 DOA 估计算法,该算法基于接收数据矩阵特征分解,利用噪声子空间特征向量与导向矢量间的正交特性,构造空间谱,并通过对谱函数的峰值搜索检测入射信号的 DOA. 接收数据  $\mathbf{X}(t)$  的协方差矩阵  $\mathbf{R}_x$  为

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_x &= E[\mathbf{X}(t)\mathbf{X}^H(t)] = \\ &= \mathbf{A}E[\mathbf{S}(t)\mathbf{S}^H(t)]\mathbf{A}^H + \sigma^2\mathbf{I} = \\ &= \mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{A}^H + \sigma^2\mathbf{I}. \end{aligned} \quad (4)$$

其中:  $\mathbf{P}$  为入射信号  $\mathbf{S}(t)$  的协方差矩阵;  $\mathbf{I}$  为单位矩阵;  $\mathbf{H}$  表示矩阵的共轭转置. 由于信号和噪声之间不相关,则可对  $\mathbf{R}_x$  进行特征值分解,可得到:  $\mathbf{R}_x = \mathbf{U}_s\mathbf{\Sigma}_s\mathbf{U}_s^H + \mathbf{U}_n\mathbf{\Sigma}_n\mathbf{U}_n^H$ , 其中  $\mathbf{\Sigma}_s$  和  $\mathbf{\Sigma}_n$  分别是由前  $N$  个较大特征值和后  $(M - N)$  个较小特征值组成的对角阵;  $\mathbf{U}_s$  和  $\mathbf{U}_n$  分别为相应特征值所对应的特征向量张成的信号子空间与噪声子空间. 由于方向矩阵  $\mathbf{A}$  中各列矢量与噪声子空间是正交关系,可得  $\mathbf{U}_n^H\mathbf{a}(\theta_i) = 0$ , 则 MUSIC 的空间谱函数为

$$P_{\text{MUSIC}}(\theta_i) = \frac{1}{\mathbf{a}^H(\theta_i)\mathbf{U}_n\mathbf{U}_n^H\mathbf{a}(\theta_i)}. \quad (5)$$

根据谱函数表达式(5),通过谱峰搜索可以估计出信号的 DOA.

## 3 伪数据相关矩阵二次重构算法

理论上,经典 MUSIC 算法信号子空间和噪声子空间正交的前提是协方差矩阵  $\mathbf{R}_x$  满秩,即入射信号弱相干或不相干,此时可以达到任意高的分辨率. 但是当入射信号是相干信号或邻近强弱

差异较大的信号时,会造成  $\mathbf{R}_x$  不满秩或  $\mathbf{R}_x$  经特征分解得到的信号子空间中弱信号占据信息量较少而被强信号掩盖,从而导致弱信号难以估计,使经典 MUSIC 算法的估计性能失效。

本文提出一种基于伪数据相关矩阵二次重构的 DOA 估计新算法(PDMTR 算法),该算法将阵列接收数据矢量作相应变换,重构协方差矩阵,使信号协方差矩阵的秩恢复为满秩,即  $\text{rank}(\mathbf{R}_x) = N$ ,并交换重构协方差矩阵的强弱信号特征值构造伪数据相关矩阵.在伪数据相关矩阵中增大弱信号对应的特征值、减小强信号对应的特征值,使弱信号对应的特征矢量在伪数据相关矩阵中所占的比重得到增加,实现了削弱强信号、增强弱信号的目的.进而通过谱峰搜索有效地对强弱邻近相干信源的 DOA 作出估计。

假设信源个数已知情况下,基于 PDMTR 算法进行 DOA 估计的具体实现步骤如下。

1) 求阵列接收数据矢量  $\mathbf{X}(t)$  的协方差矩阵:

$$\mathbf{R}_x = \mathbf{E}[\mathbf{X}(t)\mathbf{X}^H(t)]. \quad (6)$$

2) 将阵列接收的数据矢量  $\mathbf{X}(t)$  变换为  $\mathbf{Y}(t)$ :

$$\mathbf{Y}(t) = \mathbf{F}\mathbf{X}^*(t). \quad (7)$$

其中:  $\mathbf{X}^*(t)$  是  $\mathbf{X}(t)$  的复共轭矩阵;  $\mathbf{F}$  为  $M$  阶反对角单位矩阵,即

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}_{M \times M}. \quad (8)$$

3) 求  $\mathbf{Y}(t)$  的协方差矩阵:

$$\mathbf{R}_y = \mathbf{E}[\mathbf{Y}(t)\mathbf{Y}^H(t)] = \mathbf{F}\mathbf{R}_x^* \mathbf{F}. \quad (9)$$

其中,  $\mathbf{R}_x^*$  为  $\mathbf{R}_x$  的复共轭矩阵。

4) 由  $\mathbf{R}_x$  和  $\mathbf{R}_y$  的算数平均值重构协方差矩阵  $\mathbf{R}$ , 即

$$\mathbf{R} = (\mathbf{R}_x + \mathbf{R}_y)/2 = (\mathbf{R}_x + \mathbf{F}\mathbf{R}_x^* \mathbf{F})/2. \quad (10)$$

根据矩阵理论,矩阵  $\mathbf{R}_x$ ,  $\mathbf{R}_y$  和  $\mathbf{R}$  具有相同的噪声子空间。

5) 对重构的协方差矩阵  $\mathbf{R}$  进行特征值分解:

$$\mathbf{R} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{U}^H. \quad (11)$$

其中,  $\mathbf{\Sigma}$  是由特征值组成的对角矩阵,即

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_N & & & \\ & & & \lambda_{N+1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_M \end{bmatrix}. \quad (12)$$

且其特征值从大到小排列:  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_M$ ,  $\mathbf{U}$  为特征值对应的特征矢量空间。

6) 将前  $N$  个较大特征值所对应的特征向量按序排列构成信号子空间  $\mathbf{U}_s$ , 后  $(M - N)$  个较小特征值所对应的特征向量按序排列构成噪声子空间  $\mathbf{U}_n$ 。

7) 根据特征值分解理论,特征分解所得到的降序排列的特征值  $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_N$  分别对应由强到弱的  $N$  个信号以及相应的特征向量  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_N$ . 现在对特征值以升序进行重新排列,而特征向量却不变,则重构伪数据相关矩阵时强信号特征向量  $\mathbf{u}_1$  与小特征值  $\lambda_N$  对应,弱信号特征向量  $\mathbf{u}_N$  与大特征值  $\lambda_1$  对应,进而达到增强伪数据相关矩阵中弱信号所占比重、减小强信号所占比重的目的.具体特征值重新排列和二次重构伪数据相关矩阵的描述如下。

将入射信号对应的较大特征值  $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_N$  重新排列得到  $\tilde{\mathbf{\Sigma}}$ :

$$\tilde{\mathbf{\Sigma}} = \begin{bmatrix} \lambda_N & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_1 & & & \\ & & & \lambda_{N+1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_M \end{bmatrix}. \quad (13)$$

通过矩阵  $\tilde{\mathbf{\Sigma}}$  二次重构伪数据相关矩阵为

$$\tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{U}\tilde{\mathbf{\Sigma}}\mathbf{U}^H. \quad (14)$$

8) 将传统 MUSIC 算法空间谱与重构的伪数据相关矩阵  $\tilde{\mathbf{R}}$  结合,得到 PDMTR 算法波达角估计谱函数为

$$P_{\text{PDMTR}}(\theta_i) = \frac{\mathbf{a}^H(\theta_i)\tilde{\mathbf{R}}\mathbf{a}(\theta_i)}{\mathbf{a}^H(\theta_i)\mathbf{U}_n\mathbf{U}_n^H\mathbf{a}(\theta_i)}. \quad (15)$$

通过谱峰搜索,实现邻近相干信源的波达方向角度估计。

根据理论推导,相比能满足实时应用的空间平滑类算法要构造多个子阵并对多个子阵的数据协方差阵进行特征值分解的情况<sup>[8]</sup>, PDMTR 算法只需进行两次特征分解,具有更高的计算效率,因此能更高效地满足实时应用。

## 4 仿真实验与分析

为对比经典 MUSIC 算法、前向空间平滑(forward spatial smoothing, FSS)算法和本文提出的 PDMTR 算法的性能,在阵列为各向同性等间

距均匀线阵、阵元个数为 8、阵元间距  $d = 0.5\lambda$ 、快拍数为 1 024、噪声为理想高斯白噪声的条件下进行仿真实验。

#### 4.1 算法对相距较远相干信源的估计性能

有两个功率相等的相干信源分别以角度  $-10^\circ$  和  $20^\circ$  方向入射到阵列天线上,信噪比均为 30 dB,仿真结果如图 2 所示。

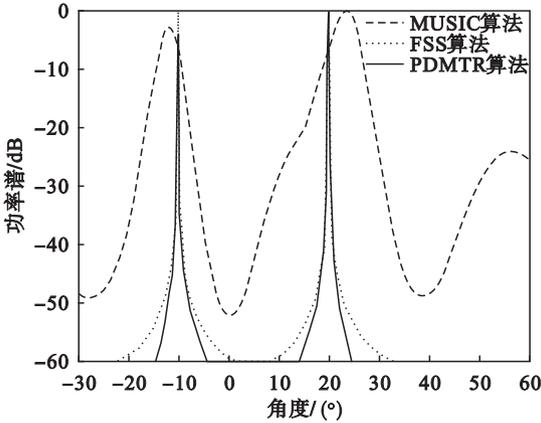


图 2 远距离相干信源的 DOA 估计

Fig. 2 DOA estimation of far coherent signals

由图 2 可以看出,在信源相干情况下经典 MUSIC 算法的估计结果出现较大偏差,而 FSS 算法和 PDMTR 算法都可以较精确地估计出相干信源的方向,但本文提出 PDMTR 算法形成的尖峰更加尖锐,角度跨度小,说明其在信号的入射方向上可以更快形成峰值,对角度的分辨能力更强,灵敏度更高。

在 FSS 算法和 PDMTR 算法都能达到解相干的基础上,比较两种算法在不同入射相干信源数目情况下解相干所需的阵元数,如表 1 所示。

表 1 算法解相干所需阵元数比较

Table 1 Element number comparison of decoherence algorithms

| 入射相干信源数 | FSS 算法所需阵元数 | PDMTR 算法所需阵元数 |
|---------|-------------|---------------|
| 1       | 2           | 2             |
| 2       | 4           | 3             |
| ⋮       | ⋮           | ⋮             |
| $N$     | $2N$        | $N+1$         |

从表 1 可知,估计  $N$  个相干信源时,FSS 算法需要  $2N$  个阵元<sup>[8]</sup>,而根据式(15),本文 PDMTR 算法只要保证有一个特征值对应的特征向量构成的噪声子空间  $U_n$  存在,即可对相干信号进行 DOA 估计,即估计  $N$  个相干信号时只需  $N+1$  个阵元。所以两种算法在对相同数目相干信源进行估计时,PDMTR 算法不会造成阵列孔径的损失。

因此,本文提出的 PDMTR 算法能在保证估计精度的同时更加节省阵元个数。

#### 4.2 算法对非相干强弱邻近信源的估计性能

有两个非相干邻近信源分别以角度为  $18^\circ$  和  $20^\circ$  方向入射到阵列天线,信噪比分别为 50 dB 和 10 dB,仿真结果如图 3 所示。

理论上,在信源非相干条件下三种算法都可以对波达方向做出精确估计,但是通过图 3 仿真结果看出,当两个信源角度间隔为  $2^\circ$  且信号强弱差距较大时,由于强信号会掩盖弱信号,使经典 MUSIC 算法和 FSS 算法只能估计出邻近信源中强信号的 DOA,不能估计出弱信号的 DOA,所以这两种算法在对强弱邻近信号估计时会失效。然而本文提出的 PDMTR 算法在这种情况下克服了强信号掩盖弱信号的不足,对强弱邻近信号都可以作出更精确的估计。

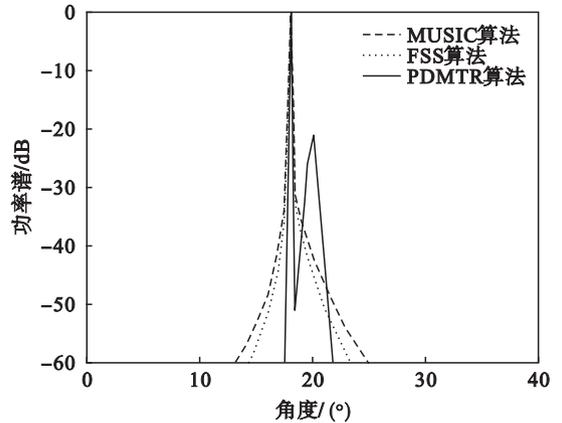


图 3 非相干强弱邻近信源的 DOA 估计

Fig. 3 DOA estimation of strong and weak adjacent incoherent signals

#### 4.3 算法对多个相干信源的估计性能

现有入射角度及信噪比分别为  $(-15^\circ, 50 \text{ dB})$ ,  $(-13^\circ, 10 \text{ dB})$ ,  $(25^\circ, 50 \text{ dB})$ ,  $(30^\circ, 50 \text{ dB})$  和  $(45^\circ, 50 \text{ dB})$  的 5 个相干信源入射到阵列天线,仿真结果如图 4 所示。

从图 4 的仿真结果可以看到,在多个相干信源条件下,MUSIC 算法完全失效。结合表 1,FSS 算法在阵元个数为  $N$  的情况下,最多只能对  $N/2$  个相干信源做出估计,所以在仿真条件为阵元个数为 8 时,最多只能估计出 4 个相干信源,在相干信源数目超过 4 个时,FSS 算法也无法实现 DOA 估计。而本文提出的 PDMTR 算法在阵元个数为  $N$  时最多可以估计出  $N-1$  个相干信源,所以该算法在相同条件下能在来波方向形成尖锐谱峰,精确地对 5 个含有强弱邻近信号且相干的信源作出 DOA 估计。

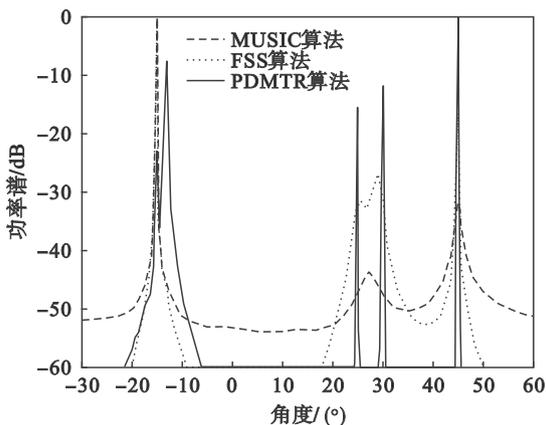


图 4 多个相干信源情况下的 DOA 估计

Fig. 4 DOA estimation of multi-coherent signals

#### 4.4 算法 DOA 估计性能和弱信号检测概率

已知 DOA 估计均方根误差 (RMSE) 公式为

$$\theta_{\text{RMSE}} = \sqrt{\frac{1}{M \times N} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N (\hat{\theta}_n(m) - \theta_n)^2} \quad (16)$$

其中:  $M$  为独立实验次数;  $N$  为信号个数;  $\hat{\theta}_n(m)$  为第  $m$  次对第  $n$  个信号的 DOA 估计值;  $\theta_n$  为第  $n$  个信号的 DOA 真实值。

有两相干信源分别以角度  $-10^\circ$  和  $20^\circ$  方向入射到阵列天线上, 在信噪比从  $-10 \text{ dB} \sim 10 \text{ dB}$  变化, 取步长为  $2 \text{ dB}$ , 根据式 (15) 在不同的信噪比下分别进行 100 次蒙特卡洛实验, 得出 FSS 算法和 PDMTR 算法对相干信号 DOA 估计的 RMSE 随着信噪比的变化关系, 如图 5 所示。

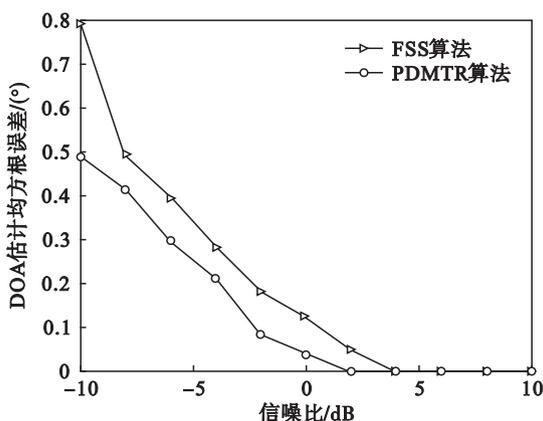


图 5 算法 RMSE 随信噪比变化关系

Fig. 5 Relationship between RMSE and SNR

根据图 5 可知, 在信噪比大于  $4 \text{ dB}$  时, 两种算法的 DOA 估计均方根误差均为零, 即在较大信噪比条件下, 两种算法均可实现相干信源 DOA 精确估计, 但当信噪比较小时, 相比于 PDMTR 算法, FSS 算法对信源的 DOA 估计性能较差, 均方

根误差接近  $0.8^\circ$ , 而 PDMTR 算法在相同条件下的均方根误差在  $0.5^\circ$  以下, 误差更小, 说明 PDMTR 算法在低信噪比时具有更好的估计性能。

另有两个强弱邻近信号入射到阵列天线, 强信号的波达角度为  $0^\circ$ , 信噪比为  $50 \text{ dB}$ , 弱信号信噪比为  $10 \text{ dB}$ , 角度在  $0.5^\circ \sim 3.5^\circ$  内变化, 取步长为  $0.3^\circ$ , 在蒙特卡洛实验次数为 100 的条件下, 对 MUSIC 算法、FSS 算法和本文提出的 PDMTR 算法对弱信号的检测概率随弱信号波达角度变化关系进行仿真, 如图 6 所示。

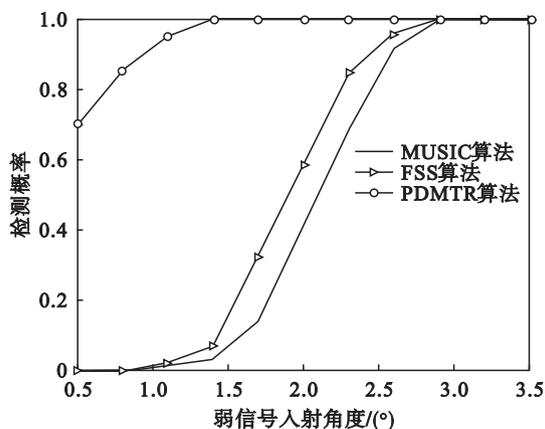


图 6 算法对弱信号检测概率

Fig. 6 Detection probability of weak signals

根据图 6 可知, 当强弱信号邻近时, 本文提出的 PDMTR 算法在强弱信号间隔为  $1.5^\circ$  时检测概率即达到 1. 此时经典 MUSIC 算法基本无法检测到弱信号, 只有在二者间隔大于  $3^\circ$  时才能估计出弱信号 DOA; FSS 算法对弱信号的检测概率略高于 MUSIC 算法, 但依然性能较差. 所以 PDMTR 算法在低信噪比和强弱信号邻近条件下, 比 MUSIC 算法和 FSS 算法具备更好的 DOA 估计性能。

## 5 结 语

本文提出了基于伪数据相关矩阵二次重构的波达方向估计新算法. 该算法在对数据接收矢量的协方差矩阵进行重构的基础上, 对其特征值进行重新排序后再构造伪数据相关矩阵, 并结合谱峰搜索实现强弱信源邻近情况下相干信源的 DOA 估计. 经过仿真验证, 本文提出的算法可以在不损失有效阵列孔径基础上实现相干信号 DOA 估计, 在相同信噪比下有较小的均方根误差, 并克服了强弱信号邻近时弱信号难以估计问题, 有着较高的弱信号检测概率. (下转第 770 页)