

# 失谐整体叶盘的硬涂层减振研究

高峰, 孙伟

(东北大学 机械工程与自动化学院, 辽宁 沈阳 110819)

**摘 要:** 提出一种对叶片涂敷硬涂层的减振方法来提高失谐整体叶盘的可靠性,并以叶片双面涂敷 NiCoCrAlY + YSZ 硬涂层的失谐整体叶盘为例进行振动研究. 首先,为了保证计算精度的前提下提高计算效率,利用固定界面动刚度模态综合法对涂层叶盘有限元模型进行了减缩处理;其次,基于该有限元减缩模型对涂层叶盘进行模态分析,并与全尺寸有限元模型做出了数据比较;最后探究了硬涂层对整体叶盘的影响. 研究表明, NiCoCrAlY + YSZ 硬涂层具有较强的阻尼效应,能够显著抑制整体叶盘的共振响应.

**关 键 词:** 失谐整体叶盘;硬涂层;减缩模型;阻尼减振

中图分类号: TJ 650.3; TB 535

文献标志码: A

文章编号: 1005-3026(2018)06-0856-06

## On the Vibration Reduction of Mistuned Blisks by Hard Coating

GAO Feng, SUN Wei

(School of Mechanical Engineering & Automation, Northeastern University, Shenyang 110819, China.

Corresponding author: SUN Wei, E-mail: weisun@mail.neu.edu.cn)

**Abstract:** A vibration reduction method by hard coating was proposed to improve the working reliability of mistuned blisks (integrally bladed disks), and the mistuned blisk with depositing NiCoCrAlY + YSZ hard coating on both sides of the blades was taken as an example to conduct the vibration investigation. Firstly, the ROM (reduced-order model) of the hard-coated blisk, which can improve the computational efficiency under the premise of ensuring the computational precision, was established by using an improved fixed-IDSMSM (fixed interface dynamic stiffness modal synthesis method). Secondly, the modal analysis of the hard-coated blisk was achieved based on the proposed ROM, and the results were compared with those of the FOM (full-order FEM). Finally, the influence of hard coating on mistuned blisks was studied. The results revealed that the NiCoCrAlY + YSZ hard coating has a good damping effect on mistuned blisks, and can suppress remarkably the resonant response of mistuned blisks.

**Key words:** mistuned blisk; hard coating; reduced-order model; damped vibration reduction

整体叶盘在气体激励下承受宽频激励,而且轮盘与叶片的刚度非常相近,这会促使其振动局部超标,严重威胁发动机的安全性与可靠性<sup>[1]</sup>. 阻尼减振是提高叶片寿命的较为可行的方案. 由于整体叶盘的一体化结构特性,对其实施干摩擦阻尼减振<sup>[2]</sup>非常困难. 为此,必须设计一种全新的阻尼器实现整体叶盘的减振.

硬涂层主要是指由金属基、陶瓷基或两者混合制成的涂层材料,具有抗高温、抗摩擦和抗腐蚀的能力. 近年来发现,硬涂层还能够降低构件的振

动应力<sup>[3-5]</sup>. 所以,本文考虑在叶片涂敷硬涂层来实现整体叶盘的减振. 事实上,这种减振理念已经被 NASA 的研究人员初步应用并取得很好的效果<sup>[6]</sup>. 为了有效实施整体叶盘的硬涂层阻尼减振,需要对涂层叶盘进行系统化研究,主要包括分析模型的建立与动力学分析.

集中和连续参数模型<sup>[7-8]</sup>实际结构具有较大差距,所以大量研究集中于有限元模型<sup>[9]</sup>. 航空发动机整体叶盘是大型复杂的机械结构件,如果直接对其全尺寸有限元模型进行分析通常需要耗

费大量计算资源. 对于具有失谐特征的整体叶盘, 其有限元模型的减缩已成为结构振动特性分析的首要问题<sup>[10]</sup>. 子结构模态综合法以瑞利-里兹法为理论基础, 其基本思想是依据先分解后综合的原则<sup>[11]</sup>.

本文选取叶片双面涂敷 NiCoCrAlY + YSZ 硬涂层的整体叶盘为研究实例, 推导了固定界面动刚度模态综合法的数学表达式, 并对涂层叶盘的有限元模型进行了减缩; 利用有限元减缩模型获取涂层叶盘的模态参数, 并从计算精度与效率两方面作出评估; 对涂敷硬涂层前后的整体叶盘固有频率、模态损耗因子以及频响作出比较, 探究了硬涂层对整体叶盘的动力学特性的影响.

## 1 涂层叶盘的减缩建模

在不考虑系统阻尼影响的情况下, 则涂层叶盘的动力学方程可以表示为

$$\mathbf{M}_{cs} \ddot{\mathbf{X}}_{cs} + \mathbf{K}_{cs} \mathbf{X}_{cs} = \mathbf{F}_{cs}. \quad (1)$$

其中:  $\mathbf{K}_{cs}$  与  $\mathbf{M}_{cs}$  分别表示涂层叶盘的刚度矩阵与质量矩阵;  $\mathbf{X}_{cs}$  表示位移向量;  $\mathbf{F}_{cs}$  表示激励力.

根据模态综合法的基本思想, 将涂层叶盘分离为轮盘子结构和涂层叶片子结构, 则子结构的刚度矩阵  $\mathbf{K}^r$ 、质量矩阵  $\mathbf{M}^r$  与位移向量  $\mathbf{X}^r$  分别表示为

$$\mathbf{K}^r = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ii}^r & \mathbf{K}_{ij}^r \\ \mathbf{K}_{ji}^r & \mathbf{K}_{jj}^r \end{bmatrix}, \quad (2)$$

$$\mathbf{M}^r = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{ii}^r & \mathbf{M}_{ij}^r \\ \mathbf{M}_{ji}^r & \mathbf{M}_{jj}^r \end{bmatrix}, \quad (3)$$

$$\mathbf{X}^r = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_i^r \\ \mathbf{X}_j^r \end{bmatrix}. \quad (4)$$

式中, 右上标  $r = b$  或  $d$ , 且  $b$  和  $d$  分别表示叶片-硬涂层子结构和轮盘子结构; 右下标  $i$  和  $j$  分别代表子结构的内部节点与界面节点.

为便于后续描述, 考虑将子结构的  $\mathbf{K}^r$ ,  $\mathbf{M}^r$  与  $\mathbf{X}^r$  分别用  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{M}$  与  $\mathbf{X}$  表示. 当任一无阻尼子结构处于频率为  $\omega$  的自由振动时, 其仅在子结构界面力作用  $\mathbf{f}$  下的运动方程为

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{K} \mathbf{X} = \mathbf{f}. \quad (5)$$

将式(5)展开并进行傅里叶变换, 可得

$$\left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ii} & \mathbf{K}_{ij} \\ \mathbf{K}_{ji} & \mathbf{K}_{jj} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{ii} & \mathbf{M}_{ij} \\ \mathbf{M}_{ji} & \mathbf{M}_{jj} \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_i \\ \mathbf{X}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_i \\ \mathbf{f}_j \end{bmatrix}. \quad (6)$$

子结构在固定界面的情况下, 外部位移向量  $\mathbf{X}_j$  与内部位移向量  $\mathbf{X}_i$  分别满足以下条件:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{X}_j &= \mathbf{0}_j, \\ \mathbf{X}_i &= \sum_{p=1}^{\infty} \mathbf{x}_i^p \boldsymbol{\varphi}_i^p, \\ (\mathbf{K}_{ii} - \lambda \mathbf{M}_{ii}) \boldsymbol{\varphi}_i &= \mathbf{0}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

式中,  $p$  和  $\mathbf{x}^p$  分别表示模态阶次和模态坐标.

由式(7)可得固有频率  $\Lambda_{ii}$  与模态振型  $\boldsymbol{\Phi}_{ii}$ , 分别表示为

$$\Lambda_{ii} = \text{Diag} \left[ \underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_k}_{\Lambda_{il}}, \underbrace{\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n}_{\Lambda_{ih}} \right],$$

$$\boldsymbol{\Phi}_{ii} = \left[ \underbrace{\boldsymbol{\varphi}_1, \dots, \boldsymbol{\varphi}_k}_{\boldsymbol{\Phi}_{il}}, \underbrace{\boldsymbol{\varphi}_{k+1}, \dots, \boldsymbol{\varphi}_n}_{\boldsymbol{\Phi}_{ih}} \right].$$

$l + h = p.$  (8)

式中,  $l$  与  $h$  表示低阶模态与高阶模态.

固有频率与模态振型满足正交归一化条件, 即

$$\left. \begin{aligned} \boldsymbol{\Phi}_{ii}^T \mathbf{M}_{ii} \boldsymbol{\Phi}_{ii} &= \mathbf{I}_{ii}, \\ \boldsymbol{\Phi}_{ii}^T \mathbf{K}_{ii} \boldsymbol{\Phi}_{ii} &= \Lambda_{ii}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

式中,  $\mathbf{I}$  表示单位矩阵. 则由式(9)可求得

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{ii} &= \boldsymbol{\Phi}_{ii}^{-T} \boldsymbol{\Phi}_{ii}^{-1}, \\ \mathbf{K}_{ii} &= \boldsymbol{\Phi}_{ii}^{-T} \Lambda_{ii} \boldsymbol{\Phi}_{ii}^{-1}, \\ \mathbf{K}_{ii} - \lambda \mathbf{M}_{ii} &= \boldsymbol{\Phi}_{ii}^{-T} \Delta(\lambda) \boldsymbol{\Phi}_{ii}^{-1}, \\ \Delta(\lambda) &= \Lambda_{ii} - \lambda \mathbf{I}_{ii}. \end{aligned} \quad (10)$$

对式(10)第三行两端分别求逆, 可得内部自由度的动柔度表达式为

$$\mathbf{G}_{ii}(\lambda) = \mathbf{D}_{ii}^{-1}(\lambda) = \boldsymbol{\Phi}_{ii} \Delta_{ii}^{-1}(\lambda) \boldsymbol{\Phi}_{ii}^T. \quad (11)$$

由式(6)得子结构界面力与位移间的关系, 即

$$\mathbf{f}_j(\lambda) = \mathbf{D}_{jj}^*(\lambda) \mathbf{X}_j. \quad (12)$$

式中,  $\mathbf{D}_{jj}^*(\lambda)$  表示子结构界面动刚度, 且有

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{jj}^*(\lambda) &= (\mathbf{K}_{jj} - \lambda \mathbf{M}_{jj}) - (\mathbf{K}_{ji} - \lambda \mathbf{M}_{ji}) \cdot \\ &\quad (\mathbf{K}_{ii} - \lambda \mathbf{M}_{ii})^{-1} (\mathbf{K}_{ij} - \lambda \mathbf{M}_{ij}). \end{aligned} \quad (13)$$

将式(8)和式(10)代入式(11), 整理可得

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Phi}_{ii} \Delta_{ii}^{-1}(\lambda) \boldsymbol{\Phi}_{ii}^T &= \boldsymbol{\Phi}_{ii} \Delta_{ii}^{-1}(\lambda) \boldsymbol{\Phi}_{ii}^T + \\ &\quad \boldsymbol{\Phi}_{ih} \Delta_{ih}^{-1}(\lambda) \boldsymbol{\Phi}_{ih}^T. \end{aligned} \quad (14)$$

将式(14)代入式(13), 并利用模态正交关系可以得到

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{jj}^*(\lambda) &= \mathbf{K}_{jj} - \mathbf{K}_{ji} \boldsymbol{\Phi}_{ii} \boldsymbol{\Phi}_{ii}^T \mathbf{M}_{ij} + \\ &\quad \mathbf{M}_{ji} \boldsymbol{\Phi}_{ii} (\Lambda_{ii} \boldsymbol{\Phi}_{ii}^T \mathbf{M}_{ij} - \boldsymbol{\Phi}_{ii}^T \mathbf{K}_{ij}) - \\ &\quad \lambda (\mathbf{M}_{jj} - \mathbf{M}_{ji} \boldsymbol{\Phi}_{ii} \boldsymbol{\Phi}_{ii}^T \mathbf{M}_{ij}) - \\ &\quad (\mathbf{K}_{ji} - \mathbf{M}_{ji} \mathbf{M}_{ii}^{-1} \mathbf{K}_{ij}) \cdot \\ &\quad [\boldsymbol{\Phi}_{ii} \Delta_{ii}^{-1}(\lambda) \boldsymbol{\Phi}_{ii}^T + \boldsymbol{\Phi}_{ih} \Delta_{ih}^{-1}(\lambda) \boldsymbol{\Phi}_{ih}^T] \cdot \\ &\quad (\mathbf{K}_{ij} - \mathbf{K}_{ii} \mathbf{M}_{ii}^{-1} \mathbf{M}_{ij}). \end{aligned} \quad (15)$$

在实际应用中仅仅需要考虑部分阶次的模态特性, 当需要考虑的频率为  $\omega$  时, 可将  $\Delta_{ih}^{-1}(\lambda)$  展开为关于特征值  $\lambda$  的泰勒级数, 即

$$\Delta_{ih}^{-1}(\lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m \Lambda_{ih}^{-(m+1)} =$$

$$\mathbf{A}_{ih}^{-1} + \lambda \mathbf{A}_{ih}^{-2} + \sum_{m=2}^{\infty} \lambda^m \mathbf{A}_{ih}^{-(m+1)}. \quad (16)$$

考虑到子结构固有频率与模态振型满足关系

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{ii} \Phi_{il} &= \mathbf{M}_{ii} \Phi_{il} \mathbf{A}_{il}, \\ \mathbf{K}_{ii}^{-1} &= \Phi_{il} \mathbf{A}_{il}^{-1} \Phi_{il}^T + \Phi_{ih} \mathbf{A}_{ih}^{-1} \Phi_{ih}^T, \\ \mathbf{M}_{ii}^{-1} (\mathbf{M}_{ii} \mathbf{K}_{ii}^{-1})^m &= \Phi_{il} \mathbf{A}_{il}^{-m} \Phi_{il}^T + \Phi_{ih} \mathbf{A}_{ih}^{-m} \Phi_{ih}^T, \\ m &\geq 0. \end{aligned} \quad (17)$$

将式(16)与式(17)代入式(15),整理可得

$$\mathbf{D}_{jj}^*(\lambda) = \kappa_{jj} - \lambda \mu_{jj} - \lambda^2 \mu_{jl} \Delta_{jl}(\lambda) \mu_{jl}^T - \sum_{m=2}^{\infty} \lambda^m \mu_{jj}^{(m)}. \quad (18)$$

式中,

$$\begin{aligned} \kappa_{jj} &= \mathbf{K}_{jj} - \mathbf{K}_{ji} \mathbf{K}_{ii}^{-1} \mathbf{K}_{ij}, \\ \mu_{jj} &= \mathbf{M}_{jj} - \mathbf{M}_{ji} \mathbf{K}_{ii}^{-1} \mathbf{K}_{ij} + \\ &\quad \mathbf{K}_{ji} \mathbf{K}_{ii}^{-1} (\mathbf{M}_{ii} \mathbf{K}_{ii}^{-1} \mathbf{K}_{ij} - \mathbf{M}_{ij}), \\ \mu_{jj}^{(m)} &= (\mathbf{M}_{ji} - \mathbf{K}_{ji} \mathbf{K}_{ii}^{-1} \mathbf{M}_{ii}) (\mathbf{K}_{ii}^{-1} - \Phi_{il} \mathbf{A}_{il}^{-2} \Phi_{il}^T) \cdot \\ &\quad (\mathbf{M}_{ii} \mathbf{K}_{ii}^{-1})^{m-2} (\mathbf{M}_{ij} - \mathbf{M}_{ii} \mathbf{K}_{ii}^{-1} \mathbf{K}_{ij}), \\ \mu_{jl} &= (\mathbf{M}_{ji} - \mathbf{K}_{ji} \mathbf{K}_{ii}^{-1} \mathbf{M}_{ii}) \Phi_{il}, \\ \Delta_{jl}(\lambda) &= \Delta_{il}(\lambda) = \mathbf{A}_{il} - \lambda \mathbf{I}_{il}. \end{aligned}$$

将式(18)代入式(12),整理可得

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_j(\lambda) &= -\lambda \mu_{jl} \mathbf{H}_l + [\kappa_{jj} - \lambda \mu_{jj} - \sum_{m=2}^{\infty} \lambda^m \mu_{jj}^{(m)}] \mathbf{X}_j, \quad (19) \\ \mathbf{H}_l &= \lambda \Delta_{jl}^{-1}(\lambda) \mu_{jl}^T \mathbf{X}_j. \quad (20) \end{aligned}$$

为了表述方便,考虑两个子结构的模态综合并分别用下标  $\alpha$  和  $\beta$  表示. 由式(19)可以得到

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{j,\alpha}(\lambda) &= -\lambda \mu_{jl,\alpha} \mathbf{H}_{l,\alpha} + \\ &\quad [\kappa_{jj,\alpha} - \lambda \mu_{jj,\alpha} - \sum_{m=2}^{\infty} \lambda^m \mu_{jj,\alpha}^{(m)}] \mathbf{X}_{j,\alpha}, \\ \mathbf{f}_{j,\beta}(\lambda) &= -\lambda \mu_{jl,\beta} \mathbf{H}_{l,\beta} + \\ &\quad [\kappa_{jj,\beta} - \lambda \mu_{jj,\beta} - \sum_{m=2}^{\infty} \lambda^m \mu_{jj,\beta}^{(m)}] \mathbf{X}_{j,\beta}. \end{aligned} \quad (21)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \tilde{\kappa}_{jj} + \tilde{\mu}_{jl} \tilde{\Lambda}_{jl} \tilde{\mu}_{jl}^T & \tilde{\mu}_{jl} \tilde{\mu}_{jl}^T - \tilde{\mu}_{jj} & -\tilde{\mu}_{jj}^{(2)} & \cdots & -\tilde{\mu}_{jj}^{(z-1)} \\ \tilde{\mu}_{jl} \tilde{\Lambda}_{jl}^2 \tilde{\mu}_{jl}^T & \tilde{\kappa}_{jj} + \tilde{\mu}_{jl} \tilde{\Lambda}_{jl} \tilde{\mu}_{jl}^T & \tilde{\mu}_{jl} \tilde{\mu}_{jl}^T - \tilde{\mu}_{jj} & \cdots & -\tilde{\mu}_{jj}^{(z-2)} \\ \tilde{\mu}_{jl} \tilde{\Lambda}_{jl}^3 \tilde{\mu}_{jl}^T & \tilde{\mu}_{jl} \tilde{\Lambda}_{jl}^2 \tilde{\mu}_{jl}^T & \tilde{\kappa}_{jj} + \tilde{\mu}_{jl} \tilde{\Lambda}_{jl} \tilde{\mu}_{jl}^T & \cdots & -\tilde{\mu}_{jj}^{(z-3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \tilde{\mu}_{jl} \tilde{\Lambda}_{jl}^z \tilde{\mu}_{jl}^T & \tilde{\mu}_{jl} \tilde{\Lambda}_{jl}^{z-1} \tilde{\mu}_{jl}^T & \tilde{\mu}_{jl} \tilde{\Lambda}_{jl}^{z-2} \tilde{\mu}_{jl}^T & \cdots & \tilde{\kappa}_{jj} + \tilde{\mu}_{jl} \tilde{\Lambda}_{jl} \tilde{\mu}_{jl}^T \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \tilde{\mu}_{jl} \tilde{\Lambda}_{jl}^2 \\ \tilde{\mu}_{jl} \tilde{\Lambda}_{jl}^3 \\ \tilde{\mu}_{jl} \tilde{\Lambda}_{jl}^4 \\ \vdots \\ \tilde{\mu}_{jl} \tilde{\Lambda}_{jl}^{z+1} \end{bmatrix}, \tilde{\mathbf{X}}_h = \begin{bmatrix} \lambda \tilde{\mathbf{X}}_j \\ \lambda^2 \tilde{\mathbf{X}}_j \\ \lambda^3 \tilde{\mathbf{X}}_j \\ \vdots \\ \lambda^z \tilde{\mathbf{X}}_j \end{bmatrix}. \quad (28)$$

式中,

$$\begin{aligned} (\tilde{\kappa}_{jj} - \lambda \tilde{\mu}_{jj}) \tilde{\mathbf{X}}_j - \lambda (\tilde{\mu}_{jl} \tilde{\mathbf{H}}_l + \tilde{\mu}_{jh} \tilde{\mathbf{H}}_h) &= \mathbf{0}_j, \\ \tilde{\mu}_{jh} &= [\tilde{\mu}_{jj}^{(2)} \quad \tilde{\mu}_{jj}^{(3)} \quad \cdots \quad \tilde{\mu}_{jj}^{(z)}]. \end{aligned}$$

将式(24)与式(28)联立并整理可得

为了弥补单一综合协调条件的不足,本文同时采用界面力与界面位移的双重综合协调条件,即

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{X}_{j,\alpha} &= \mathbf{X}_{j,\beta}, \\ \mathbf{f}_{j,\alpha} &= -\mathbf{f}_{j,\beta}. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

利用式(22),由式(19)和(20)可得

$$-\lambda \tilde{\mu}_{jl} \tilde{\mathbf{H}}_l + [\tilde{\kappa}_{jj} - \lambda \tilde{\mu}_{jj} - \sum_{m=2}^{\infty} \lambda^m \tilde{\mu}_{jj}^{(m)}] \tilde{\mathbf{X}}_j = \mathbf{0}_j, \quad (23)$$

$$\Delta_{jl}(\lambda) \tilde{\mathbf{H}}_l - \lambda \tilde{\mu}_{jl}^T \tilde{\mathbf{X}}_j = \mathbf{0}_j. \quad (24)$$

将式(23)和式(24)联立可得

$$\left\{ \begin{bmatrix} \tilde{\kappa}_{jj} & \mathbf{0}_{jl} \\ \mathbf{0}_{jl}^T & \tilde{\Lambda}_{jl} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} \tilde{\mu}_{jj} & \tilde{\mu}_{jl} \\ \tilde{\mu}_{jl}^T & \mathbf{I}_{jl} \end{bmatrix} - \sum_{m=2}^{\infty} \lambda^m \begin{bmatrix} \tilde{\mu}_{jj}^{(m)} & \mathbf{0}_{jl} \\ \mathbf{0}_{jl}^T & \mathbf{0}_{jj} \end{bmatrix} \right\} \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{X}}_j \\ \tilde{\mathbf{H}}_l \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0}_j \\ \mathbf{0}_l \end{Bmatrix}. \quad (25)$$

式中,

$$\begin{aligned} \tilde{\kappa}_{jj} &= \kappa_{jj,\alpha} + \kappa_{jj,\beta}, \\ \tilde{\mu}_{jj} &= \mu_{jj,\alpha} + \mu_{jj,\beta}, \\ \tilde{\mu}_{jl} &= [\mu_{jl,\alpha} \quad \mu_{jl,\beta}], \\ \tilde{\mu}_{jj}^{(m)} &= \mu_{jj,\alpha}^{(m)} + \mu_{jj,\beta}^{(m)}, \\ \tilde{\mathbf{H}}_l &= [\mathbf{H}_{l,\alpha} \quad \mathbf{H}_{l,\beta}]^T, \\ \tilde{\Lambda}_{jl} &= \text{Diag}[\mathbf{A}_{il,\alpha} \quad \mathbf{A}_{il,\beta}]. \end{aligned}$$

将式(25)的第一行进行展开,并在展开式的两端同时乘以  $\lambda^n$  ( $1 \leq n \leq z, n \in \mathbf{Z}$ ),整理可得

$$\begin{aligned} & \left[ \sum_{m=1}^{n+1} \lambda^m \tilde{\mu}_{jl} \tilde{\Lambda}_{jl}^{n-m+1} \tilde{\mu}_{jl}^T + \lambda^n \tilde{\kappa}_{jj} - \lambda^{n+1} \tilde{\mu}_{jj} - \right. \\ & \left. \sum_{m=n+2}^{\infty} \lambda^m \tilde{\mu}_{jj}^{(n-m)} \right] \tilde{\mathbf{X}}_j = \tilde{\mu}_{jl} \tilde{\Lambda}_{jl}^{n+1} \tilde{\mathbf{H}}_l. \end{aligned} \quad (26)$$

略去式(26)中的  $\lambda^m$  ( $m > z$ ) 项,整理可得

$$\tilde{\mathbf{X}}_h = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \tilde{\mathbf{H}}_l. \quad (27)$$

$$\left\{ \begin{bmatrix} \tilde{\kappa}_{jj} & \mathbf{0}_{jl} & \mathbf{0}_{jh} \\ \mathbf{0}_{jl}^T & \tilde{\Lambda}_{jl} & \mathbf{0}_{hl} \\ \mathbf{0}_{jh}^T & \mathbf{0}_{hl}^T & \tilde{\kappa}_{hh} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} \tilde{\mu}_{jj} & \tilde{\mu}_{jl} & \tilde{\mu}_{jh} \\ \tilde{\mu}_{jl}^T & \mathbf{I}_{ll} & \mathbf{0}_{hl} \\ \tilde{\mu}_{jh}^T & \mathbf{0}_{hl}^T & \tilde{\mu}_{hh} \end{bmatrix} \right\} \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{X}}_j \\ \tilde{\mathbf{H}}_l \\ \tilde{\mathbf{X}}_h \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0}_j \\ \mathbf{0}_l \\ \mathbf{0}_h \end{Bmatrix}, \quad (29)$$

式中,

$$\tilde{\kappa}_{hh} = \begin{bmatrix} \tilde{\mu}_{jj}^{(2)} & \tilde{\mu}_{jj}^{(3)} & \cdots & \tilde{\mu}_{jj}^{(z)} & \mathbf{0}_{jj} \\ \tilde{\mu}_{jj}^{(3)} & \tilde{\mu}_{jj}^{(4)} & \cdots & \mathbf{0}_{jj} & \mathbf{0}_{jj} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \tilde{\mu}_{jj}^{(z)} & \mathbf{0}_{jj} & \cdots & \mathbf{0}_{jj} & \mathbf{0}_{jj} \\ \mathbf{0}_{jj} & \mathbf{0}_{jj} & \cdots & \mathbf{0}_{jj} & \mathbf{0}_{jj} \end{bmatrix},$$
$$\tilde{\mu}_{hh} = \begin{bmatrix} \tilde{\mu}_{jj}^{(3)} & \tilde{\mu}_{jj}^{(4)} & \cdots & \tilde{\mu}_{jj}^{(z)} & \mathbf{0}_{jj} & \mathbf{0}_{jj} \\ \tilde{\mu}_{jj}^{(4)} & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \mathbf{0}_{jj} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \tilde{\mu}_{jj}^{(z)} & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \mathbf{0}_{jj} \\ \mathbf{0}_{jj} & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \mathbf{0}_{jj} \\ \mathbf{0}_{jj} & \mathbf{0}_{jj} & \cdots & \mathbf{0}_{jj} & \mathbf{0}_{jj} & \mathbf{0}_{jj} \end{bmatrix}.$$

将式(27)代入式(29)并通过整理可得

$$(\kappa - \lambda \mu) \begin{Bmatrix} \tilde{X}_j \\ \tilde{H}_l \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0}_j \\ \mathbf{0}_l \end{Bmatrix}. \quad (30)$$

式中,

$$\kappa = \begin{bmatrix} \tilde{\kappa}_{jj} & \mathbf{0}_{jl} \\ \mathbf{0}_{jl}^T & \tilde{A}_{jl} + (A^{-1}B)^T \tilde{\kappa}_{hh} A^{-1}B \end{bmatrix},$$
$$\mu = \begin{bmatrix} \tilde{\mu}_{jj} & \tilde{\mu}_{jl} + \tilde{\mu}_{jh} A^{-1}B \\ (\tilde{\mu}_{jl} + \tilde{\mu}_{jh} A^{-1}B)^T & I_{jl} + (A^{-1}B)^T \tilde{\mu}_{hh} A^{-1}B \end{bmatrix}.$$

## 2 涂层叶盘的振动分析

为了精确描述涂层叶盘的动力学特性,必须考虑系统阻尼对它的影响.经典模态应变能法是含阻尼结构有限元模态分析的能量分析方法,以耗散能量与总的变形能的比值来确定涂层叶盘的损耗因子<sup>[12]</sup>.

硬涂层材料损耗因子为  $\eta_c$ ,涂层叶盘有限元模型共有  $N$  个单元,其中硬涂层有  $M$  个单元;叶盘材料损耗因子为  $\eta_b$ ,涂层叶盘耗散能量表示为

$$V_{hs,p} = \sum_{k=1}^M \eta_c U_{k,p} + \sum_{g=1}^{N-M} \eta_b U_{g,p}. \quad (31)$$

式中,  $U_{k,p}$  与  $U_{g,p}$  分别表示硬涂层与叶盘的每个单元的模态应变能.由于叶盘的材料损耗因子远远小于硬涂层的材料损耗因子,所以忽略叶盘材料的阻尼,则涂层叶盘的耗散能量可以表示为

$$V_{hs,p} = \sum_{k=1}^M \eta_c U_{k,p} = \eta_c \sum_{k=1}^M U_{k,p} = \eta_c \text{MSE}_{c,p}. \quad (32)$$

涂层叶盘的总变形能  $V_{z,p}$  可以表示为

$$V_{z,p} = \sum_{k=1}^M U_{k,p} + \sum_{g=1}^{N-M} U_{g,p} = \text{MSE}_p. \quad (33)$$

根据模态应变能理论的定义,可得到涂层叶盘的模态损耗因子  $\eta_{cs,p}$ ,即

$$\eta_{cs,p} = \frac{\text{MSE}_{cs,p}}{\text{MSE}_{c,p}} \eta_{c,p}. \quad (34)$$

式中,  $\text{MSE}_{c,p}$  与  $\text{MSE}_{cs,p}$  分别表示第  $p$  阶的硬涂层的模态应变能与涂层叶盘的模态应变能.

本文利用比例阻尼来近似表示涂层叶盘的系统阻尼  $c$ ,并通过如下公式求解,即

$$\left. \begin{aligned} c &= \delta \kappa + \xi \mu. \\ \delta + \xi \omega_{cs,p}^2 &= \eta_{cs,p} \omega_{cs,p}, \\ \omega_{cs,p} &= \sqrt{\lambda_{cs,p}}. \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

式中:  $\delta$  与  $\xi$  分别表示与质量矩阵和刚度矩阵相关的比例系数;  $\lambda_{cs,p}$  与  $\omega_{cs,p}$  分别表示涂层叶盘在第  $p$  阶的特征值以及对应的固有频率.

考虑系统阻尼  $c$ ,则由式(1)的傅里叶变换可得涂层叶盘的频域动力学方程,即

$$(-\omega^2 \mu + i \omega c + \kappa) X_{cs} = F_{cs}. \quad (36)$$

由式(36)可得到涂层叶盘的频响函数,即

$$H(\omega) = \sum_{p=1}^m \frac{\chi_p \chi_p^T}{\omega_{cs,p}^2 (1 + i \eta_{cs,p}) - \omega^2}. \quad (37)$$

式中:  $\chi_p$  表示与固有频率  $\omega_{cs,p}$  对应的特征向量;  $\omega$  表示激励频率;  $i$  表示虚数单位.

## 3 涂层叶盘的基本参数

图1所示为涂层叶盘的实验试件.图2所示为涂层叶盘的有限元模型(全尺寸和单扇区模型).几何参数、材料参数见表1和表2.

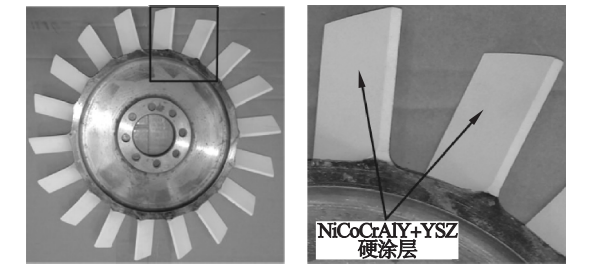


图1 涂层叶盘实物图  
Fig. 1 Physical product of the hard-coated blisk

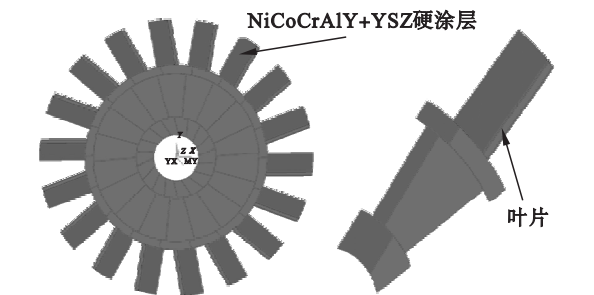


图2 涂层叶盘的三维模型  
Fig. 2 3D model of the hard-coated blisk

表 1 整体叶盘与硬涂层的几何参数  
Table 1 Geometrical parameters of the blisk and hard coating

轮盘子结构		叶片 - 硬涂层子结构	
轮毂内径/mm	50	叶片高度/mm	50
轮毂外径/mm	80	叶片宽度/mm	25
轮毂厚度/mm	19	叶片厚度/mm	3
轮缘内径/mm	182	叶片数目	18
轮缘外径/mm	200	—	—
轮缘厚度/mm	19	涂层厚度/mm	0.3
轮辐厚度/mm	7	涂层位置	两侧

表 2 整体叶盘与硬涂层的材料参数  
Table 2 Material parameters of the blisk and hard coating

项目	叶盘	硬涂层
材料	Q-235 钢	NiCoCrAlY + YSZ
泊松比	0.33	0.30
密度/( $\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ )	2 700	5 600
杨氏模量/GPa	70	54.494
材料损耗因子	0.000 6	0.021 2

3.1 涂层叶盘的模态分析

图 3 所示为涂层叶盘的前 15 阶固有频率. 可以看到,固有频率 FC 与 FB 及 FA 的对应性比较好. 其中,固有频率 FA 与 FC 之间的偏差略大,这是实验干扰造成的,但在允许范围内. 这说明减缩模型具有较高的计算精度. 此外发现,当发生失谐时,整体叶盘在低频段具有丰富的密集模态.

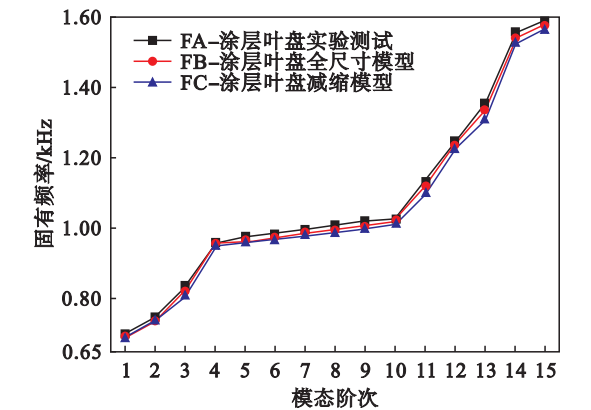


图 3 涂层叶盘的固有频率  
Fig. 3 Natural frequencies of the hard-coated blisk

图 4 所示为基于减缩模型与全尺寸模型的运算时间. 可以看出,减缩模型的运算时间较全尺寸模型大大减少,最大可节省 33.3%,说明减缩模型计算效率比较高. 可预见的是,随着模态阶次的增大,减缩模型的这种优势变得更加明显.

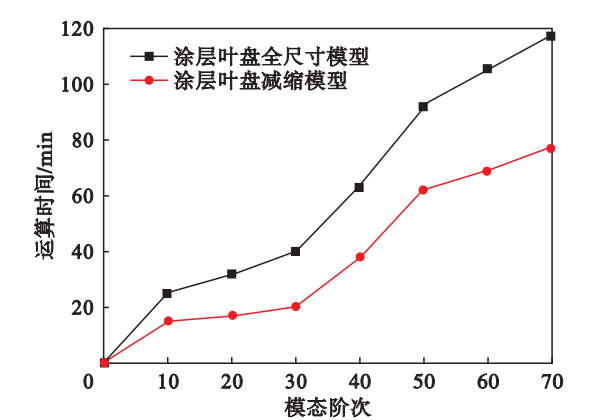


图 4 涂层叶盘的模态分析的运算时间  
Fig. 4 The computational time of the hard-coated blisk

3.2 硬涂层对整体叶盘的影响

表 3 所列为涂敷硬涂层前后整体叶盘前 15 阶固有频率. 可以看到,涂敷硬涂层后整体叶盘的固有频率较涂敷前略微增大,变化率分别在 0.51% ~ 2.25% 与 0.71% ~ 2.67%. 这说明硬涂层不会对整体叶盘的固有频率造成显著影响.

表 3 涂敷硬涂层前后整体叶盘固有频率  
Table 3 Natural frequencies of the blisk with or without depositing hard coating Hz

阶次	理论分析			实验测试		
	整体叶盘	涂层叶盘	变化率/%	整体叶盘	涂层叶盘	变化率/%
1	678.65	685.18	0.95	680.38	685.26	0.71
2	732.54	738.67	0.83	727.91	741.87	1.88
3	802.57	808.13	0.69	810.67	821.52	1.32
4	936.64	947.08	1.10	948.99	957.68	0.91
5	952.39	959.29	0.72	951.48	963.04	1.20
6	959.83	968.67	0.91	955.71	974.04	1.88
7	967.66	977.99	1.06	961.76	984.01	2.26
8	977.31	987.94	1.08	970.36	995.06	2.48
9	986.10	998.61	1.25	980.75	1 002.59	2.18
10	997.65	1 010.24	1.25	993.08	1 013.72	2.04
11	1 083.9	1 094.93	1.01	1 105.47	1 132.18	2.36
12	1 213.41	1 224.85	0.93	1 204.09	1 236.92	2.65
13	1 300.19	1 306.85	0.51	1 312.79	1 348.74	2.67
14	1 510.41	1 522.42	0.79	1 511.16	1 544.55	2.16
15	1 555.52	1 564.25	0.56	1 545.52	1 578.77	2.11

图 5 所示为涂敷硬涂层前后叶盘前 15 阶模态损耗因子. 可以看到,涂敷硬涂层后的整体叶盘模态损耗因子均明显增大. 由于实验受到干扰,实验测得的模态损耗因子普遍大于理论分析的模态损耗因子. 即,  $A > B$ ,  $C > D$ . 此外,同一结构的模态损耗因子有所差异,但是它们都有相似的变化



规律. 即, A 与 C 相似, B 与 D 相似.

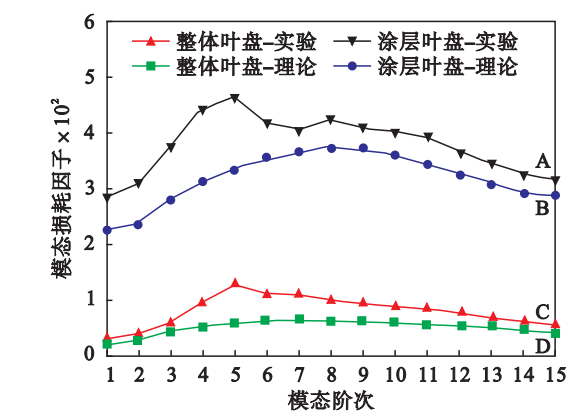


图5 叶盘模态损耗因子  
Fig. 5 Modal loss factors of the blisk

图6所示为涂敷硬涂层前后的整体叶盘频响函数曲线. 可以直观看到, 在相同阶次下, 整体叶盘在涂层后的频响幅值较涂层前明显减小, 说明叶盘在共振区的共振响应受到了显著抑制.

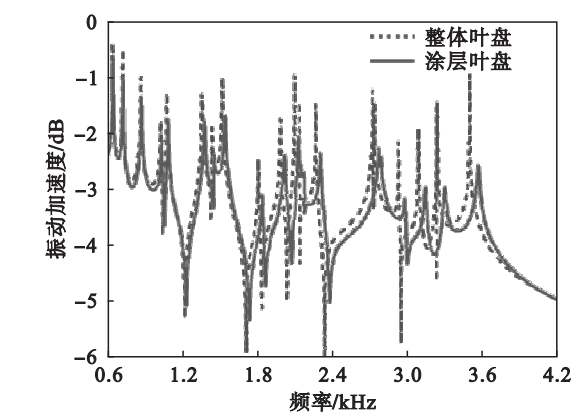


图6 叶盘的频响函数  
Fig. 6 Frequency response function of the blisk

## 4 结 论

- 1) 提出了一种叶片涂敷硬涂层的减振方法. 这种方法可以有效提高整体叶盘在恶劣环境的工作能力, 而且具有刚度可调节的优点.
- 2) 建立了涂层叶盘的有限元模型, 推导了固定界面动刚度模态综合法公式对其进行减缩. 涂层叶盘的有限元减缩模型具有较高的计算精度与效率, 能够快速获得涂层叶盘的动力学特性.

3) NiCoCrAlY + YSZ 硬涂层表现出较强的阻尼能力, 在保证整体叶盘的固有频率不发生较大变化的前提下, 能够显著抑制其在共振区的共振响应, 有效提高失谐整体叶盘的工作可靠性.

## 参考文献:

- [1] Klauke T, Kühhorn A, Beirow B, et al. Numerical investigations of localized vibrations of mistuned blade integrated disks (blisks) [J]. *Journal of Turbomachinery*, 2009, 131(3): 031002.
- [2] Sanliturk K Y, Imregun M, Ewins D J. Harmonic balance vibration analysis of turbine blades with friction dampers [J]. *Journal of Vibration and Acoustics*, 1997, 119(1): 96 – 103.
- [3] Ivancic F, Palazotto A. Experimental considerations for determining the damping coefficients of hard coatings [J]. *Journal of Aerospace Engineering*, 2005, 18(1): 8 – 17.
- [4] Blackwell C, Palazotto A, George T J, et al. The evaluation of the damping characteristics of a hard coating on titanium [J]. *Shock and Vibration*, 2007, 14(1): 37 – 51.
- [5] Filippi S, Torvik P J. A methodology for predicting the response of blades with nonlinear coatings [J]. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 2011, 133(4): 042503.
- [6] Bruce R W, Schell J D. Process for depositing a coating on a blisk; US 2010/0078308A1 [P]. 2010 – 04 – 01.
- [7] Rivas-Guerra A J, Mignolet M P. Local/global effects of mistuning on the forced response of bladed disks [J]. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 2004, 126: 131 – 141.
- [8] Huang B W, Kuang J H. Variation in the stability of a rotating blade disk with a local crack defect [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2006, 294: 486 – 502.
- [9] Schmidt I H. Mistuned bladed disks, dynamical behaviour and computations [C] // Proceedings of the IFToMM International Conference on Rotordynamic Problems in Power Plants. Rome, 1982: 215 – 226.
- [10] Kenyon J A, Rabe D C. Aerodynamic effects on blade vibratory stress variations [J]. *Journal of Propulsion and Power*, 1999, 15(5): 183 – 192.
- [11] 胡海昌. 多自由度结构固有振动理论 [M]. 北京: 科学出版社, 1987.  
(Hu Hai-chang. Natural vibration theory of the multi degrees of freedom structure [M]. Beijing: Science Press, 1987. )
- [12] Lepoittevin G, Kress G. Optimization of segmented constrained layer damping with mathematical programming using strain energy analysis and modal data [J]. *Materials & Design*, 2010, 31(1): 14 – 24.