

基于空间块体表证的岩质边坡稳定性综合评价

张紫杉¹, 王述红¹, 王斐笠¹

(东北大学 资源与土木工程学院, 辽宁 沈阳 110819)

摘 要: 将关键块体理论与模糊理论相结合, 对于岩质边坡的稳定性进行了综合评价. 选取抚顺露天矿南帮典型坡段, 对岩坡的物理力学参数进行测定, 并运用自主研发的关键块体搜索系统——GeoSMA-3D (Geotechnical Structure and Model Analysis-3D) 进行关键块体的搜索与表征, 根据表征特点进行评价参数的选择, 最后运用基于 AHP 的模糊综合评价技术, 引入总体稳定性系数, 对边坡稳定性进行了客观定量的评价. 最后通过 VTK 技术实现了边坡稳定性可视化平台的构建, 为后续的边坡加固及灾害防治提供了可靠依据.

关 键 词: 露天矿; 岩质边坡; 层次分析法; 块体理论; 模糊评价

中图分类号: TU 45

文献标志码: A

文章编号: 1005-3026(2018)06-0896-06

Comprehensive Assessment of Rock Slope Stability Based on Spatial Block Identification

ZHANG Zi-shan¹, WANG Shu-hong¹, WANG Fei-li¹

(School of Resources & Civil Engineering, Northeastern University, Shenyang 110819, China. Corresponding author: WANG Shu-hong, E-mail: shwang@mail.neu.edu.cn)

Abstract: A comprehensive assessment on rock slope stability was carried out by combining the key block theory with the fuzzy method. Based on typical slope of strip mine in Fushun, the physical and mechanical parameters were measured and a block identification system—GeoSMA-3D (Geotechnical Structure and Model Analysis-3D) was developed to identify the key blocks and to calculate the factors of safety. The assessment factors were determined based on the characteristics of the spatial blocks. According to the information acquired, a fuzzy comprehensive assessment method based on AHP was applied to assess the stability of the slopes in an objective and quantitative way. Finally, an visualization platform is established to visualize the terrain and total safety factors of the slope, which provides a reliable basis for disaster control and reinforcement on the slopes.

Key words: strip mine; rock slope; analytic hierarchy process; block theory; fuzzy evaluation

近些年,关于边坡稳定性的研究越来越引起学者们的关注.边坡稳定性就是指在多元因素影响下边坡发生滑落、倾倒等破坏的可能性.目前采用基于大量分析指标的多元多级综合评价方法,如层次分析法、灰色聚类法、神经网络法等,都被运用到了边坡稳定性的计算之中,并且取得了较好的评价效果^[1-3].由于涉及的地形复杂,影响因素多,层次关系复杂,单纯运用直接从现场采集的数据进行评价,容易造成评价结构混乱、主次不清

晰等问题,给后期综合分析带来一定困难.

本研究根据已有的研究成果,将块体理论与模糊综合评价方法进行结合,提出了一种全新的基于块体理论的岩质边坡稳定性的评价方法.该方法弥补了传统块体理论方法只考虑块体可动性而没有考虑渗流、风化等水文地质条件及岩坡坡面形态对岩体稳定性影响的缺点,使得评价可以更加客观准确.

收稿日期: 2017-01-14

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(51474050, U1602232); 地质灾害防治与地质环境保护国家重点实验室项目(SKLGP2014K011); 辽宁省高等学校优秀人才支持计划项目(LN2014006).

作者简介: 张紫杉(1990-),男,河北秦皇岛人,东北大学博士研究生;王述红(1969-),男,江苏泰州人,东北大学教授,博士生导师.

1 研究方法

1.1 岩坡现场测量技术

为了获取实时有效的现场数据,本研究运用了先进的非接触测量技术,为边坡后期稳定性的分析计算提供了有力的技术支持.为了获得岩体几何参数和结构面参数,运用了来自奥地利的三维非接触测量系统——ShapeMetrix3D,该系统可以通过高清摄影图片对岩体及其表面形状进行三维建模,并且可以得到岩体的空间形态和表面节理的相关信息,包括岩体的外部轮廓参数和岩体结构面的倾向、倾角、中心点坐标等^[4].除此之外,本研究还引进了红外线成像技术,来对边坡进行分幅扫描观测,获得边坡的温度场分布情况,根据温度场变化情况提取出可能发生渗水的地点.

1.2 块体信息处理

块体理论是由美籍华人科学家石根华提出的,该方法运用拓扑学的原理,解决了岩体稳定性的问题,目前已经广泛应用到包括三峡工程在内的大型工程之中^[5-6].该理论假设节理岩体是由平面切割整块完整岩石后形成的结构面和结构体组合成的.运用几何方法,通过判断块体空间可动性及有限性,利用赤平投影法,寻找出关键块体.由于岩体本身强度比岩石结构面强度要大得多,在考虑岩石破坏时,只考虑结构面的剪切破坏和滑移破坏.通过式(1),计算各个块体在滑动力作用下的安全系数 K .

$$K = \frac{\sum_{i=1}^n (N_i \tan \varphi_i + C_i S_i)}{G \sin \alpha} \quad (1)$$

其中: N_i 为作用在第 i 个侧向滑动面上的法向力; φ_i 和 C_i 代表在第 i 个侧滑动面的内摩擦角及内聚力; S_i 表示第 i 个侧滑动面的面积; G 为块体的重力; α 为重力与岩体滑动方向的夹角.

为了更加准确搜索到关键块体的相关信息,本文运用 GeoSMA - 3D (Geotechnical Structure and Model Analysis-3D) 系统进行分析,确定关键块体的体积、数量及相应的安全系数^[7-8].同时,为了对块体系统的稳定性进行评价,对搜索出的关键块体信息需要进行进一步的处理.由于边坡的体积并不相同,为了得到统一的评价标准,要对搜索的块体体积进行归一化处理,即计算块体体积占总体边坡的比例 v ,以及按块体体积加权的方法得出边坡总体安全系数 $F_{s总}$:

$$v = (V_b / V_s) \times 100\% \quad (2)$$

$$F_{s总} = \frac{\sum_{i=1}^n (V_{bn} \cdot F_{sn})}{\sum_{i=1}^n V_{bn}} \quad (3)$$

其中: V_b 和 V_s 分别为边坡关键块体的体积及计算边界内边坡的体积; V_{bn} 代表搜索出的第 n 个块体的体积; F_{sn} 代表搜索出的第 n 个块体的安全系数.

1.3 AHP 评价理论

层次分析模型又称 AHP,是一种基于权重分析的多层次的综合评价模型.该方法同时具备了定性分析及定量分析的优点,获得了广泛的应用^[9].层次分析法的主要思路是把复杂的因素分类汇总,形成有一定规律的结构层次体系,再通过比对同一层次中的各要素的重要性,给出合理的权重,并在通过了一致性检验后,得到最终的权重体系.层次分析法的过程主要分为以下 3 步:

1) 建立递进式层次结构.按照分类分级的思想,对研究指标进行分析,构建包含目标层、指标层、准则层的递进式的层次分析结构.根据之前的研究成果,除空间块体搜索表征的参数外,选出了两类 6 项主要影响岩坡稳定性的指标,即地形特征(坡面形状、坡角大小、边坡高度)和地质特征(岩体强度、岩体渗水性、岩体风化程度),构建边坡稳定性评价层次分析体系,如图 1 所示.

2) 建立判断矩阵,并进行一致性检验.建立了递进式层次分析评价结构后,针对隶属关系,对重要性标度进行量化,建立判断矩阵 W ,见式(4).其中 w_{ij} 表示同一层中第 i 指标对第 j 指标的重要性标度值.并采用 1~9 的标度对各层中因子相对于上一目标层的重要性进行比较^[9].标准的量化过程既考虑工程经验发挥作用,又可以有效减少主观臆断,使评价更加合理.

$$W = \begin{bmatrix} 1 & w_{12} & \cdots & w_{1i} \\ w_{21} & 1 & \cdots & w_{2i} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ w_{j1} & w_{j2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

建立判断矩阵 W 后,对其进行一致性检验.计算最大特征值 λ_{max} 以及相应的特征向量 v_{max} .通过计算随机一致性比率 CR 值,检验判断矩阵是否满足一致性检验.当 $CR < 0.1$ 时,可以认为矩阵具有满意的一致性;如不能通过,说明判断矩阵设置不合理,需重新进行调整以满足一致性要求,如式(5)所示.其中 m 为判断矩阵阶数,RI 为同阶平均一致性指标.

$$CI = \frac{\lambda_{\max} - m}{m - 1}, CR = \frac{CI}{RI} . \tag{5}$$

3) 计算权重向量. 在检验完成后, 可以计算出各个层级元素与下层元素之间的相对权重. 通过式(6) 计算判断矩阵的特征值及特征向量, 通过寻找与最大特征值 λ_{\max} 相应的特征向量 v_{\max} , 并对其进行归一化处理得到权重向量, 如式(7)

所示, 得到该层元素间的权重向量 ω . 经过归一化的权重向量应该满足式(8).

$$Wv = \lambda v . \tag{6}$$

$$\omega_i = v_i / \sum_{i=1}^i v_i . \tag{7}$$

$$\omega_i \geqslant 0, \sum \omega_i = 1 . \tag{8}$$

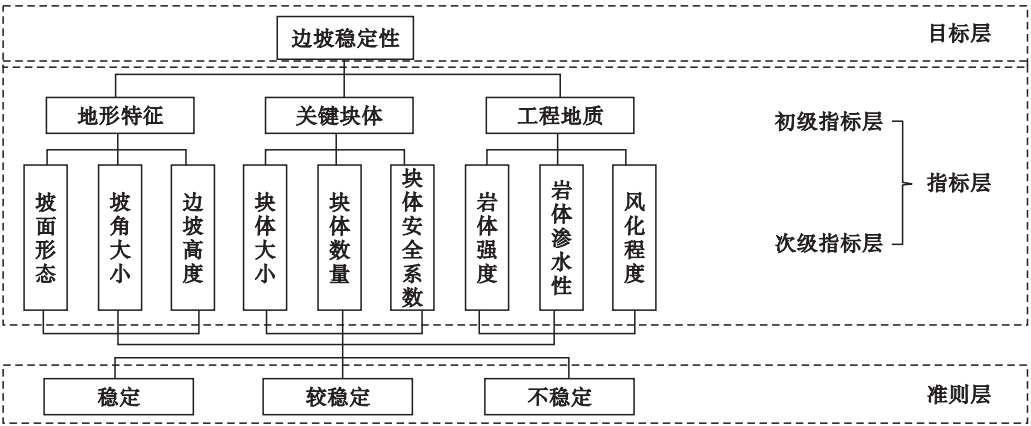


图 1 抚顺露天矿边坡综合评价体系
Fig. 1 Analytical hierarchy diagram of rock slope in Fushun strip mine

1.4 模糊综合评价模型

模糊数学方法目前已经在边坡、隧道、水利等岩土工程领域得到了广泛的应用. 在进行综合评价分析中, 需要大致分为以下几个步骤:

1) 确定评价因素集及评价等级集. 评价因素集是指由被评价对象组成的集合, 设被评价对象有 m 个, 分别用 u_1, u_2, \cdots, u_m 表示; 评价等级集表示将最终的评价结果划分成几个不同的等级, 设分为 n 个等级, 分别用 v_1, v_2, \cdots, v_n 表示:

$$U = [u_1, u_2, \cdots, u_m] ,$$
$$V = [v_1, v_2, \cdots, v_n] . \tag{9}$$

2) 建立评价矩阵并得到权重向量. 对于评价集中的每个对象 u_i 相对于评价等级集的每个因素 v_j 都有一个隶属度 r_{ij} . 通常情况下会对隶属度参数进行归一化, 并确保每个隶属度的数值, 即式(10); 将所有隶属度合成一个有 i 个评价因素, j 个评价等级的综合模糊矩阵 R . 权重向量 ω 的确定通过上文所示的层次分析法得到.

$$\sum_{j=1}^n r_{ij} = 1, r_{ij} > 0 . \tag{10}$$

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1j} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2j} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{i1} & r_{i2} & \cdots & r_{ij} \end{bmatrix} . \tag{11}$$

隶属度的确定分为定量型与定性型因素隶属

度两种. 本研究中, 定量型因素隶属度的分布函数为梯形分布. 同时所选指标也分为越大越优型和越小越优型两种, 其中坡角大小、边坡高度、块体安全系数、块体大小、块体数量这 5 个指标属于越小越优型指标, 岩石强度为越大越优型指标. 在具体计算时, 分别对应不同的评价等级的隶属度分布函数 $r_I(x)$, $r_{II}(x)$ 和 $r_{III}(x)$. 其中越小越优型对应式(12) ~ (14), 越大越优型对应式(15) ~ (17). 其中 x 代表该指标的实际折算值, $\min(x_j)$ 和 $\max(x_j)$ 代表该对应评价等级对应指标最小值及最大值. 对于定性型因素指标, 则根据相关研究结果^[10], 采用德尔斐法得到合理的隶属度分布函数.

$$r_I(x) = \begin{cases} 1, x < \min(x_j) ; \\ \frac{\max(x_j) - x}{\max(x_j) - \min(x_j)}, \min(x_j) \leqslant x \leqslant \max(x_j) ; \\ 0, x > \max(x_j) . \end{cases} \tag{12}$$

$$r_{II}(x) = \begin{cases} 1, x < \min(x_j) ; \\ \frac{x - \min(x_j)}{\max(x_j) - \min(x_j)}, \min(x_j) < x < \max(x_j) ; \\ 1 - \frac{x - \max(x_j)}{\max(x_j) - \min(x_j)}, x > \max(x_j) . \end{cases} \tag{13}$$

$$r_{\text{III}}(x) = \begin{cases} 0, x < \min(x_j); \\ 0, \min(x_j) < x < \max(x_j); \\ \frac{x - \max(x_j)}{\max(x_j) - \min(x_j)}, x > \max(x_j). \end{cases} \quad (14)$$

$$r_{\text{I}}(x) = \begin{cases} \frac{\min(x_j) - x}{\max(x_j) - \min(x_j)}, x < \min(x_j); \\ 0, \min(x_j) < x < \max(x_j); \\ 0, x > \max(x_j). \end{cases} \quad (15)$$

$$r_{\text{II}}(x) = \begin{cases} \frac{x}{\max(x_j) - \min(x_j)}, x < \min(x_j); \\ \frac{\max(x_j) - x}{\max(x_j) - \min(x_j)}, \min(x_j) < x < \max(x_j); \\ 0, x > \max(x_j). \end{cases} \quad (16)$$

$$r_{\text{III}}(x) = \begin{cases} 0, x < \min(x_j); \\ \frac{x - \min(x_j)}{\max(x_j) - \min(x_j)}, \min(x_j) < x < \max(x_j); \\ 1, x > \max(x_j). \end{cases} \quad (17)$$

3) 进行模糊运算并完成评价. 模糊评价结果向量 S 是建立在权重向量矩阵 W 和模糊矩阵 R 之上的. 通过对 W 和 R 进行模糊关系合成运算, 就可以得到评价结果向量 S , 如式 (18) 所示. 其中 s_j 表示被评价对象对于评价 v_j 的隶属关系, 而根据最大隶属关系原则, s_j 对应的最大值表示该对象隶属于评价等级 v_j , 最终实现对该评价对象的综合评价及等级划分. 本文运用了模糊运算中的加权算法, 而计算权重向量由层次分析法中确定的各指标之间的层元素间的权重向量 ω 来确定.

$$S = W \circ R = (s_1, s_2, \cdots, s_j),$$
$$s_j = \sum_{i=1}^n \omega_i r_{ij}. \quad (18)$$

2 工程实例

抚顺市露天矿横贯市区及工业密集区, 煤系地层由于沉积环境等原因, 地形、地质条件复杂, 并且在附近边坡出现过局部的滑坡现象, 因此对现有边坡稳定性进行评估显得尤为重要.

为了更加合理地作出评价, 本文选取了具有典型特征的坡段区域进行分析评价, 并且运用 GeoSMA - 3D 进行关键块体的搜索, 如图 2 所

示. 最后结合测量内容以及已有的科研成果, 建立相应的评价体系和评价指标 (表 1), 得到评价需要的参数 (表 2).

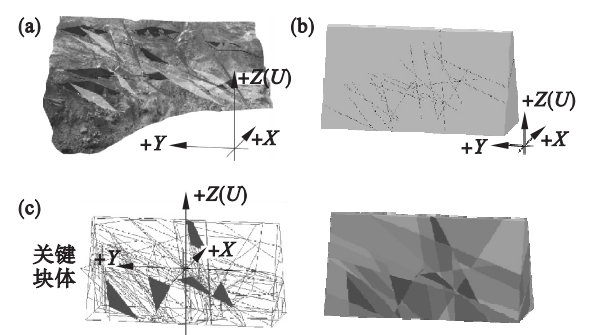


图 2 +20E600 坡段的关键块体搜索
Fig. 2 Key block identification on +20E600 slope
(a)—ShapeMetrix - 3D 结构面采集;
(b)—岩体表面切割迹线; (c)—关键块体搜索.

根据前面提到的理论建立的评价标准, 计算隶属度 (表 3) 并运用层次分析法计算各因素间的权重向量 (表 4), 经过一致性检验, CR 值分别为 0.015 8, 0.046 2, 0.060 6 和 0.038 0, 小于上限值 0.1, 符合一致性检验要求. 根据上述求出的隶属度值以及 AHP 方法得到的各指标权重系数, 进行模糊综合计算, 得到边坡模糊综合评价结果 (表 5). 根据稳定性综合评价的结果进行整体稳定性评价系数 ϕ 的计算:

$$\phi = \sum \varphi \cdot S. \quad (19)$$

其中 φ 为总体稳定性评价指标系数. 根据其他学者的研究结果得到的不同稳定性边坡的出现概率^[10]进行分类汇总, 确定对应稳定、较稳定、不稳定三项稳定性评价指标系数分别为 0.26, 0.41, 0.33. S 为边坡稳定性综合评价隶属度.

为了更直观反映整个边坡中各坡段区域的稳定性情况, 本文结合 VTK 技术完成了三维岩坡建模可视化 (3DRM) 模块的 C++ 程序编写, 通过运用 Delaunay 三角剖分理论算法及颜色映射算法, 实现岩质边坡工程地形及总体稳定性的可视化显示, 如图 3 所示. 从结果可以看出, 采用上述评估方法得到四处坡段均属于稳定的范围, 但总体稳定性系数不同, 表现出不同坡段间稳定性的差异. 根据实际的勘测, 四处边坡都没有明显的失稳破坏现象, 都属于稳定的范围内, 但 -20E800 坡段临近下部区域有局部剥落和裂隙扩展等现象, -200E900 坡段下方有起鼓的现象, 上述两处坡段相对于 +20E600 和 +20E1000 两坡段明显处于较不稳定的状态, 这可能与整体边坡的中上部附近断层以及边坡底部大量涌水有关. 结果表明, 稳定性综合评价计算可以反映正确稳定性关

系,计算与工程现场的探测与调查情况基本相同.

表 1 稳定性评价标准
Table 1 Stability assessment standard

初级指标	初级指标名称	次级指标	次级指标参数	评价分类标准			备注
				稳定	较稳定	不稳定	
A1	关键块体	B1	块体体积分数/%	<5	5 ~ 20	>20	关键块体占总体积的百分比
		B2	块体数量	<5	5 ~ 10	>10	关键块体的个数
		B3	等效安全系数	0 ~ 0. 8	0. 8 ~ 1. 05	> 1. 05	按块体体积加权得到
A2	地形特征	C1	坡面形态	坡面横纵向内凹或基本平直	坡面稍向外凸	坡面外凸明显,或呈明显 S 形	
		C2	坡角大小/(°)	<30	30 ~ 60	>90	
		C3	边坡高度/m	<10	10 ~ 30	>30	
A3	地质特征	D1	岩体强度/MPa	<50	50 ~ 100	>100	等效岩体抗压强度
		D2	岩体渗水性	干燥	潮湿	涌水	
		D3	风化程度	未风化或微风化	中风化	强风化	

表 2 典型边坡的评价参数
Table 2 Assessment parameters of the typical rock slope

初级指标	次级指标	+20E600	+20E1000	-20E800	-200E900
A1	B1	6. 817	8. 924	7. 752	7. 020
	B2	5	8	4	8
	B3	0. 681 4	0. 538 3	0. 582 1	0. 583 2
A2	C1	凸型	凹形	凸型	平面型
	C2	49. 3	48. 2	62. 1	53. 5
	C3	21. 2	22. 1	30. 4	20. 9
A3	D1	玄武岩 /88. 94	玄武岩 /117. 00	砂质凝灰岩 /50. 95	煤岩 /33. 15
	D2	干燥	干燥	涌水	涌水
	D3	强风化	中度风化	中度风化	强风化

表 3 各评价因素隶属度值
Table 3 Membership degree values of assessment factors

边坡	B1	B2	B3	C1	C2	C3	D1	D2	D3
+20E600	V ₁	0. 82	1	1	0. 2	0. 36	0. 44	0. 22	0. 65
	V ₂	0. 18	0	0	0. 6	0. 64	0. 56	0. 78	0. 28
	V ₃	0	0	0	0. 2	0	0	0	0. 07
+20E1000	V ₁	0. 66	0. 6	1	0. 73	0. 4	0. 35	1	0. 65
	V ₂	0. 34	0. 4	0	0. 2	0. 6	0. 65	0	0. 28
	V ₃	0	0	0	0. 07	0	0	0	0. 07
-20E800	V ₁	0. 75	1	1	0. 2	0	0	0. 02	0. 07
	V ₂	0. 25	0	0	0. 6	0. 93	0. 98	0. 98	0. 28
	V ₃	0	0	0	0. 2	0. 07	0. 02	0	0. 65
-200E900	V ₁	0. 8	0. 4	1	0. 63	0. 22	0. 45	0	0. 07
	V ₂	0. 2	0. 6	0	0. 3	0. 78	0. 55	0. 67	0. 28
	V ₃	0	0	0	0. 07	0	0	0. 33	0. 65

表 4 边坡权重系数分配表
Table 4 Weight distribution of assessment indexes for the slope

初级指标	初级指标权重	次级指标	次级指标权重
A1	0. 553 3	B1	0. 463 2
		B2	0. 291 8
		B3	0. 245 1
A2	0. 253 4	C1	0. 613 2
		C2	0. 168 9
		C3	0. 217 9
A3	0. 193 3	D1	0. 526 7
		D2	0. 213 6
		D3	0. 259 8

表 5 抚顺露天矿典型边坡评价结果
Table 5 Assessment results of typical slopes of Fushun strip mine

边坡	模糊评价			评价结果
	稳定	较稳定	不稳定	
+20E600	0. 628 7	0. 303 2	0. 068 1	稳定
+20E1000	0. 688 1	0. 286 0	0. 025 8	稳定
-20E800	0. 533 3	0. 392 7	0. 074 1	稳定
-200E900	0. 541 7	0. 352 8	0. 105 5	稳定

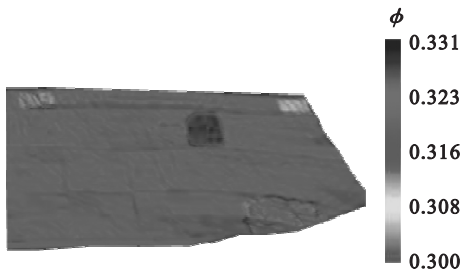


图3 抚顺露天矿 E600 ~ E1000 坡段可视化

Fig. 3 Visualization of Fushun strip mine E600 ~ E1000

3 结 论

本研究将块体理论与模糊综合评价技术相结合,对岩质边坡的稳定性进行了综合评价,通过非接触测量手段搜集现场资料,对岩质边坡的关键块体进行搜索,并且引入模糊理论和层次分析理论,克服了传统判定方法的主观性.同时,将块体理论与模糊综合评价相结合,确定岩坡的稳定性参数,弥补了块体理论考虑因素单一的缺点,可以很好反映岩体的稳定性特性.本文提出的评价模型在抚顺露天矿项目中应用效果良好,基本符合工程实际情况,可以为后续的矿山边坡加固及灾害防治提供可靠依据.

参考文献:

[1] Feng X T, Zhao H B, Li S J. A new displacement back analysis to identify mechanical geo-material parameters based on hybrid intelligent methodology[J]. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 2004, 28(11): 1141 – 1165.

[6] Warnett J M, Denissenko P, Thomas P J, et al. Scalings of axisymmetric granular column collapse[J]. *Granular Matter*, 2014, 16(1): 115 – 124.

[7] Staron L, Hinch E J. The spreading of a granular mass; role of grain properties and initial conditions [J]. *Granular Matter*, 2007, 9(3/4): 205 – 217.

[8] Huang J, Da Silva M V, Krabbenhoft K. Three-dimensional granular contact dynamics with rolling resistance [J]. *Computers and Geotechnics*, 2013, 49: 289 – 298.

[9] Langlois V J, Quikuerz A, Allemand P. Collapse of a two-dimensional brittle granular column: Implications for understanding dynamic rock fragmentation in a landslide[J].

[2] Kang F, Han S X, Salgado R, et al. System probabilistic stability analysis of soil slopes using Gaussian process regression with Latin hypercube sampling[J]. *Computers and Geotechnics*, 2015, 63(9): 13 – 25.

[3] Sahoo S, Dhar A, Kar A. Environmental vulnerability assessment using grey analytic hierarchy process based model [J]. *Environmental Impact Assessment Review*, 2016, 56(1): 145 – 154.

[4] 王述红, 杨勇, 王洋, 等. 基于数字摄像测量的开挖空间模型及不稳块体的快速识别[J]. *岩石力学与工程学报*, 2010, 29(sup 1): 3432 – 3438.

(Wang Shu-hong, Yang Yong, Wang Yang, et al. Spatial modeling and quick identification of unstable rock blocks based on digital photogrammetry [J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2010, 29(sup 1): 3432 – 3438.)

[5] Goodman R E, Shi G H. Block theory and its application to rock engineering[M]. Englewood Cliff: Prentice Hall, 1985.

[6] Lu J. Systematic identification of polyhedral rock blocks with arbitrary joints and faults[J]. *Computers and Geotechnics*, 2002, 29(1): 49 – 72.

[7] Wang S H, Ni P P, Guo M D. Spatial characterization of joint planes and stability analysis of tunnel blocks[J]. *Tunnelling and Underground Space Technology*, 2013, 38(1): 357 – 367.

[8] Wang S H, Ni Y, Viete D R, et al. Rock slope fracture process using a combined block theory and discontinuous deformation analysis approach based on the strength reduction method[J]. *Disaster Advances*, 2014, 7(5): 76 – 83.

[9] 夏元友, 朱瑞庚. 不稳定边坡治理方案的多层次模糊群决策[J]. *自然灾害学报*, 1998, 8(1): 88 – 91.

(Xia Yuan-you, Zhu Rui-geng. Multi-fuzzy decision for unstable slope strengthening[J]. *Journal of Natural Hazards*, 1998, 8(1): 88 – 91.)

[10] 张勇慧, 李红旭, 盛谦, 等. 基于模糊综合评判的公路岩质边坡稳定性分级研究[J]. *岩土力学*, 2010, 31(10): 3152 – 3156.

(Zhang Yong-hui, Li Hong-xu, Sheng Qian, et al. Study of stability gradation of highway rock slopes based on fuzzy comprehensive evaluation [J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2010, 31(10): 3152 – 3156.)

[10] Sarno L, Carravetta A, Martino R, et al. A two-layer depth-averaged approach to describe the regime stratification in collapses of dry granular columns [J]. *Physics of Fluids*, 2014, 26(10): 103303.

[11] Savage S B, Babaei M H, Dabros T. Modeling gravitational collapse of rectangular granular piles in air and water[J]. *Mechanics Research Communications*, 2014, 56: 1 – 10.

[12] Dunatunga S, Kamrin K. Continuum modelling and simulation of granular flows through their many phases[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 2015, 779: 483 – 513.

(上接第 895 页)