

doi: 10.12068/j.issn.1005-3026.2018.07.009

具预警状态的单模块可修复系统的指数稳定性

刘东旭^{1,2}, 王兰豪¹, 贾瑶¹, 张菁雯¹

(1. 东北大学 流程工业综合自动化国家重点实验室, 辽宁 沈阳 110819; 2. 延边大学 理学院, 吉林 延吉 133002)

摘 要: 研究了具有预警状态的单模块可修复系统, 将其动态变化过程用一组微分方程描述. 通过选取适当的状态空间和系统算子的定义域, 将方程化为 Banach 空间中的抽象柯西问题. 利用泛函分析和线性算子半群理论证明了系统具有严格占优的单重的 0 本征值, 说明系统的解满足渐近稳定性, 并求出其稳态解. 随后通过研究系统主算子的谱分布, 证明了系统主算子的本质谱界为负. 最后讨论了系统主算子在紧扰动下的本质谱界变化情况, 结果表明系统的动态解是指数稳定的.

关 键 词: C_0 半群; 指数稳定性; 本质谱界; 紧算子; 扰动

中图分类号: O 231.4 **文献标志码:** A **文章编号:** 1005-3026(2018)07-0954-05

Exponential Stability of Single-Module Repairable System with Warning State

LIU Dong-xu^{1,2}, WANG Lan-hao¹, JIA Yao¹, ZHANG Jing-wen¹

(1. State Key Laboratory of Synthetical Automation for Process Industries, Northeastern University, Shenyang 110819, China; 2. College of Science, Yanbian University, Yanji 133002, China. Corresponding author: LIU Dong-xu, E-mail: 125025633@qq.com)

Abstract: A kind of single-module repairable system with warning state was investigated, which can be expressed as a set of differential equations. By selecting the appropriate state space and the definition domain of the system operator, the equations were transformed into an abstract Cauchy problem in a Banach space. With the functional analysis method and linear operator semigroup theory, the eigenvalue 0 was proved to be the strictly dominant simple eigenvalue of the system. It shows the solution of the system is asymptotically stable. Then by studying the spectrum distribution of the main operator of the system, it was proved that the essential spectrum bound of the main operator of the system is negative. Finally, the variation of essential spectrum bound of the main operator under compact perturbation were discussed. The results demonstrate that the dynamic solution of the system is exponentially stable.

Key words: C_0 semigroup; exponential stability; essential spectrum bound; compact operator; perturbation

单模块可修复控制系统的可靠性在生产过程中起着非常重要的作用, 其是否稳定关系着整个生产流程能否正常运行.

本文研究的是一类具有预警状态的单模块分布参数系统. 文献[1]建立了具有预警状态的单模块可修复系统的模型, 并用 Laplace 变换证明了系统的解的存在性. 文献[2]利用算子半群理论证明了系统存在唯一的非负解, 从而证明了系

统解存在且唯一. 利用文献[2]的方法, 文献[3-5]证明了各自对象解的存在唯一性. 文献[6-7]分析了相关系统在一定条件下的系统算子本征值分布. 文献[8]利用上述结论, 证明了系统解的渐近稳定性, 即系统的动态解收敛于稳态解, 系统的瞬时可靠性收敛于系统的稳态可靠性. 但由于系统算子难以整体分析, 因此文献[8]对系统的动态解收敛速度没有进行进一步讨论. 为讨论系统

解是否满足指数稳定性,文献[9]尝试将系统算子进行拆分,单独讨论了一类可修复系统主算子的性质.文献[10]讨论了一类排队论系统,在文献[9]结论基础上利用算子半群的拟紧性、不可约性以及系统算子的伴随算子性质证明了研究对象满足时间依赖解的强收敛性和指数稳定性.但鉴于单模块可修复控制系统与排队论系统的区别,即单模块可修复控制系统的修复目标是将系统彻底修复,也就是修复到完好状态而不是预警状态或其他故障状态,因此讨论系统算子生成的强连续半群的性质十分复杂,文献[10]的方法难以对其进行讨论.本文利用文献[9-10]中的部分处理技巧和思想,在文献[8]的结论基础上首先把系统算子分成两部分,利用线性算子半群理论分析其主算子谱点分布,以及在紧扰动后本质谱界的变化情况,得到一般情况下系统算子谱点均位于左半开平面,且本征值 0 为单重本征值,进而证明此系统是指数稳定的.

1 系统模型描述

根据文献[1],该系统可能处于的状态共有 4 个,分别用状态 0~3 表示.用 t 时刻系统处于每一个状态的概率来作为系统的状态变量.系统的状态转化过程如图 1 所示.其中状态 0 指系统处于完好状态,正常运行;状态 1 为预警状态,即系统有轻微故障,但可以运行.一般认为系统性能在状态 1 时可以达到完好状态的 70% 以上,系统处

于此状态时即发出警报.由于系统仍可运行,修复过程可在不影响系统正常工作时进行,修复率为常数;状态 2 表示系统由于故障而完全损坏或性能低于完好状态的 70%.系统若处于此状态,只能停止正常工作进行维修,随着修复时间的增加,修复的可能性也在增大;状态 3 表示系统遇到不可抗外部因素而损坏,发生可能性比状态 2 小,但修复难度一般比状态 2 大,因此损坏率和修复率都与状态 2 不同. $\lambda_s(s=1,2,3,4,5)$ 表示系统各状态的常数损坏率; $\mu,\mu_2(x),\mu_3(x)$ 表示系统的修复率, x 表示维修时间.设 $p_i(t)(i=0,1)$ 表示 t 时刻系统处于状态 i 的概率; $p_j(t,x)(j=2,3)$ 表示 t 时刻系统处于状态 j 且维修时间为 x 的概率. $p_i(t)(i=0,1)$ 和 $p_j(t,x)(j=2,3)$ 即为状态变量.

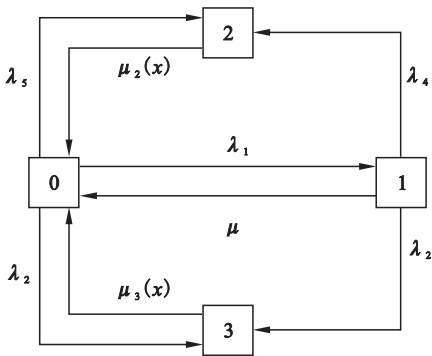


图 1 系统状态转换图
Fig. 1 Transition diagram of system state

根据文献[8],此系统模型可以用如下方程描述:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp_0(t)}{dt} &= -(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_5)p_0(t) + \mu p_1(t) + \sum_{j=2}^3 \int_0^\infty p_j(t,x)\mu_j(x)dx, \\ \frac{dp_1(t)}{dt} &= -(\lambda_3 + \lambda_4 + \mu)p_1(t) + \lambda_1 p_0(t), \\ \frac{\partial p_j(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial p_j(t,x)}{\partial x} &= -\mu_j(x)p_j(t,x) \quad (j=2,3), \\ p_2(t,0) &= \lambda_4 p_1(t) + \lambda_5 p_0(t), \\ p_3(t,0) &= \lambda_3 p_1(t) + \lambda_2 p_0(t), \\ p_0(0) &= 1, p_i(0) = p_2(0,x) = p_3(0,x) = 0 \quad (i=0,1). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

考虑到模型的实际背景,作如下假设:
 $0 \leq \mu(x) < +\infty, 0 \leq x < +\infty, \int_0^\infty \mu_j(\xi)d\xi = \infty,$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_0^x \mu_j(\xi)d\xi < +\infty.$$

并选取如下的状态空间:
 $X = C^2 \times L^1[0, \infty) \times L^1[0, \infty).$
 对空间中任意元素 $y = (y_0, y_1, y_2(x),$

$y_3(x)) \in X$,按如下方式定义其范数:
 $\|y\| = |y_0| + |y_1| + \|y_2\|_{L^1} + \|y_3\|_{L^1}.$
 因此空间 $(X, \|\cdot\|)$ 显然是一个 Banach 空间.
 令 $a_0 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_5; a_1 = \lambda_3 + \lambda_4 + \mu$,则选取算子 A 和 B 及其定义域:

$$A = \text{diag}\left(-a_0, -a_1, -\frac{d}{dx} - \mu_2(x), -\frac{d}{dx} - \mu_3(x)\right),$$

$$D(A) = \{P \in X \mid \frac{dp_j(x)}{dx} \in L^1(\mathbf{R}^+), j=2,3; p_2(0) = \lambda_4 p_1(t) + \lambda_5 p_0(t), p_3(0) = \lambda_3 p_1(t) + \lambda_2 p_0(t)\},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & \mu & \int_0^\infty \mu_2(x) dx & \int_0^\infty \mu_3(x) dx \\ \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

取 $D(B) = X$. 故式(1)可化成 Banach 空间 X 中的抽象柯西问题:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dP(t)}{dt} &= (A + B)P(t), t > 0, \\ P(0) &= (1, 0, 0, 0)^T. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

2 系统的指数稳定性

2.1 系统的稳态解

令 $(\gamma I - A - B)P = 0$, 即

$$\left. \begin{aligned} (\gamma + a_0)p_0 - \mu_1 p_1 - \sum_{j=2}^3 \int_0^\infty p_j(x) \mu_j(x) dx &= 0, \\ -\lambda_1 p_0 + (\gamma + a_1)p_1 &= 0, \\ \frac{dp_j(x)}{dx} + (\gamma + \mu_j(x))p_j(x) &= 0, j = 2, 3, \\ p_2(0) &= \lambda_4 p_1 + \lambda_5 p_0, \\ p_3(0) &= \lambda_3 p_1 + \lambda_2 p_0. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

解式(3)可以得到

$$p_j(x) = p_j(0) e^{-\int_0^x (\gamma + \mu_j(\xi)) d\xi}, j = 2, 3. \quad (4)$$

将式(4)代入方程(3)得到

$$\begin{aligned} &(\gamma + a_0)p_0 - \mu_1 p_1 - \sum_{j=2}^3 p_j(0) \int_0^\infty \mu_j(x) \times \\ &e^{-\int_0^x (\gamma + \mu_j(\xi)) d\xi} dx = 0. \end{aligned}$$

因此方程(3)可以化为如下形式:

$$\left. \begin{aligned} (\gamma + a_0)p_0 - \mu_1 p_1 - \sum_{j=2}^3 p_j(0) \mu_{j,\gamma} &= 0, \\ \lambda_1 p_0 - (\gamma + a_1)p_1 &= 0, \\ \lambda_4 p_1 + \lambda_5 p_0 - p_2(0) &= 0, \\ \lambda_3 p_1 + \lambda_2 p_0 - p_3(0) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

其中 $\mu_{j,\gamma} = \int_0^\infty \mu_j(x) e^{-\int_0^x (\gamma + \mu_j(\xi)) d\xi} dx, j = 2, 3$.

方程(5)的系数行列式记为 $D(\gamma)$, 则

$$D(\gamma) = \begin{vmatrix} \gamma + a_0 & -\mu & -\mu_{2,\gamma} & -\mu_{3,\gamma} \\ \lambda_1 & -(\gamma + a_1) & 0 & 0 \\ \lambda_5 & \lambda_4 & -1 & 0 \\ \lambda_2 & \lambda_3 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

容易验证当 $\gamma = 0$ 时, $D(\gamma) = 0$. 即 $\gamma = 0$ 是系统的本征值. 这时可解方程(5)的一组非零解 $P = (p_0, p_1, p_2(x), p_3(x))$ 为

$$p_1 = \frac{\lambda_1}{a_1} p_0,$$

$$p_2(x) = \left(\frac{\lambda_4 \lambda_1}{a_1} + \lambda_5\right) p_0 e^{-\int_0^x \mu_3(\xi) d\xi},$$

$$p_3(x) = \left(\frac{\lambda_3 \lambda_1}{a_1} + \lambda_2\right) p_0 e^{-\int_0^x \mu_3(\xi) d\xi}.$$

将上述解向量 P 作标准化处理, 取

$$\left. \begin{aligned} N &= 1 + \frac{\lambda_1}{a_1} + \left(\frac{\lambda_4 \lambda_1}{a_1} + \lambda_5\right) e^{-\int_0^x \mu_3(\xi) d\xi} + \\ &\left(\frac{\lambda_3 \lambda_1}{a_1} + \lambda_2\right) e^{-\int_0^x \mu_3(\xi) d\xi}, \\ \text{得} \\ \hat{p}_0 &= \frac{1}{N} p_0, \\ \hat{p}_1 &= \frac{\lambda_1}{a_1 N} p_0, \\ \hat{p}_2(x) &= \frac{1}{N} \left(\frac{\lambda_4 \lambda_1}{a_1} + \lambda_5\right) p_0 e^{-\int_0^x \mu_3(\xi) d\xi}, \\ \hat{p}_3(x) &= \frac{1}{N} \left(\frac{\lambda_3 \lambda_1}{a_1} + \lambda_2\right) p_0 e^{-\int_0^x \mu_3(\xi) d\xi}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

取 $P^* = (\hat{p}_0, \hat{p}_1, \hat{p}_2(x), \hat{p}_3(x))$.

由文献[8]如下定理成立.

定理 1^[8]:

- 1) $\gamma = 0$ 是系统的单重本征值.
- 2) $\{\gamma \in \mathbf{C} \mid \text{Re} \gamma > 0 \text{ 或 } \gamma = ia, a \in \mathbf{R}, a \neq 0\} \subset \rho(A + B)$.

其中, $\rho(A + B)$ 为算子 $A + B$ 的正则集.

由定理 1 知, 由式(6)定义的 P^* 为系统的稳态解.

2.2 系统的谱分布

定理 2 对系统主算子 A , 令 $c = \min\{\lambda_1, \mu, c_j\}, j = 2, 3$, 则当 $\text{Re} \gamma > -c$ 时必有 $\gamma \in \rho(A)$, 且

$$\|(\gamma I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\text{Re} \gamma + c}.$$

证明 当 $\text{Re}\gamma > -c$ 时,取 $\mathbf{y} = (y_0, y_1, y_2(x), y_3(x))$, $\mathbf{P} = (p_0, p_1, p_2(x), p_3(x))$, 令

$$\left. \begin{aligned} (\gamma \mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{P} &= \mathbf{y}, \text{有} \\ (\gamma + a_0)p_0 &= y_0, \\ (\gamma + a_1)p_1 &= y_1, \\ \frac{dp_2(x)}{dx} + [\gamma + \mu_2(x)]p_2(x) &= y_2(x), \\ \frac{dp_3(x)}{dx} + [\gamma + \mu_3(x)]p_3(x) &= y_3(x), \\ p_2(x) &= \lambda_4 p_1 + \lambda_5 p_0, \\ p_3(x) &= \lambda_3 p_1 + \lambda_2 p_0. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

由于 $\text{Re}\gamma > -c$, 故 $\gamma \neq -a_i, i = 0, 1$. 解式(7)

得

$$p_i = \frac{y_i}{\gamma + a_i},$$

$$p_2(x) = \left(\frac{\lambda_4 y_1}{\gamma + a_1} + \frac{\lambda_5 y_0}{\gamma + a_0} \right) e^{-\gamma x - \int_0^x \mu_2(\xi) d\xi} + \int_0^x e^{-\gamma(x-\tau) - \int_\tau^x \mu_2(\xi) d\xi} y_2(\tau) d\tau,$$

$$p_3(x) = \left(\frac{\lambda_3 y_1}{\gamma + a_1} + \frac{\lambda_2 y_0}{\gamma + a_0} \right) e^{-\gamma x - \int_0^x \mu_3(\xi) d\xi} + \int_0^x e^{-\gamma(x-\tau) - \int_\tau^x \mu_3(\xi) d\xi} y_3(\tau) d\tau.$$

因此有

$$\begin{aligned} \|\mathbf{P}\| &= \sum_{i=0}^1 \|p_i\| + \sum_{j=2}^3 \|p_j\| \leq \sum_{i=0}^1 \left| \frac{y_i}{\gamma + a_i} \right| + \\ &\left| \frac{\lambda_4 y_1}{\gamma + a_1} + \frac{\lambda_5 y_0}{\gamma + a_0} \right| \int_0^\infty e^{-\text{Re}\gamma x - \int_0^x \mu_2(\xi) d\xi} dx + \\ &\int_0^\infty dx \int_0^x e^{-\text{Re}\gamma(x-\tau) - \int_\tau^x \mu_2(\xi) d\xi} y_2(\tau) d\tau + \\ &\left| \frac{\lambda_3 y_1}{\gamma + a_1} + \frac{\lambda_2 y_0}{\gamma + a_0} \right| \int_0^\infty e^{-\text{Re}\gamma x - \int_0^x \mu_3(\xi) d\xi} dx + \\ &\int_0^\infty dx \int_0^x e^{-\text{Re}\gamma(x-\tau) - \int_\tau^x \mu_3(\xi) d\xi} y_3(\tau) d\tau \leq \sum_{i=0}^1 \left| \frac{y_i}{\gamma + a_i} \right| + \\ &\left| \frac{\lambda_4 y_1}{\gamma + a_1} + \frac{\lambda_5 y_0}{\gamma + a_0} \right| \int_0^\infty e^{-(\text{Re}\gamma + c)x} dx + \\ &\int_0^\infty \|y_2(\tau)\| dx \int_\tau^\infty e^{-(\text{Re}\gamma + c)(x-\tau)} y_2(\tau) d\tau + \\ &\left| \frac{\lambda_3 y_1}{\gamma + a_1} + \frac{\lambda_2 y_0}{\gamma + a_0} \right| \int_0^\infty e^{-(\text{Re}\gamma + c)x} dx + \\ &\int_0^\infty \|y_3(\tau)\| dx \int_\tau^\infty e^{-(\text{Re}\gamma + c)(x-\tau)} y_3(\tau) d\tau = \\ &\sum_{i=0}^1 \left| \frac{y_i}{\gamma + a_i} \right| + \frac{1}{\text{Re}\gamma + c} \left| \frac{\lambda_4 y_1}{\gamma + a_1} + \frac{\lambda_5 y_0}{\gamma + a_0} \right| + \\ &\frac{1}{\text{Re}\gamma + c} \left| \frac{\lambda_3 y_1}{\gamma + a_1} + \frac{\lambda_2 y_0}{\gamma + a_0} \right| + \frac{1}{\text{Re}\gamma + c} \sum_{j=2}^3 \|y_j\| = \\ &\frac{1}{\text{Re}\gamma + c} \left[\frac{1}{|\gamma + a_0|} (\text{Re}\gamma + c + \lambda_5 + \lambda_2) \|y_0\| + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\text{Re}\gamma + c} \left[\frac{1}{|\gamma + a_1|} (\text{Re}\gamma + c + \lambda_3 + \lambda_4) \|y_1\| + \right. \\ &\left. \frac{1}{\text{Re}\gamma + c} \sum_{j=2}^3 \|y_j\| \right], \\ &\text{可以得到} \\ &\|\mathbf{P}\| \leq \frac{1}{\text{Re}\gamma + c} \left(\sum_{i=0}^1 \|y_i\| + \sum_{j=2}^3 \|y_j\| \right) = \\ &\frac{1}{\text{Re}\gamma + c} \|\mathbf{y}\|. \end{aligned}$$

这就意味着对任意满足 $\text{Re}\gamma > -c$ 的 γ , $(\gamma \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}: X \rightarrow X$ 是有界的, 所以 $\gamma \in \rho(\mathbf{A})$, 且满足 $\|(\gamma \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\| \leq \frac{1}{\text{Re}\gamma + c}$.

根据文献[11]中的 Lumer – Phillips 定理, 可以得到如下推论.

推论 1 系统的主算子 \mathbf{A} 生成一个 C_0 半群, 记为 $\mathbf{S}(t)$. 且存在某个 ω 满足 $c > \omega > 0$, 使得 $\|\mathbf{S}(t)\| \leq e^{-\omega t}, t > 0$.

注意到 \mathbf{B} 是一个有限秩算子, 因此一定是紧算子. 根据算子半群的扰动理论, 可以得到如下结论.

定理 3 系统算子 $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ 生成一个 C_0 半群 $\mathbf{T}(t)$. 且满足 $\|\mathbf{T}(t)\mathbf{P}(0) - \langle \mathbf{P}(0), \mathbf{Q} \rangle \mathbf{P}^*\| \leq M e^{(\text{Re}\gamma_1 + \delta)t}, t > 0$.

其中: $\mathbf{Q} = (1, 1, 1, 1)^T$ 为 X 的共轭空间 X^* 中算子 $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^*$ 的 0 特征值对应的特征向量^[12]; γ_1 为系统算子 $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ 实部最大的非零特征值; δ 与 M 为正常数, 且满足 $\text{Re}\gamma_1 + \delta < 0$.

证明 由定理 2 可知, 系统主算子 \mathbf{A} 的本质谱界 $S_{\text{ess}}(\mathbf{A}) < -c$. 而由文献[13]可知, 紧算子的扰动不改变半群的本质谱界, 即 $S_{\text{ess}}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) < -c$. 这就说明任意满足 $\text{Re}\gamma \in (-c, 0)$ 的谱点 γ , γ 必是 $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ 的有限重孤立本征值.

取 γ_1 为系统算子 $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ 实部最大的非零特征值. 设 $\mathbf{P}(t, \cdot)$ 为系统的动态解, 则根据半群的分解定理, 有

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(t, \cdot) &= \mathbf{T}(t)\mathbf{P}(0) = \langle \mathbf{P}(0), \mathbf{Q} \rangle \mathbf{P}^* + \\ &\mathbf{R}(t)\mathbf{P}(0), \\ \text{即 } \|\mathbf{T}(t)\mathbf{P}(0) - \langle \mathbf{P}(0), \mathbf{Q} \rangle \mathbf{P}^*\| &\leq \\ M e^{(\text{Re}\gamma_1 + \delta)t} &\text{成立.} \end{aligned}$$

3 仿真实验

在实际研究中, 主要关注系统的可靠性, 即系统能够正常工作的概率. 此模型中的 $p_0(t)$ 即为 t 时刻处于完好状态的概率, 一般称其为瞬时可靠性(IR), 它是重点被关注的可靠性指标. 其下确

界或最小值称为稳态可靠性(SR).

系统实际运行过程中,从完好状态(状态 0)转移到预警状态(状态 1)的损坏率 λ_1 应该大于其他损坏率. 而系统如果处于预警状态,说明系统已经部分出现故障,因此从预警状态到常规故障状态(状态 2)的损坏率应该高于从完好状态直接到常规故障状态的损坏率,即 $\lambda_4 > \lambda_5$. 而系统由于火灾和地震等意外造成故障的可能性较低,且系统无论处于完好状态还是预警状态,系统发生意外的可能性均等,即 $\lambda_2 = \lambda_3$. 系统处于预警状态时对系统的修复为在线修复,即系统在运行状态下适时维修,故常数修复率 μ 一般应小于系统故障后离线维修的修复率均值. 而系统遭遇意外造成的故障一般比常规故障更难修复,故 $\mu_3(x)$ 的均值应小于 $\mu_2(x)$ 的均值.

基于上述分析,取 $\lambda_1 = 0.5, \lambda_2 = 0.1, \lambda_3 = 0.1, \lambda_4 = 0.3, \lambda_5 = 0.2, \mu = 0.4$, 将 $\mu_2(x)$ 和 $\mu_3(x)$ 取均值,令 $\mu_2 = 0.8, \mu_3 = 0.6$.

图 2 中的仿真结果显示系统的瞬时可靠性 $p_0(t)$ 以指数形式收敛到稳态解,且稳态解即为其稳态可靠性. 瞬时可靠性 $p_0(t)$ 在 $t \in (0, +\infty)$ 上一直保持单调递减,即有限时间内系统的瞬时可靠性始终大于稳态可靠性.

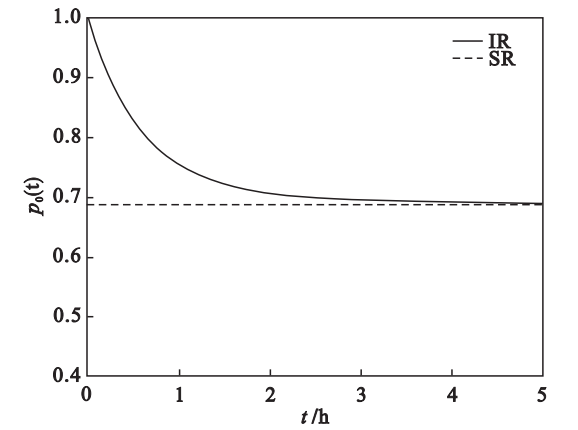


图 2 系统的瞬时可靠性和稳态可靠性
Fig. 2 Instantaneous reliability and steady-state reliability of the system

4 结 论

为分析具预警状态的单模块可修复系统的稳定性,本文将系统算子拆成两个算子之和. 利用线性算子半群理论证明其中一个算子生成 C_0 半群,且谱点均在左半平面. 而另一个算子为紧算子,因此两个算子之和依然生成 C_0 半群. 根据半群紧扰动理论可以证明 0 为系统算子的单重本征值,并

且虚轴左侧一个带状区域内只有有限个孤立本征值. 从而利用算子半群的分解定理,证明系统的动态解以指数形式收敛于系统的稳态解,即系统满足指数稳定性. 后续工作将讨论当修复率变化时系统瞬时可靠性的动态及稳态性能.

参考文献:

[1] Balbir S D. A common cause failure availability model[J]. *Microelectronics Reliability*, 1976, 15: 491 – 492.

[2] 凤宝林, 张玉峰. 具有四个状态的系统解的半离散化[J]. *数学的实践与认识*, 2006, 36(5): 165 – 172.
(Feng Bao-lin, Zhang Yu-feng. The semi-discretization of a four-state system[J]. *Mathematics in Practice and Theory*, 2006, 36(5): 165 – 172.)

[3] Guo L N, Xu H B, Gao C, et al. Further research of a new kind of series repairable system[J]. *Journal of Systems Science & Complexity*, 2012, 25(4): 744 – 758.

[4] Qiao X, Ma D, Zheng F, et al. The well-posedness and stability analysis of a computer series system[J]. *Journal of Applied Mathematics*, 2013(1): 2133 – 2178.

[5] 王金鑫, 梁京成. 具有易损坏储备部件可修复系统解的存在唯一性[J]. *延边大学学报(自然科学版)*, 2012, 38(4): 275 – 278.
(Wang Jin-xin, Liang Jing-cheng. The existence and uniqueness of the solution of a repairable system with a deteriorating standby unit[J]. *Journal of Yanbian University (Natural Science Edition)*, 2012, 38(4): 275 – 278.)

[6] Shen Y H, Zhang Y F, Jin A D. Exponential stability analysis of a Markovian deteriorating system[J]. *Journal of Systems Science & Information*, 2009, 45(2): 129 – 140.

[7] Liu D X, Ji Y. Reliability analysis of a repairable quality control system with an identical warm-standby subsystem[J]. *Scientific Journal of Control Engineering*, 2016, 6: 8 – 14.

[8] Ji C, Liu D X. Stability analysis of a kind of repairable control system with partial state[J]. *Scientific Journal of Control Engineering*, 2016, 6: 47 – 51.

[9] 任寒景, 张玉峰, 金光植, 等. 含同原因故障和一个冷储备部件的可修复系统主算子性质[J]. *数学的实践与认识*, 2015, 45(6): 255 – 264.
(Ren Han-jing, Zhang Yu-feng, Jin Guang-zhi, et al. Properties of the main operator of a repairable system with common-cause failure and a cold standby unit[J]. *Mathematics in Practice and Theory*, 2015, 45(6): 255 – 264.)

[10] Ehmet K, Gupur G. Dynamic analysis of the M/G/1 queueing model with single working vacation[J]. *International Journal of Applied and Computational Mathematics*, 2016, 44(1): 1 – 31.

[11] Pazy A. Semigroups of linear operators and application to partial differential equations[M]. New York: Springer, 1983.

[12] Liu D X, Sun S Y. Exponential stability of the solution of single-component repairable system with an identical cold-standby component[J]. *Scientific Journal of Control Engineering*, 2015, 5(5): 57 – 62.

[13] Liu D X, Si W Y, Yin Z. Exponential stability analysis of the solution of a repairable human-machine system[J]. *Scientific Journal of Control Engineering*, 2014, 4(3): 86 – 93.