

基于增广拉格朗日的全变分正则化 CT 迭代重建算法

孝大宇, 郭 洋, 李建华, 康 雁
(东北大学 中荷生物医学与信息工程学院, 辽宁 沈阳 110169)

摘 要: 采用一种基于增广拉格朗日方法(augmented Lagrangian method)求解全变分正则化(total variation regularization)算法(ALMTVR)来进行CT图像重建. 将ALMTVR算法与经典的代数重建算法(algebraic reconstruction technique, ART)进行比较, 并采用仿真数据与实际数据进行实验. 在实验中, 使用ALMTVR算法与ART算法分别进行图像重建, 并对重建图像进行对比分析. 实验结果表明: 所提算法与ART算法相比, 显著提高了图像重建的质量与速度, 显示了其对图像重建的有效性及在CT成像系统中潜在的应用价值.

关 键 词: CT 迭代重建; 增广拉格朗日方法; 全变分正则化; 仿真数据; 实际投影数据
中图分类号: TP **文献标志码:** A **文章编号:** 1005-3026(2018)07-0964-06

Total Variation Regularization CT Iterative Reconstruction Algorithm Based on Augmented Lagrangian Method

XIAO Da-yu, GUO Yang, LI Jian-hua, KANG Yan
(School of Sino-Dutch Biomedical & Information Engineering, Northeastern University, Shenyang 110169, China.
Corresponding author: KANG Yan, professor, E-mail: kangy@neusoft.com)

Abstract: A novel algorithm based on augmented Lagrangian method was presented to solve total variation regularization problem (ALMTVR) of the CT iterative reconstruction. The classical algebraic reconstruction technique (ART) was compared with the ALMTVR algorithm, the simulation data and actual data are used in the experiment. The ALMTVR algorithm and the ART algorithm were used to reconstruct the images respectively, and the reconstruction images were compared and analyzed. Results showed that, compared with ART algorithm, the proposed algorithm can significantly improve image quality and reconstruction speed, which indicates the proposed algorithm is effective and has potential applications in the CT imaging system.

Key words: CT iterative reconstruction; augmented Lagrangian method; total variation regularization; simulation data; real projection data

计算机断层成像(computer tomography, CT)技术被公认为是20世纪下半叶最伟大的发明之一,它给医学领域带来了革命性的变化,还成功地应用于许多其他工程领域. 对于CT成像系统而言,CT重建算法至关重要,CT图像重建算法的优劣直接影响着图像的质量与重建速度,迄今为止已经出现了多种重建算法,例如:FDK重建算法、BPF重建算法、ART算法等. 这些算法各有优点,适用于不同条件下的成像,但也都存在一些不足,比如:FDK算法虽然重建速度快、占用内存少,但锥角增大时伪影严重且反投影时间长;BPF算法虽然重建图像精确且可降低剂量,但实现过程运算量大^[1];ART算法虽可重建角度缺失的投影数据,但重建时间较长^[2]. 本文中引入了一种基于增广拉格朗日方法(augmented Lagrangian method)求解全变分正则化(total variation regularization)算法(ALMTVR),此方法与其他一些经典重建算法相比有着重建速度快、重建图像质量高的优点.

1 增广拉格朗日方法的全变分正则化算法介绍

一个用全变分正则化解决压缩感知问题的方法^[3]为

$$\min_u \sum_i \|D_i u\|, Au = b. \tag{1}$$

式中： $u \in \mathbf{R}^n$ 或写成 $u \in \mathbf{R}^{s \times t}$ 其中 $s \times t = n, D_i u \in \mathbf{R}^2$ 表示图像 u 中第 i 个像素的离散梯度； $A \in \mathbf{R}^{m \times n} (m < n)$ 表示系统矩阵； $b \in \mathbf{R}^m$ 是图像 u 经由系统矩阵 A 得到的测量值； $\|\cdot\|$ 可以代表 1 范数（对应各项异性全变分），也可以代表 2 范数（对应各项同性全变分）。这种算法可以重建不同边界条件的图像 u 。

1.1 全变分最小化的增广拉格朗日算法

在该 ALMTVR 算法中采用式(2)来等价替代式(1)中的全变分模型^[4]：

$$\min_{w_i, u} \sum_i \|w_i\|, Au = b, D_i u = w_i. \tag{2}$$

其相对应的增广拉格朗日函数为

$$L_A(w_i, u) = \sum_i (\|w_i\| - v'_i(D_i u - w_i) + \frac{\beta_i}{2} \|D_i u - w_i\|_2^2) - \lambda'(Au - b) + \frac{\mu}{2} \|Au - b\|_2^2. \tag{3}$$

替换式(2)中的全变分模型后仍能保证全局收敛性定理收敛，所以仍可以应用增广拉格朗日算法^[5]。根据式(3)中 v'_i 与 λ' 的值须随着迭代次数不断变化，将式(3)的真值记为 u^* 和 w_i^* ，则这两个因子的更新公式为

$$\bar{v}_i = v_i - \beta_i(D_i u^* - w_i^*), \tag{4}$$

$$\bar{\lambda} = \lambda' - \mu(Au^* - b). \tag{5}$$

如果将增广拉格朗日算法直接应用到式(1)，则可以得到相应的增广拉格朗日函数为

$$\bar{L}_A(u) = \sum_i \|D_i u\| - \lambda'(Au - b) + \frac{\mu}{2} \|Au - b\|_2^2. \tag{6}$$

如果在每个像素中引入一个松弛因子 $w_i \in \mathbf{R}^2$ ，则可以将 $D_i u$ 从不可微分的项 $\|\cdot\|$ 中分离出来，然后去掉两者之间的差，可以将式(6)中第一项求和中的每一项分解成

$$\|w_i\| - v'_i(D_i u - w_i) + \frac{\beta_i}{2} \|D_i u - w_i\|_2^2. \tag{7}$$

把式(7)代回到式(6)中可以得到与式(3)中相同的目标函数。

根据增广拉格朗日算法的框架需要在每次迭

代中有效地解出 $L_A(w_i, u)$ 以求解式(1)中的问题。

1.2 整体算法流程

通过将增广拉格朗日算法与交替最小化算法结合可以有效优化式(1)中的全变分模型，ALMTVR 具体算法如下：

步骤 1 初始化所有 i 值下的 $v_i^0, \beta_i^0, \lambda^0, \mu^0$ 和起始点 $w_{i,0}^0, u^0$ ；

步骤 2 当不满足外部停止条件时：

1) 令 $w_{i,0}^{k+1} = w^k, u_0^{k+1} = u^k$ ；

2) 求解从 $w_{i,0}^{k+1}, u_0^{k+1}$ 开始的式(3)中的增广拉格朗日函数的解 w_i^{k+1}, u^{k+1} ；

3) 应用式(4)与式(5)中的因子更新公式获得 v_i^{k+1}, λ^{k+1} ；

4) 选择新的惩罚因子 $\beta_i^{k+1} \geq \beta_i^k$ 和 $\mu^{k+1} \geq \mu^k$ ，直到满足外部停止条件。

外部停止条件可由以下两种方法确定：式(2)中的最优性条件已经近似达到；相对变化 $\|u^{k+1} - u^k\|$ 已经足够小。

这种算法框架灵活，可应用于诸多领域中。

1.3 参数选择

由于应用仿真数据重建已知原图像，所以可以用均方误差（mean squared error, MSE）来度量参数选择的好坏，但对于实际的 CT 扫描数据来说，由于原图像未知则不能采用均方误差来度量参数选择的好坏，所以这里引入一个无需已知原图像的度量参数，称为度量标准 Q (Metric Q)。度量标准 Q 是一种无参考型度量参数^[6]，它通过沿着图像中边缘等几何特征计算图像的锐利度与对比度来度量图像的质量。

为了方便起见，在这里简单介绍一下度量标准 Q 的计算方法。对于一幅图像 $I: [1, N_1] \times [1, N_2]$ ，首先将图像 I 分成 M 个互斥的片段 $\{P_i\}_{i \in \{0, \dots, M\}}$ ，则每个片段的梯度矩阵 G_i 的计算公式为

$$G_i = S((-1, 1) * P_i) S((-1, 1)^T * P_i). \tag{8}$$

之后用 G_i 的奇异值 $s_{i,1} > s_{i,2}$ 来计算一致性：

$$R_i = \frac{s_{i,1} - s_{i,2}}{s_{i,1} + s_{i,2}}. \tag{9}$$

则单片段方向的度量标准 Q 为

$$Q_i = s_{i,1} \cdot R_i. \tag{10}$$

对于最终的度量标准 Q ，只有一致性的值超过特定阈值的片段才会对其产生影响。令 $S \subset [1, M]$ 代表通过阈值片段的下标的集合，则图像 I 的度量标准 Q 为

$$Q = \frac{1}{|S|} \sum_{i \in S} Q_i. \tag{11}$$

2 实验与结果分析

为了验证本文提出的 ALMTVR 算法在 CT 图像重建领域中的应用价值,实验采用 5 组 CT 影像数据来比较 ALMTVR 算法与传统的 ART 算法在 CT 重建中的重建速度与精度,其中 3 组数据为仿真 CT 影像数据,2 组为核桃和兔子的实际扫描数据.本次实验的数据处理均在 Matlab 中进行.

2.1 实验

2.1.1 仿真实验

模拟数据使用的是 FORBILD 的头部、胸部模体^[7]和 Shepp – Logan 模型.原图像分辨率为 256 × 256,投影数据是采用 512 通道同时经 360°每隔 1°进行一次数据采集得到的,投影数据加入 2% 的白噪声进行图像重建.

2.1.2 实际实验

核桃的实际扫描数据是用口腔 CT 原型系统进行采集,X 射线的管电压与管电流分别设置为

70 kV 与 2 mA.采用 512 通道同时经一周 360°进行 368 次均匀采集,一周数据采集共用时 18 s,重建得到的图像分辨率为 256 × 256.

兔子的实际数据是采用锥束 CT 实验系统进行扫描,X 射线管电压和管电流分别为 85 kV,2.7 mA.X 射线探测器为 1 024 通道,一周 360°采集 300 个投影数据,重建图像的分辨率为 256 × 256.

2.2 实验结果及分析

2.2.1 仿真实验结果及分析

仿真实验结果如图 1 所示,各图的对比度均设置在 1 到 2 之间.对比图 1c 与图 1d,图 1g 与图 1h,图 1k 与图 1l 可以看到,相比 ART 算法得到的图像,ALMTVR 算法得到的图像的噪声点更少,通过观察得出 ALMTVR 算法重建出的图像抗噪声干扰的能力更强.

为了更加直观地对比两种重建算法的重建效果,将图 1a ~ 图 1d 中线上像素的像素值在同一张图中绘成曲线,如图 2a 所示,将图 1e,图 1f,图 1g,图 1h 中线上像素的像素值在同一张图中绘成曲线,如图 2c 所示,将图 1i,图 1j,图 1k,图 1l 中线上像素的像素值在同一张图中绘成曲线,如图 2e

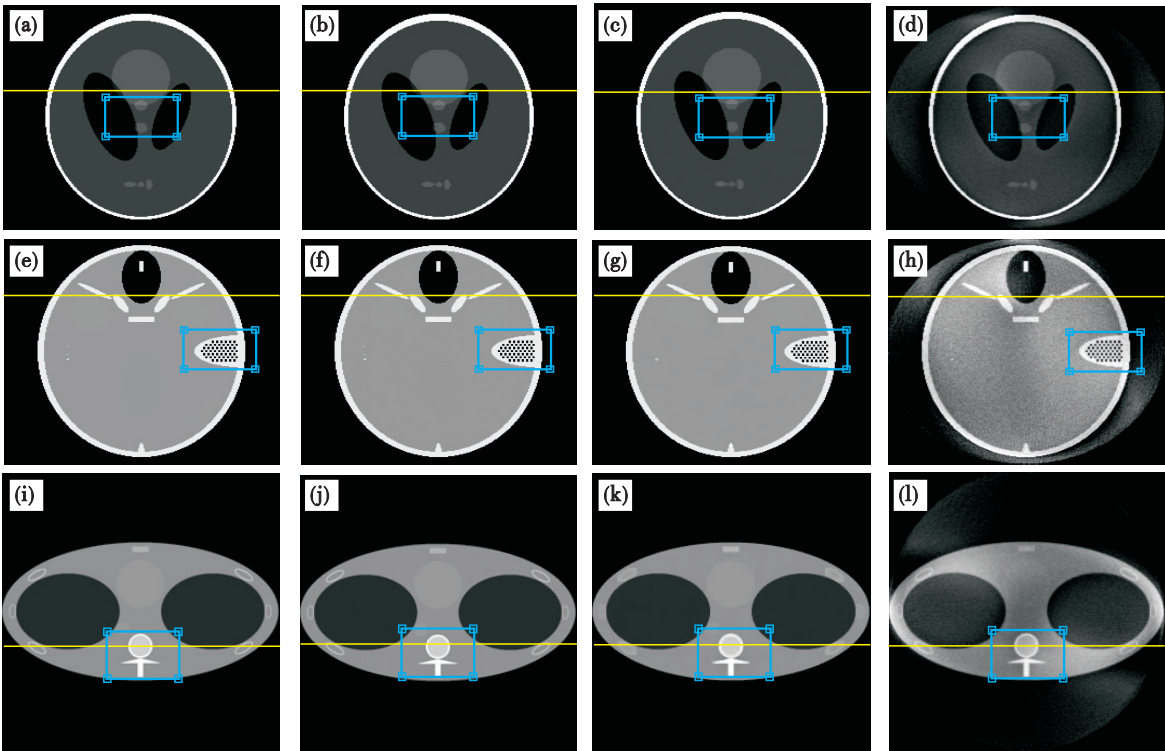


图 1 仿真数据重建实验结果

Fig. 1 Experiment results of simulation data

(a)—Shepp – Logan 原图像;(b)—Shepp – Logan 原图像上加入 2% 白噪声后的图像;(c)—Shepp – Logan ALMTVR 算法重建图像;(d)—Shepp – Logan ART 算法重建图像;(e)—FORBILD 头部的原图像;(f)—在 FORBILD 头部原图像上加入 2% 白噪声后的图像;(g)—FORBILD 头部 ALMTVR 算法重建图像;(h)—FORBILD 头部 ART 算法重建图像;(i)—FORBILD 胸部的原图像;(j)—在 FORBILD 胸部原图像上加入 2% 白噪声后的图像;(k)—FORBILD 胸部 ALMTVR 算法重建图像;(l)—FORBILD 胸部 ART 算法重建图像.

所示。观察上述各图可以看到,ALMTVR 算法重建出的图像的像素值更稳定,与原图像的像素值更贴近,而 ART 算法重建出图像的像素值波动更大,受噪声影响更大。

ART 算法与 ALMTVR 算法中都存在可调节参数来调节算法的重建效果^[8],本次实验中 ART 算法使用的主要调节参数为迭代参数 k ,ALMTVR 算法的主要调节参数为惩罚因子 μ 。实验中采用 MSE 与 Metric Q 来度量图像的质量,

观察上述各图可知,对于 ART 算法,MSE 取得最小值与 Metric Q 取得最大值的迭代参数 k 相

Metric Q 取得最大值时表明图像质量最佳,MSE 取得最小值时表明图像质量为最佳^[9]。为确认 Metric Q 是否能用来度量 CT 重建得到图像的质量^[10],本次实验中将改变 ART 与 ALMTVR 两种算法的主要参数进行多次重建,并计算得到多组 MSE 与 Metric Q 值,绘成曲线图显示在同一张图片中,各组仿真实验结果如图 2b,图 2d,图 2f 所示。

同均在 $k = 1$ 处。对于 ALMTVR 算法,三组仿真数据重建图像 MSE 取得最小值的惩罚因子分别是

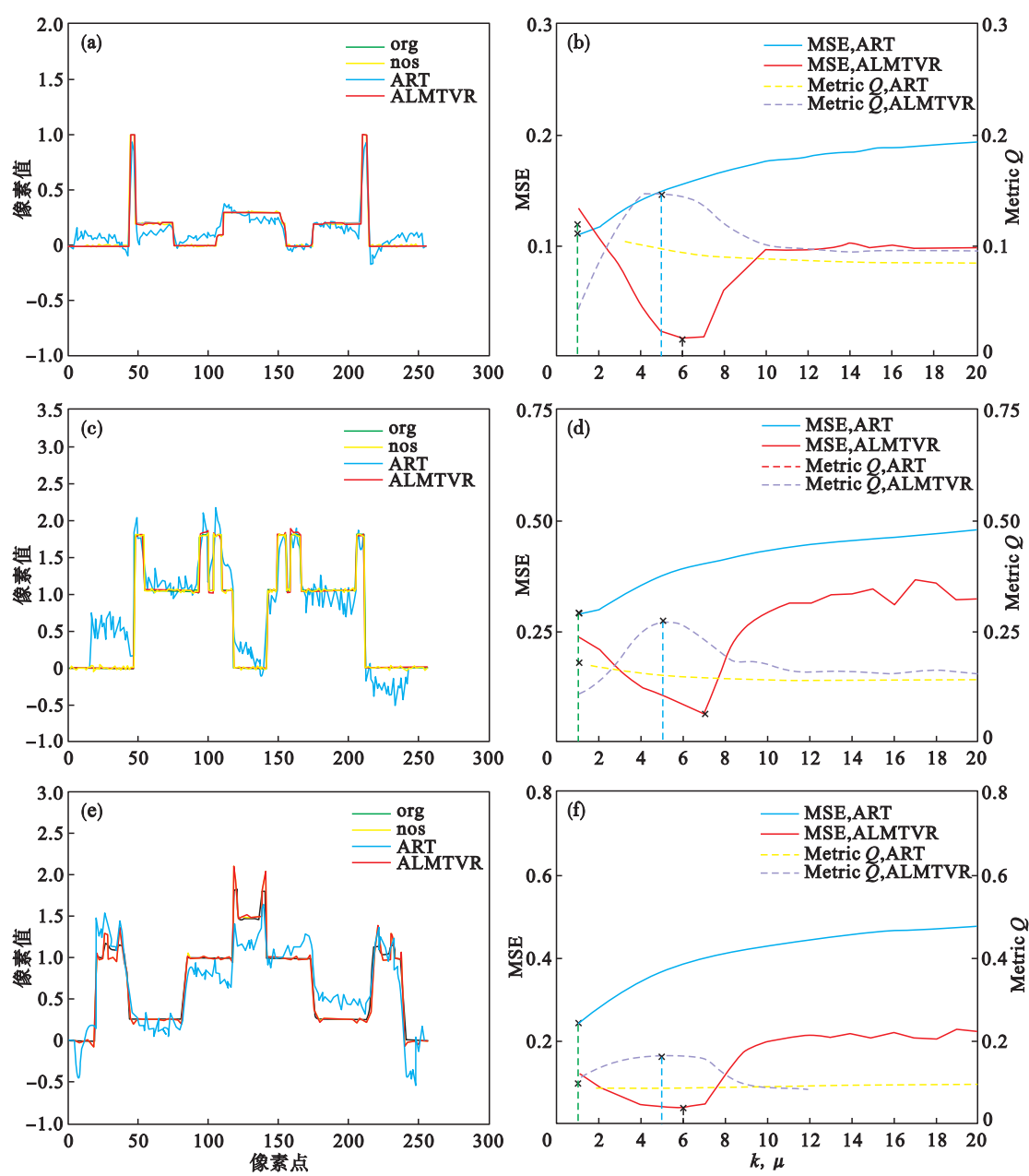


图 2 像素值曲线和 MSE、Metric Q 对比图
Fig. 2 Pixel value curves and MSE, Metric Q contrast diagram

(a)—Shepp - Logan 的像素值曲线; (b)—Shepp - Logan 的 MSE, Metric Q 对比图; (c)—FORBILD 头部像素值曲线; (d)—FORBILD 头部 MSE, Metric Q 对比图; (e)—FORBILD 胸部像素值曲线; (f)—FORBILD 胸部 MSE, Metric Q 对比图。

6,7,6, Metric Q 取得最大值时均为 5. 对于 ALMTVR 算法来说,为了进一步确认采用 Metric Q 和 MSE 进行重建参数选择的差别,分别采用 Metric Q 取得最大值时与 MSE 取得最小值时的 μ 值重建各组图像,之后计算用不同 μ 值重建出各组图像的 MSE 值,如表 1 所示. 从表 1 可以看出,对于同一组仿真数据采用两个不同参数 μ 进行重建的结果很接近. 因此,表明 Metric Q 可以用来度量 CT 重建图像的质量,并用来作为重建关键参数选取的依据.

表 1 对于同一组仿真数据 μ 取值不同时 MSE 对比

Table 1 Comparison of MSE values for the same set of simulation data with different μ

μ	仿真数据 1	仿真数据 2	仿真数据 3
5	0.022 6	0.105 2	0.039 7
6	0.014 8	—	0.036 5
7	—	0.083 5	—

2.2.2 实际数据实验结果及分析

第一组实验为核桃数据实验,用 ART 与 ALMTVR 两种算法进行重建,并不断改变 ART 算法的关键参数 k 与 ALMTVR 算法的关键参数 μ 进行多次重建,得到多个 Metric Q 值并绘制成曲线,如图 3 所示. Metric Q 值取最大时代表图像的重建质量最高,则由图 3 可得,ART 算法的最佳参数为 $k=1$,ALMTVR 算法的最佳参数为 $\mu=5$.

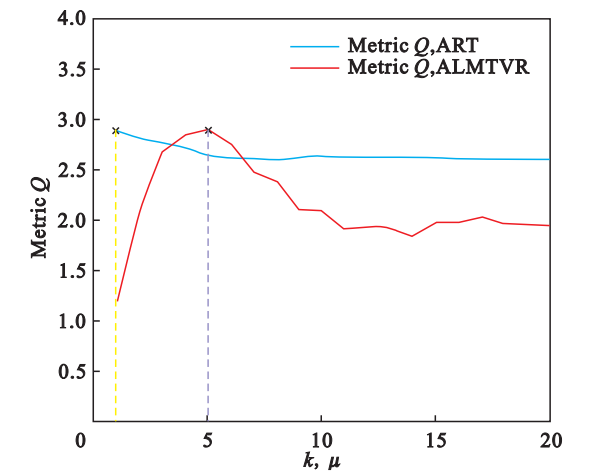


图 3 核桃数据 Metric Q 变化曲线

Fig. 3 Metric Q curves of walnut data

第二组实验为兔子标本数据实验,与第一组实验过程相似,用 ART 与 ALMTVR 两种算法进行重建,并不断改变 ART 算法的关键参数 k 与 ALMTVR 算法的关键参数 μ 进行多次重建,得到多个 Metric Q 值并绘制成曲线,如图 4 所示. 由图 4 可得,ART 算法的最佳参数为 $k=1$,ALMTVR 算法的最佳参数为 $\mu=7$.

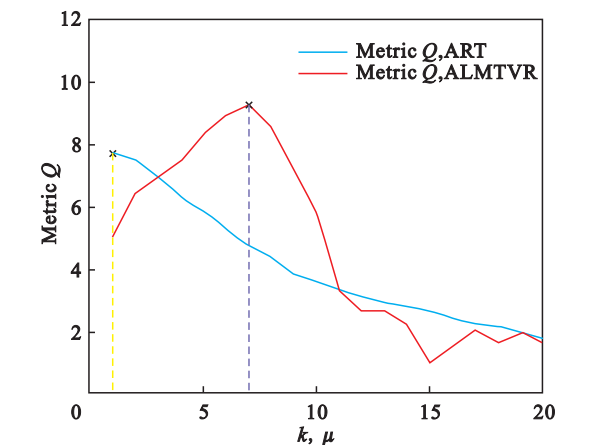


图 4 兔子标本数据 Metric Q 变化曲线

Fig. 4 Metric Q curves of rabbit data

用两种算法的最佳参数分别进行重建,得到核桃实验数据和兔子标本数据的实验结果如图 5,图 6 所示.

图 5a,图 5b 的对比度均设置在 0 到 30 之间,对比图 5a 与图 5b,可以看到 ALMTVR 算法的重建效果比起传统的 ART 算法重建质量高,图像中的噪声更少,图 5c 的像素值对比图中,ALMTVR 算法的重建图像比 ART 算法得到的重建图像的像素值更稳定.

图 6a,图 6b 的对比度均设置在 0 到 60 之间,对比图 6a 与图 6b,并观察图 6c 的像素值对比图,可以看到 ALMTVR 算法重建的图像质量要优于 ART 算法重建的图像质量.

重建时间如表 2 所示. 从表 2 可以看出,在重建相同投影数据时,ALMTVR 算法重建时间要明显少于 ART 算法.

综合分析,本文提出的 ALMTVR 算法与传统代数迭代 ART 算法重建结果相比较,可以看出,不论是在重建图像质量,还是重建耗时上,ALMTVR 算法均要优于 ART 算法.

表 2 ALMTVR 与 ART 算法的重建时间对比

Table 2 Comparison of reconstruction time for ALMTVR and ART

重建算法	仿真数据 1	仿真数据 2	仿真数据 3	核桃数据	兔子数据
ALMTVR	34	26	23	29	17
ART	60	59	53	63	30

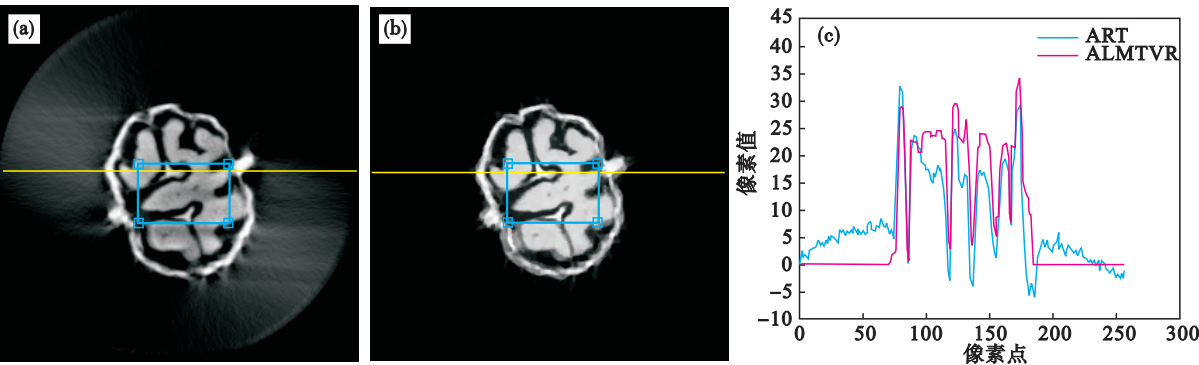


图 5 核桃数据实验结果
Fig. 5 Results of the nut data

(a)—ART 算法重建结果；(b)—ALMTVR 算法重建结果；(c)—图 5a 与图 5b 中线上像素点的像素值曲线。

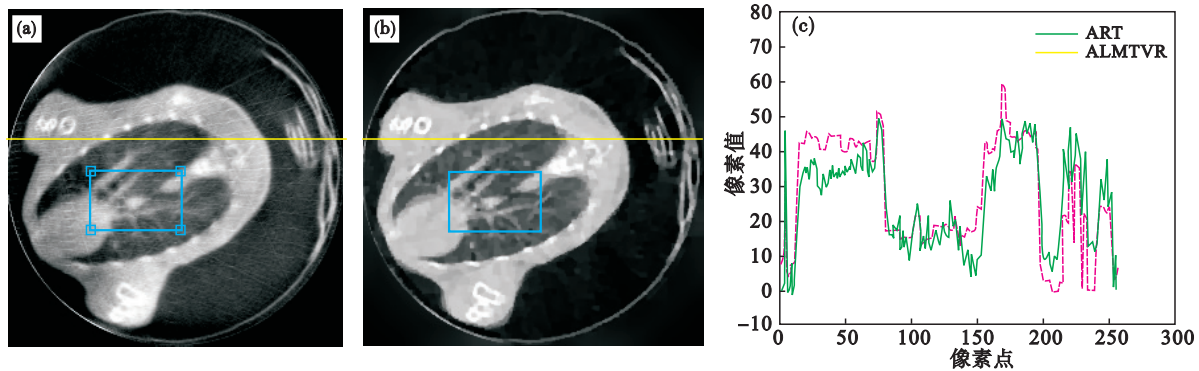


图 6 兔子数据实验结果
Fig. 6 Results of rabbit data

(a)—ART 算法重建结果；(b)—ALMTVR 算法重建结果；(c)—图 6a 与图 6b 中线上像素点的像素值曲线。

3 结 论

本文提出的 ALMTVR 算法在 CT 图像重建领域的应用效果优秀. 相对于传统的 ART 算法, ALMTVR 算法重建出的图像噪声更少, 图像细节更加清晰, 并且显著提高了图像的重建速度, 有很高的实际应用价值.

参考文献：

[1] 伍绍佳,陈皓,廖丽,等. BPF 重建算法的 CUDA 并行实现 [J]. 集成技术,2014(5) :61 – 68.
(Wu Shao-jia, Chen Hao, Liao Li, et al. CUDA parallel implementation of BPF reconstruction algorithm [J]. *Integration Technology*, 2014 (5) : 61 – 68.)

[2] 郑源彩,潘晋孝,孔慧华. 基于线性插值方法的 ART 重建算法研究[J]. 数学的实践与认识,2013,43(24) :80 – 84.
(Zheng Yuan-cai, Pan Jin-xiao, Kong Hui-hua. The ART reconstruction algorithm based on linear interpolation method research [J]. *Mathematics Practice and Understanding*, 2013, 43 (24) : 80 – 84.)

[3] Vandeghinste B, Goossens B, Holen R V, et al. Iterative CT reconstruction using shearlet-based regularization [C] // Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE).

San Diego, 2012 : 3305 – 3317.

[4] Li C. An efficient algorithm for total variation regularization with applications to the single pixel camera and compressive sensing [D]. Houston : Rice University, 2010.

[5] 常小凯. 二次半定规划的增广拉格朗日算法 [J]. 计算数学, 2014, 36 (2) : 133 – 142.
(Chang Xiao-kai. Augmented Lagrange algorithm for two semidefinite programming [J]. *Computing Mathematics*, 2014, 36 (2) : 133 – 142.)

[6] Zhu X, Milanfar P. Automatic parameter selection for denoising algorithms using a no-reference measure of image content [J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2010, 19 (12) : 3116 – 3132.

[7] Yu Z, Noo F, Dennerlein F, et al. Simulation tools for two-dimensional experiments in X-ray computed tomography using the FORBILD head phantom [J]. *Physics in Medicine & Biology*, 2012, 57 (13) : 237 – 252.

[8] Nilchian M, Vonesch C, Modregger P, et al. Fast iterative reconstruction of differential phase contrast X-ray tomograms [J]. *Optics Express*, 2013, 21 (5) : 5511 – 5528.

[9] Wiecek M, Friel J, Vogel J, et al. X-ray computed tomography using curvelet sparse regularization [J]. *Medical Physics*, 2015, 42 (4) : 1555 – 1565.

[10] Gao H, Qi X S, Gao Y, et al. Megavoltage CT imaging quality improvement on TomoTherapy via tensor framelet [J]. *Medical Physics*, 2013, 40 (8) : 08191901 – 08191910.