

# 高速列车头车外流场气动噪声的仿真与实验研究

姜世杰, 杨松, 吴丹, 闻邦椿

(东北大学 机械工程与自动化学院, 辽宁 沈阳 110819)

**摘 要:** 针对高速列车的头车进行全尺寸三维模型和流场流域的创建, 并通过  $k-\varepsilon$  湍流模型计算稳态流场; 在稳态流场的基础上, 采用宽频带噪声模型计算头车表面的气动噪声源; 利用大涡模拟 (LES) 方法计算瞬态流场, 进而获取车身外表面的脉动压力; 再基于瞬态流场, 采用 Lighthill 声类比理论研究头车远场气动噪声的计算. 最后, 比较气动噪声的仿真分析结果与实地试验结果, 验证了仿真结果的正确性.

**关 键 词:** 高速列车; 气动噪声; Lighthill 声类比理论; 仿真分析; 实地试验

**中图分类号:** U 270.16      **文献标志码:** A      **文章编号:** 1005-3026(2018)08-1137-06

## Simulating and Experimental Investigations on Aerodynamic Noise of High-Speed Train Head

JIANG Shi-jie, YANG Song, WU Dan, WEN Bang-chun

(School of Mechanical Engineering & Automation, Northeastern University, Shenyang 110819, China.  
Corresponding author: JIANG Shi-jie, E-mail: jiangsj@me.neu.edu.cn)

**Abstract:** The full-size high-speed train head and flow field around were modeled to simulate the turbulent air flow and aerodynamic noise. The external steady flow field was computed using the Realizable  $k-\varepsilon$  turbulence model. Based on the steady flow field, aerodynamic noise sources on the train head surface and the external transient flow field were calculated by broadband acoustics source model and large eddy simulation (LES), respectively. The fluctuating pressures on the train surface were obtained from the results of the transient model. Considering the transient flow field, the far-field aerodynamic noise of the train head was finally obtained based on Lighthill acoustics analogue theory. The simulated aerodynamic noise was compared with the on-line test result to validate the simulation, and they have a good agreement.

**Key words:** high-speed train; aerodynamic noise; Lighthill acoustics analogue theory; simulated analysis; on-line test

随着列车运行速度的提高,很多低速运行时被合理忽略的问题变得越来越突出,并严重制约着列车高速技术的发展.列车高速化中最严重的问题之一是噪声的影响,此噪声主要包括轮轨噪声和气动噪声<sup>[1-2]</sup>.随着轮轨噪声的有效控制及列车运行速度的不断提高,气动噪声成为高速列车噪声中越来越重要的组成部分<sup>[3-4]</sup>.研究<sup>[5]</sup>表明,当车速达到 250 km/h 时,高速列车气动噪声将超过轮轨噪声,成为最主要的噪声源.急剧增大的气动噪声不仅严重影响乘客的舒适度和铁路沿

线居民的日常生活,还可能引起周围设备和建筑物等的疲劳破坏,极大地制约着高速铁路的进一步发展.为此,研究高速列车气动噪声的仿真计算和控制方法具有十分重要的意义.

目前,在理论研究方面,Lighthill 声类比理论的应用最为广泛<sup>[6-8]</sup>,被越来越多地应用于高速列车气动噪声的理论分析.现有的实验研究普遍依赖于风洞试验,即在风洞中安置缩放的高速列车模型,研究气体流动及其与列车模型的相互作用.这是基于相似性原理来了解实际列车空气动力

力学特性的一种实验方法,具有明显的局限性,主要有边界干扰、支架干扰、低雷诺数和成本高昂等问题<sup>[9]</sup>;在数值研究方面<sup>[10]</sup>,流体力学数值模拟技术的广泛发展为研究高速列车气动噪声提供了更多的依据,但因为相关实验少,过去的研究普遍缺乏仿真结果的实验校核. 本文将理论应用于仿真计算,分别计算了稳态流场、列车表面噪声源和瞬态流场,进而获得远场气动噪声的计算结果;同时,利用自行设计搭建的实验台完成了列车远场气动噪声的实地实验研究;通过气动噪声仿真和实验结果的对比分析,验证其正确性并获取列车头车表面气动噪声的分布规律和特点. 此外,本文的研究还将为后续整车(多节车厢)气动噪声的仿真和控制提供基础和技术支持.

1 仿真计算方法

高速列车气动噪声的仿真计算主要包括:应用 Realizable  $k-\varepsilon$  湍流模型计算稳态流场;基于稳态流场的计算,采用宽频带噪声模型计算列车表面的气动噪声源;将稳态流场的结果作为初始条件,利用大涡模拟(LES)方法研究瞬态流场的计算,得出车身外表面的脉动压力;基于瞬态流场的仿真,应用 Lighthill 声类比理论完成高速列车远场气动噪声的计算.

1.1 模型准备

针对 CRH380B 型高速列车头车进行全尺寸的三维建模,模型的长、宽、高为 25 700,3 400 和 3 700 mm,为进一步提高计算效率,本文只对车窗、车门和转向架处作简化处理,如图 1 所示.

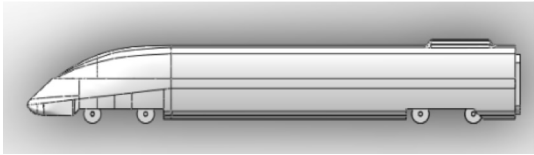


图 1 列车模型  
Fig. 1 Train head model

为保证流场边界域不对流场产生影响,车外流场模型需足够大. 本文将流场域定义为长方体,入口边界距离车头 20 m,出口边界距离车尾 90 m,侧面边界距离车身中线 20 m. 因为模型为对称体,为便于计算,取模型对称的一半作分析.

采用混合网格法对模型进行网格划分,车身表面采用三角形和四边形单元,空间流场域采用以四面体为主、六面体单元为辅的网格划分策略. 由于车身表面气体流动复杂,故列车表面生成 3

层三棱柱形边界层,第一层厚 1.25 mm,每层按照 1:1.2 的比例增加,总网格数约为 500 万个,如图 2 所示.

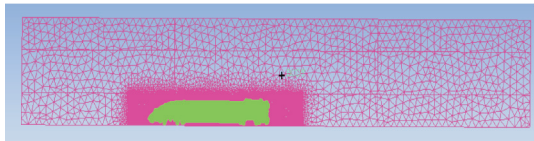


图 2 模型和流场域网格划分  
Fig. 2 Model mesh structure of train and flow field

1.2 稳态计算

目前,由于高速列车的运行速度远低于声速(340 m/s),马赫数远小于 1,因此,周围空气可当作黏性不可压缩流体计算,其基本控制方程如下:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \tag{1}$$

$$\partial u_i + u_j \frac{u_i}{x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}. \tag{2}$$

式中: $u_i$  表示速度在  $x_i$  轴方向的分量, $i=1,2,3$ , $j=1,2,3$ ,且  $j \neq i$ ;  $p$  和  $\rho$  分别表示列车周围流场的空气压力和空气密度; $\mu$  为空气动力黏度.

稳态计算是基于 Realizable  $k-\varepsilon$  两方程湍流模型进行的<sup>[11]</sup>. 选用该模型是因其适用的流动类型更为广泛(如有旋均匀剪切流、腔道流动和边界层流动等),且模拟结果相较于标准的  $k-\varepsilon$  模型更为准确. Realizable  $k-\varepsilon$  湍流模型关于  $k$  和  $\varepsilon$  的输运方程为

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho k u_i)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + G_k + G_b - \rho \varepsilon, \tag{3}$$

$$\frac{\partial(\rho \varepsilon)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \varepsilon u_i)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + \rho C_1 E \varepsilon - \rho C_2 \frac{\varepsilon^2}{k + \sqrt{\gamma \varepsilon}} + C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} C_{3\varepsilon} G_b. \tag{4}$$

式中: $x_i, x_j$  为位置坐标; $\rho$  为气体密度; $\sigma_k$  为湍动能的普朗特数, $\sigma_k=1.0$ ;  $G_k$  是由于平均速度梯度而产生的湍流动能;  $G_b$  是由浮力而产生的湍流动能;  $\sigma_\varepsilon$  为湍流动能耗散率普朗特数, $\sigma_\varepsilon=1.2$ ;  $E$  为源项;  $C_1, C_2$  和  $C_{1\varepsilon}$  为常数,  $C_1 = \max \left[ 0.43, \frac{\eta}{\eta + 5} \right]$ ;  $\eta = S \frac{k}{\varepsilon}$ ;  $S = \sqrt{2} S_{ij}$ ,  $S_{ij}$  为应力变化率,  $C_2 = 1.9, C_{1\varepsilon} = 1.44$ . 稳态流场仿真计算中的主要参数设置如表 1 所示.

1.3 噪声源计算

高速列车气动噪声没有明显的频段,属于宽频带噪声,即噪声能量在一个宽频段范围内呈连

续分布的状态. 在较低马赫数和较高雷诺数下, Proudman 等利用声类比理论, 对单位体积内各向同性湍流所辐射的声功率进行推导<sup>[12]</sup>, 其表达式为

$$P_A = \alpha \rho_0 \left( \frac{u^3}{l} \right) \frac{u^5}{c_0^5} . \tag{5}$$

式中:  $\alpha$  为模型常量;  $u$  为湍流速度;  $l$  为湍流尺度;  $c_0$  代表声速. 用  $k, \varepsilon$  的形式, 式(5)可表示成  $P_A = \alpha_\varepsilon \rho_0 \varepsilon M_t^5, M_t = \sqrt{2k}/c_0$ .

表 1 稳态设置  
Table 1 Steady state setting

项目	类别	参数设置
一般设置项	求解器类型	压力修正
	时长	稳态
模型	Realizable $k - \varepsilon$ 模型	
材料	空气	
边界条件	$\nu = 83.3 \text{ m/s}$	
	进口	$k = 0.2604 \text{ m}^2/\text{s}^2$
		$\varepsilon = 0.0273 \text{ m}^2/\text{s}^3$
	出口	压力出口
	地面类型	壁面
	流体域表面	对称
运行计算	流体域	内部
	迭代次数	2 000

Sarkar 等<sup>[13]</sup>针对各向同性湍流进行了直接数值模拟分析, 获得  $\alpha_\varepsilon$  值为 0.1. 基于湍流模型的稳态计算, 提取流场中各节点的湍流动能和湍流耗散率, 计算出各个节点处的声功率, 从而获得整车表面的声功率级分布云图.

1.4 瞬态计算

基于 N-S 方程在物理空间的滤波分析推导得出的大涡模拟 (LES) 模型的控制方程, 开展了瞬态仿真分析<sup>[2]</sup>. 该过程将小于设定过滤宽度的涡旋去掉, 而只保留大的涡旋, 从而得到其控制方程为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \bar{\rho u_i}}{\partial x_i} = 0 , \tag{6}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \bar{u_i}) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho \overline{u_i u_j}) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( u \frac{\partial \bar{u_i}}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} . \tag{7}$$

式中:  $\tau_{ij}$  为亚网格应力, 代表小尺度涡对运动方程的影响,  $\tau_{ij} = \rho \overline{u_i u_j} - \rho \bar{u_i} \bar{u_j}$ . 式中其他符号的含义详见文献[2]. 瞬态流场仿真计算中的参数设置如表 2 所示.

表 2 瞬态设置  
Table 2 Transient state setting

项目	类别	参数设置
一般设置项	求解器类型	压力修正
	时长	瞬态
模型	LES(大涡模拟)	
材料	空气	
边界条件	$\nu = 83.3 \text{ m/s}$	
	进口	$k = 0.2604 \text{ m}^2/\text{s}^2$
		$\varepsilon = 0.0273 \text{ m}^2/\text{s}^3$
	出口	压力出口
	地面类型	壁面
	流体域表面	对称
运行计算	流体域	内部
	迭代次数	4 000

1.5 远场气动噪声计算

高速列车远场气动噪声计算采用 Lighthill<sup>[7-8]</sup>推导的声类比理论方法进行研究. 根据连续性方程和 N-S 方程, 声传播方程为

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - \nabla^2 p' = \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} . \tag{8}$$

式中:  $T_{ij}$  是 Lighthill 湍流应力张量,  $T_{ij} = \rho v_i v_j + \delta_{ij} [(p - p_0) - c_0^2 (\rho - \rho_0)] - e_{ij}$ ;  $v_i, v_j$  为速度分量;  $\delta_{ij}$  为单位张量;  $e_{ij}$  为流体的黏性应力张量.  $\rho' = \rho - \rho_0, p' = p - p_0, \rho_0$  和  $p_0$  分别为未受扰动时的流体密度和流场压力的均值,  $\rho'$  和  $p'$  分别为流体密度和流场压力的波动值.

当非定常流动区域存在固壁边界时, Curle<sup>[14]</sup>导出 Lighthill 方程的解为

$$\rho'(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi c_0^2} \left[ \frac{\partial^2}{\partial x'_i \partial x'_j} \int_V \frac{T_{ij}(\mathbf{y}, t - R/c_0)}{R} d\mathbf{y} - \frac{\partial}{\partial x'_i} \int_S \frac{n_j P_{ij}(\mathbf{y}, t - R/c_0)}{R} d\mathbf{y} \right] . \tag{9}$$

式中:  $\mathbf{x}$  是测声点矢量;  $t$  为时间;  $\mathbf{y}$  是声源点矢量;  $n_j$  是垂直列车外壁向外 (指向外流场) 的方向余弦;  $\mathbf{R} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$ ;  $P_{ij}$  是空气对车身外表面的脉动压力;  $V$  是固壁边界围成的体积.

式(9)中包含了两类噪声源<sup>[11]</sup>: 等号右边第一项代表体积四极子声源 (源于列车周围流场内部的 Lighthill 应力); 第二项为表面偶极子声源 (源于物体的表面压力与黏性剪切应力). 由于列车的偶极子声源和四极子声源所产生的气动噪声分别与马赫数的三次方和五次方成正比, 因此, 四极子声源与偶极子声源所产生的噪声之比与马赫数的平方成正比. 本文中所述的高速列车的运行速度约 300 km/h, 远低于声速, 其马赫数仅为



0.245,因此高速列车的四极子声源所产生的气动噪声相对较低,可忽略不计<sup>[11]</sup>.由此,高速列车外流场气动噪声的计算公式(9)可以表达如下:

$$\rho'(x,t) = -\frac{1}{4\pi c_0^2} \frac{\partial}{\partial x'_i} \int \frac{n_j P_{ij}(y,t-R/c_0)}{R} dy,$$

(10)

$$P(x,t) - P_0 = c_0^2 \rho'(x,t).$$

(11)

式中: $P$ 为声压; $P_0$ 为参考声压, $P_0 = 2 \times 10^{-5}$  Pa.

由此可知,高速列车远场气动噪声的声压可由车身表面脉动压力求得.根据瞬态计算结果,提取车身表面各个节点的脉动压力数值,再根据式(11)便可获得高速列车远场气动噪声的声压预测值.

为了比较分析仿真结果与实验结果,在流场域选择两个监测点,记录声压级等信息.监测点位置与后文的实验位置保持一致,其中监测点1的位置距列车轴中心线、车底及车头鼻尖分别为7.5,3.5和4 m;监测点2为7.5,1.5和4 m.

## 2 实验研究

目前,高速铁路普遍建在高架桥上(最高可达11 m),以应对地基沉降等问题,且远离城区,地形复杂,致使列车气动噪声的测试变得十分困难.本文利用自行设计搭建的噪声采集平台,包括传声器(BSWA-MP201)、BNC线缆、NI USB-4431采集卡以及计算机等主要设备,在高速铁路沿线测试并记录了CRH380B型列车通过时的噪声、速度等实时信号.其中,传声器安放位置与仿真中监测点保持一致,高速摄像机、测距仪及测速仪通过无限蓝牙装置与计算机相连,实现远程操控.相较于风洞试验,本实验是在线实地试验,结果真实、准确.

## 3 结果分析

气流沿车身表面流动,大致被车头分成三部分:其一流向车顶,其二流向车体侧壁,最后一部分流向车头车底的位置.在车头底部的转向架处形成涡流,如图3所示;在车身尾部,由于空气的黏性作用,以及列车表面附着层和地面效应的相互影响,使得列车后部形成涡旋流场,如图4所示.列车的尾流结构反映了列车各部分的分离状态和相互作用的综合效果.

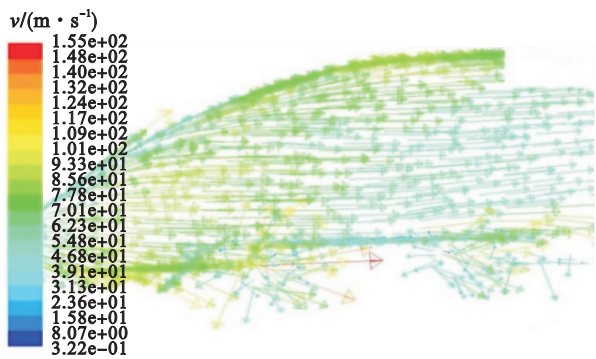


图3 车头表面流体速度矢量图  
Fig. 3 Velocity vectors around train head

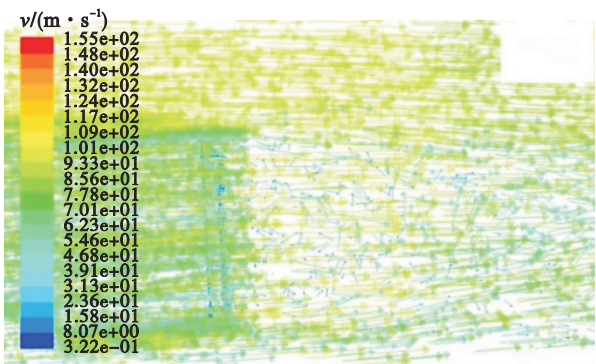


图4 车尾部流体速度矢量图  
Fig. 4 Velocity vectors around train trail

如图5所示,列车头部对气流产生压缩作用,使车头附近形成正压区,出现较大的梯度,致使车头鼻锥处的正压力较大,达到4 220 Pa;前窗玻璃和车体的连接处为非流线型过渡区域,因而正压力也较大;由于列车头部向车身过渡的曲率变化明显,使得流体绕流速度加快,流体流向列车斜上方,车身附近出现真空,正压逐渐减小变为负压,在车头向车身过渡处的顶部与侧面弧面处,负压达到最大值(-1 710 Pa);而在车头底部转向架处,由于形状极不规则,流体流动剧烈而复杂,正压力最大,达到5 210 Pa.

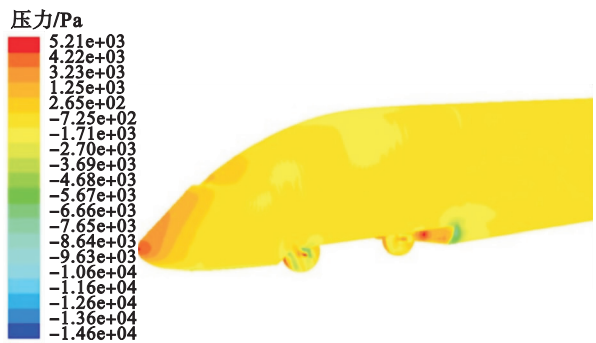


图5 列车头车表面脉动压力云图  
Fig. 5 Pulsating pressure chart of train head

从图 6 可以看出,表面噪声源云图与脉动压力云图相对应,由于列车鼻锥处以及前窗玻璃和车体连接处的正压力均较大,所产生的气动噪声也较大;在车头向车身过渡处的顶部与侧面弧面处,车身表面附着层与外部流场相互作用,负压为最大,噪声水平相对较高;车身处表面平滑曲率变化小,气流流动平稳,噪声水平低;而在车头和车轮转向架处,表面声功率级最大,这是因为车头将气流分离,转向架表面形状极不规则,在这些部位的湍流流动最为复杂剧烈。

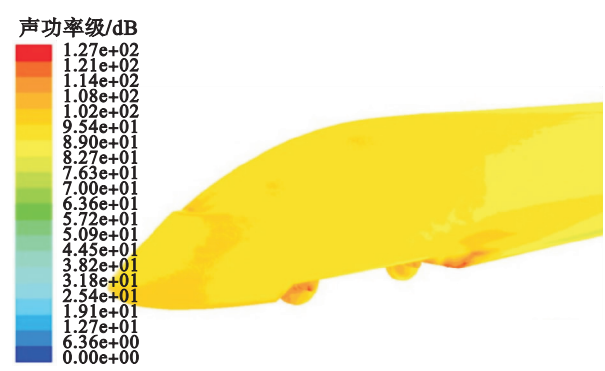


图 6 列车头车表面声功率级云图  
Fig. 6 Noise source power level chart of train head

在进行实车气动噪声分析时,要考虑环境背景噪声的影响,因此在无列车经过时,记录了多组环境噪声信号.为了保证结果的可靠性,本实验共采集 5 组背景噪声和 20 组高速列车外流场气动噪声实时数据.图 7 所示为一组气动噪声与两组背景噪声时域数据的对比.

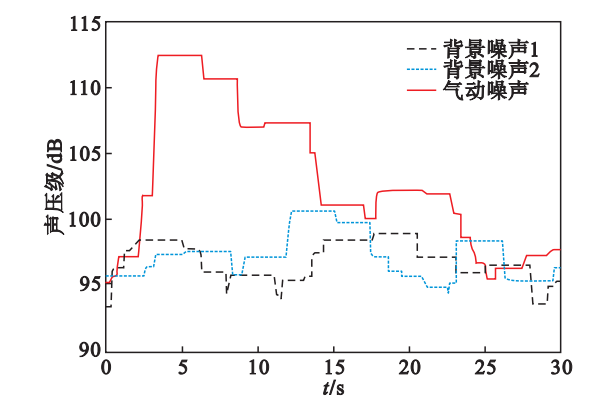


图 7 气动噪声和背景噪声对比图  
Fig. 7 Comparison of aerodynamic noise and background noise

由图 7 可知,气动噪声明显高于背景噪声,根据噪声叠加原理, $L = 10 \lg (10^{L_1/10} + 10^{L_2/10} + \dots + 10^{L_N/10})$ ,若两个噪声源的声压级相差 10 dB 以上,可只以其中较大声压级的声源作为叠加后的结果(误差  $< 0.4$  dB).另外,列车速度达到 300 km/h

时,气动噪声超过轮轨噪声成为最主要的噪声源<sup>[4]</sup>.因此,轮轨噪声和背景噪声对气动噪声的影响可忽略不计.此外,气动噪声的峰值集中在车头车头部位,而车身表面平滑,曲率变化小,对整体噪声影响小.因此,车身长度的降低不会对车身表面声功率级的分布状况产生影响。

对铁路噪声进行测量和评价时,通常采用 A 声级,因此对仿真计算和实验测量的噪声信号的 1/3 倍频程 A 计权声压级结果进行了对比分析,如图 8 所示。

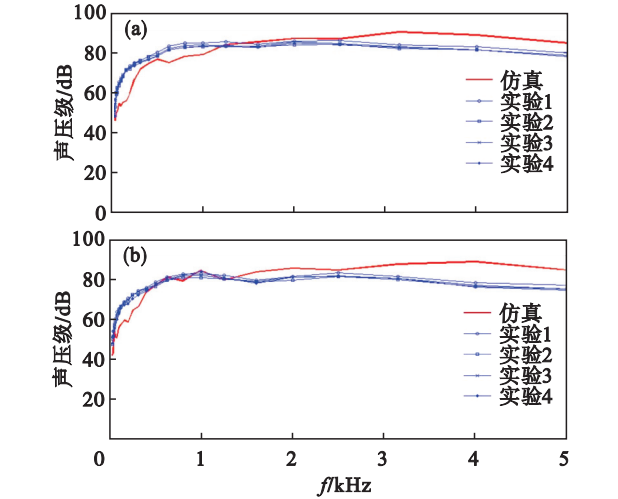


图 8 监测点处的 1/3 倍频程 A 计权声压级  
Fig. 8 A-weighted sound pressure level of 1/3 octave band at monitors  
(a)—监测点 1; (b)—监测点 2.

由图 8 可以看出,气动噪声没有明显的频率段,而是在较宽的频率范围内分布,属于宽频带噪声.在频率为 1 ~ 3 kHz 范围内,仿真结果和实验结果吻合较好;在频率低于 1 kHz 时,仿真结果略低于实验结果(误差小于 10%),这是由于仿真模型在车门、车窗及转向架处作了简化处理,而这些地方会导致剧烈的湍流流动,增大气动噪声,因此仿真结果低于实验结果;在频率为 3 ~ 5 kHz 的范围内,仿真结果高于实验结果(误差小于 10%),这是因为在仿真条件下地面为固壁,能将所接收的噪声完全反射出去,不造成衰减;而在实验条件下,地面会吸收大量噪声,使得远场气动噪声在高频段处小于理想状态下的噪声.综上可知,模拟计算结果与实地实验结果吻合度较好,仿真模型可靠。

## 4 结 论

1) Realizable  $k - \varepsilon$  湍流模型可用于高速列

车外流场气动噪声研究,且具有较高的精度.

2) 高速列车正压区主要分布在车头和转向架等形状变化较大的部位,负压区主要分布在车头以后车身表面,转向架和列车尾部有涡流形成.

3) 高速列车头车表面转向架处气动噪声最大,其次为车鼻锥处,车身产生的噪声较小且无明显变化.

4) 在频率为 1 ~ 3 kHz 范围内,实验结果和仿真结果吻合较好;在频率低于 1 kHz 范围内,仿真结果略低于实验结果(误差小于 10%),在频率为 3 ~ 5 kHz 范围内,仿真结果略大于实验结果(误差小于 10%). 模拟计算结果与实地实验结果吻合度较好,仿真模型可靠.

## 参考文献:

- [ 1 ] Sassa T, Sato T, Yatsui S. Numerical analysis of aerodynamic noise radiation from a high-speed train surface[ J ]. *Journal of Sound and Vibration*, 2001, 247( 3 ): 407 – 416.
- [ 2 ] 刘加利. 高速列车气动噪声的理论研究与数值模拟[ D ]. 成都: 西南交通大学, 2009.  
( Liu Jia-li. The theoretical research and numerical simulation of aerodynamic noise of high-speed train [ D ]. Chengdu: Southwest Jiaotong University, 2009. )
- [ 3 ] Zhu J, Hu Z, Thompson D J. Analysis of aerodynamic and aeroacoustic behaviour of a simplified high-speed train bogie [ C ] // The 11th International Workshop on Railway Noise. Berlin: Springer Heidelberg, 2013: 489 – 496.
- [ 4 ] Yang W, Kim D, Park J, et al. Analysis on the aeroacoustic sound radiation from high-speed train using a simplified numerical model[ C ] // The 20th International Congress on Sound and Vibration. Bangkok, 2013: 397 – 399.

- [ 5 ] Raghunathan R S, Kim H D, Setoguchi T. Aerodynamics of high-speed railway train[ J ]. *Progress in Aerospace Sciences*, 2002, 38( 6/7 ): 469 – 514.
- [ 6 ] Williams J E F, Hawkings D L. Sound generation by turbulence and surfaces in arbitrary motion[ J ]. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, 1969, 264( 1151 ): 321 – 342.
- [ 7 ] Lighthill M J. On sound generated aerodynamically. part II: turbulence as a source of sound[ J ]. *Proceedings of the Royal Society A*, 1954, 222( 1148 ): 1 – 32.
- [ 8 ] Lighthill M J. On sound generated aerodynamically. part I: general theory[ J ]. *Proceedings of the Royal Society A*, 1952, 211( 1107 ): 564 – 587.
- [ 9 ] Ricco P, Baronb A, Molteni P. Nature of pressure waves induced by a high-speed train travelling through a tunnel[ J ]. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 2007, 95( 8 ): 781 – 808.
- [ 10 ] Lyu B, Dowling A P, Naqavi I. Prediction of installed jet noise[ J ]. *Journal of Fluid Mechanics*, 2017, 811: 234 – 268.
- [ 11 ] 郑拯宇. 高速车辆外部气动噪声场数值模拟研究[ D ]. 成都: 西南交通大学, 2012.  
( Zheng Zheng-yu. A study on the numerical simulation of high-speed vehicle ' s external aerodynamic acoustics field [ D ]. Chengdu: Southwest Jiaotong University, 2012. )
- [ 12 ] Proudman I, Pearson J R A. Expansions at small Reynolds numbers for the flow past a sphere and a circular cylinder [ J ]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1957, 2( 3 ): 230 – 237.
- [ 13 ] Sarkar S, Erlebacher G, Hussaini M Y, et al. The analysis and modelling of dilatational terms in compressible turbulence [ J ]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1991, 227: 465 – 473.
- [ 14 ] Curle N. The influence of solid boundaries upon aerodynamic sound[ J ]. *Proceedings of the Royal Society of London, Series A: Mathematical and Physical Sciences*, 1995, 231( 1187 ): 506 – 514.