

doi: 10.12068/j.issn.1005-3026.2018.08.016

考虑机匣柔性的新型旋转叶片-机匣碰摩模型

李炳强¹, 马辉¹, 郝玉明², 谢方涛¹

(1. 东北大学 机械工程与自动化学院, 辽宁 沈阳 110819; 2. 沈阳鼓风机集团股份有限公司, 辽宁 沈阳 110869)

摘要: 针对旋转叶片与机匣的碰摩故障,以弹性叶片和柔性机匣作为研究对象,基于弹性协调相容条件推导新的旋转叶片与柔性机匣碰摩力模型. 基于材料力学理论,考虑叶片旋转效应,如离心刚化和旋转软化,以及碰摩软化的影响,计算了叶片的准静态弯曲变形. 采用带有弹簧支承的柔性环来模拟机匣,其位移由整体位移和局部柔性位移组成. 根据能量守恒原理,建立柔性环的位移方程,并对其进行离散处理,得到机匣的结构刚度,进而求得机匣局部柔性位移. 与文献和实验结果的对比验证了本文碰摩模型的准确性.

关键词: 旋转叶片; 柔性机匣; 等效刚度; 碰摩; 碰摩力模型

中图分类号: TH 113 **文献标志码:** A **文章编号:** 1005-3026(2018)08-1143-06

A New Rotating Blade-Casing Rubbing Model Considering Flexibility of Casing

LI Bing-qiang¹, MA Hui¹, HAO Yu-ming², XIE Fang-tao¹

(1. School of Mechanical Engineering & Automation, Northeastern University, Shenyang 110819, China; 2. Shenyang Blower Works Group Corporation, Shenyang 110869, China. Corresponding author: MA Hui, E-mail: mahui_2007@163.com)

Abstract: Aiming at rubbing fault between rotating blade and casing, and taking elastic blade and flexible casing as studying objects, a new rotating blade-casing rub impact model was deduced based on elastic compatibility condition. Then considering centrifugal stiffening, rotating softening and rubbing softening, the quasi-static bending displacement of blade was calculated based on relevant theory of material mechanics. The casing was simulated as an elastic ring with spring support, and the displacement was composed of rigid-body and local-flexible displacements. The displacement equation of the flexible ring was established according to the principle of energy conservation, and the structural stiffness followed by local flexible displacement of the casing was obtained by discrete processing. Because of more parameters considered, the model has a good generality. Compared with the experimental data and the literature, the model can meet the requirements of calculation with a higher accuracy.

Key words: rotating blade; flexible casing; equivalent stiffness; rub-impact; rubbing model

研究叶片与柔性机匣的碰摩特性,合适的碰摩模型是非常重要的,很多学者对此进行了深入研究. 最简单的为线性弹簧模型,Padova 和 Choy 等^[1-2]推导出叶片沿径向的变形和碰摩力之间关系的碰摩模型. 考虑到叶片旋转产生的离心刚化影响, Jiang 等^[3]对 Padova 模型进行了修正. 刘昕等^[4]采用 Hertz 弹性接触模型研究碰摩力与侵入深度的关系. Chen^[5]考虑叶片数和转静间隙变化

对碰摩力的影响,以弹性碰摩模型为基础,模拟单点、多点、局部,以及全周等多种碰摩形式. Ma 等^[6]研究了叶片形状和弹性机匣整体变形对碰摩力的影响,提出了新的叶片机匣碰摩力模型.

以上所有碰摩模型中,对机匣的考虑过于简单,文献[1-3]完全没有考虑机匣变形对碰摩力的影响,文献[4]直接引用 Hertz 接触模型计算法向接触力,对于机匣这种薄壁结构,无法反映出其

收稿日期: 2017-04-05

基金项目: 国家自然科学基金委员会与中国民用航空局联合资助项目(U1433109); 中央高校基本科研业务费专项资金资助项目(N150305001, N160313004).

作者简介: 李炳强(1986-),男,辽宁沈阳人,东北大学博士研究生; 马辉(1978-),男,河北安平人,东北大学教授.

厚度的影响. 文献[5-6]将机匣假设为线弹性支承结构, 文献[7-8]研究了机匣的柔性响应, 但没有将其参数纳入碰摩擦力的计算中, 依旧采用线性碰摩擦刚度的算法.

本文将机匣看作薄壁圆环结构^[7-9], 其半径、厚度、碰摩宽度、支承刚度都是影响碰摩擦力大小的重要参数. 叶片简化为 Timoshenko 梁模型^[10], 并考虑离心刚化、旋转软化和碰摩软化效应, 研究其在碰摩过程中的弹性变形.

1 旋转叶片 - 柔性机匣碰摩擦力模型

叶片和柔性机匣的碰摩擦力取决于两者共同的变形: 叶片考虑弯曲变形, 机匣考虑柔性变形及与支承刚度相关的整体位移. 在推导法向碰摩擦力的过程中, 叶片 - 机匣碰摩看作为准静态接触过程, 假定轮盘为刚性, 不考虑碰摩过程中摩擦热效应.

1.1 旋转叶片柔性变形

将叶片简化为 Timoshenko 梁模型, 如图 1 所示. 图中给出了叶片受力情况, 包括离心力、气动力、法向接触力, 以及摩擦力. 离心力会使叶片产生离心刚化和旋转软化效应, 而法向接触力会使叶片产生软化现象. 微元体离心力计算公式为

$$df(x) = \rho A \omega^2 (R_d + x) dx \quad (1)$$

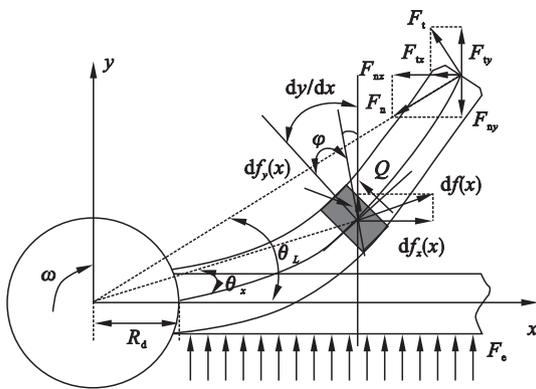


图 1 叶片受力示意图

Fig. 1 Schematic of forces on blade

Timoshenko 梁存在剪切变形, 如果剪切变形为 0, 则中心线的切线将与截面的法线重合, y 为中心线的挠度, φ 为弯曲引起的斜率, $dy/dx - \varphi$ 为斜率损失, 等于剪切角, Q 为截面的剪力, 梁的弹性方程为

$$\frac{dy}{dx} - \varphi = \frac{Q}{\kappa AG} \quad (2)$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{M}{EI} \quad (3)$$

法向接触力沿着半径指向圆心, 摩擦力与其

垂直并与相对运动方向相反, 离心载荷沿着半径方向背离圆心, 将这三个力沿水平和竖直方向分解, 由图中关系, 可得

$$\left. \begin{aligned} F_{nx} &= F_n \cos \theta_L \approx F_n, \\ F_{ny} &= F_n \sin \theta_L \approx F_n \frac{y(L)}{R_d + L}, \\ F_{tx} &= F_t \sin \theta_L \approx F_t \frac{y(L)}{R_d + L}, \\ F_{ty} &= F_t \cos \theta_L \approx F_t; \\ df_x(x) &= df(x) \cos \theta_x \approx df(x), \\ df_y(x) &= df(x) \sin \theta_x \approx df(x) \frac{y(x)}{R_d + x} = \rho A \omega^2 y(x) dx. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

式中: L 为叶片长度, $y(L)$ 为叶尖的弯曲位移.

离心力水平方向分量的力矩与叶片运动方向相反, 产生离心刚化效应. 而竖直方向的分量与叶片运动方向相同, 产生软化效应. 文献[11]在微元体受力分析中描述了旋转软化力, 与式(4)表达式完全一致.

在梁的任意截面 x_0 处, 分析其力矩平衡关系, 各分力及其力臂如图 2 所示, 可得叶片弯曲位移方程:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{F_c}{\kappa AG} = \frac{1}{EI} \times \left[\begin{aligned} &\left(F_t - F_n \frac{y(L)}{R_d + L} \right) (L - x_0) + \\ &\left(F_n + F_t \frac{y(L)}{R_d + L} \right) (y(L) - y(x_0)) + \\ &\frac{1}{2} F_c (L - x_0)^2 + \int_{x_0}^L (x - x_0) df_y(x) - \\ &\int_{x_0}^L (y(x) - y(x_0)) df_x(x) \end{aligned} \right] \quad (5)$$

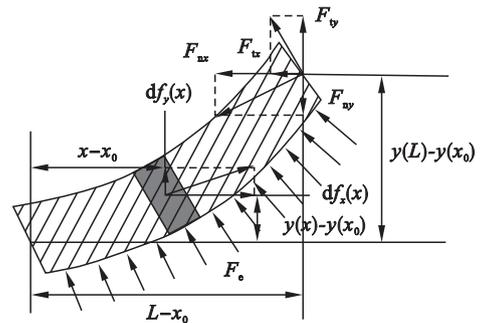


图 2 叶片力矩分解图

Fig. 2 Decomposition diagram of moments on blade

式(5)是二阶非齐次微分方程, 直接求解比较困难, 采用幂级数方法展开求解, 并略去高阶小量, 设定叶片机匣摩擦系数为 μ , 叶片安装角为 β , 则有 $F_t = \mu F_n$, 可得

$$y(x) = \frac{1}{2} \left[\frac{F_n \mu \cos \beta + \frac{1}{2} F_c L}{L^2 (\Gamma - F_n / 3L)} \right] x^2 - \frac{F_n \mu \cos \beta + F_c L}{6EI} x^3 \times \frac{\left(\frac{1}{2} \rho A \omega^2 L^2 + \rho A \omega^2 R_d L - F_n \right) \left[\frac{F_n \mu \cos \beta + 1/2 F_c L}{L^2 (\Gamma - F_n / 2L)} \right] + F_c}{24EI} x^4. \quad (6)$$

式中 $\Gamma = \frac{EI}{L^3} + \frac{1}{8} \rho A \omega^2 R_d$, E 和 I 分别为叶片的弹性模量和截面惯性矩.

如果忽略离心刚化、旋转软化和碰摩软化效应, 直接引用材料力学公式, 可得叶片弯曲位移为

$$y(x) = \frac{F_c x^2}{24EI} (x^2 - 4Lx + 6L^2) + \frac{F_t x^2}{6EI} (3L - x). \quad (7)$$

文献[6]在推导叶片 - 机匣碰摩力模型中考虑了叶片的离心势能, 基于功能互等定理推导出

叶片的弯曲位移. 为了验证本文叶片挠度计算式(6)的准确性, 将文献[6]的计算模型和式(7)的计算结果与有限元结果进行对比, 有限元仿真在 ANSYS 中进行, 采用 Beam188 单元, 叶盘系统参数见文献[6].

综合考虑离心刚化、旋转软化和碰摩软化影响, 将转速设定为 5 000 r/min, 图 3a 中碰摩力为 2 kN, 此时软化效应大于离心刚化效应, 实际弯曲位移大于 3 个影响因素都不考虑的结果. 图 3b 碰摩力设定为 200 N, 此时软化效应小于离心刚化效应, 实际弯曲位移也小于材料力学模型计算结果. 图 3a 中文献[6]结果与本文相差较大, 而图 3b 中则极为接近. 通过对比可以看出, 文献[6]充分考虑了离心刚化效应, 而未过多考虑碰摩软化效应.

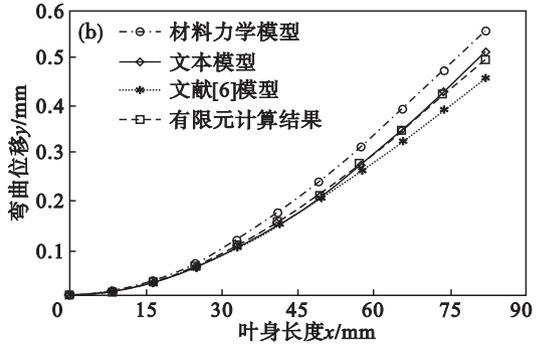
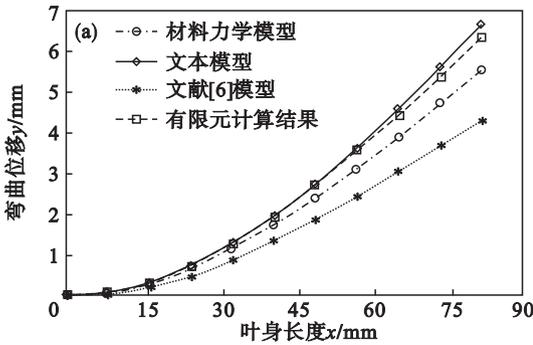


图 3 叶片的弯曲位移
Fig. 3 Bending deflection of blade

(a) — $\Omega = 5\,000\text{ r/min}$, $F_n = 2\,000\text{ N}$, $F_t = 600\text{ N}$; (b) — $\Omega = 5\,000\text{ r/min}$, $F_n = 200\text{ N}$, $F_t = 60\text{ N}$.

1.2 机匣变形

航空发动机机匣的简化模型如图 4 所示, 叶片的宽度为 b , 安装角为 β , 则机匣沿轴向与叶片的碰摩宽度为 $L_c = b \cos \beta$. 取位于碰摩宽度内的这段机匣作为研究对象, 其等效支承刚度可以通过梁函数法^[5]计算或实验测得, 柔性变形则采用圆环来模拟, 其任意点的最终位移为机匣总体位移和柔性位移的向量和, 共包括水平位移 u_c , 垂直位移 v_c , 径向柔性位移 u_s (向心为正), 切向柔性位移 w_s (沿角度增大方向为正).

圆环的弹性势能为

$$V = \frac{E_c I_c}{2R_c^4} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial^2 u_s(\varphi, t)}{\partial \varphi^2} + u_s(\varphi, t) \right)^2 R_c d\varphi. \quad (8)$$

式中: E_c 为弹性模量; R_c 为机匣半径; I_c 为圆环截面惯性矩, 与圆环厚度和碰摩宽度有关. 依据功能互等定理, 当径向碰摩力为 F_n 、作用角度为 φ 时,

F_n 所做的功为

$$W = -\frac{1}{2} F_n u_s(\varphi, t) = \Delta V. \quad (9)$$

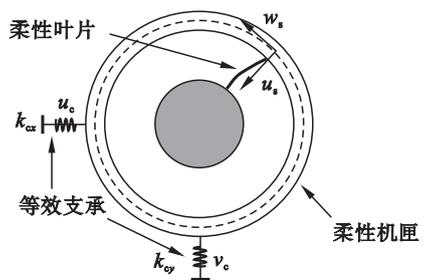


图 4 柔性机匣模型示意图
Fig. 4 Model schematic of flexible casing

圆环的柔性变形通常采用节径振动形式来表达, 以 $n \geq 2$ 的所有节径振动作为模态振型, 其切向位移和径向位移可以展开为

$$\left. \begin{aligned} w_s(\varphi, t) &= \sum_{n=2}^{\infty} A_n(t) \cos(n\varphi) + B_n(t) \sin(n\varphi), \\ u_s(\varphi, t) &= \sum_{n=2}^{\infty} -nA_n(t) \sin(n\varphi) + nB_n(t) \cos(n\varphi). \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

式中 n 代表节径数, 也称为周向波数. 将式(9)按照节径位移展开, 可得

$$-\frac{1}{2}F_n \left(\sum_{n=2}^{\infty} -nA_n(t) \sin(n\varphi) + nB_n(t) \cos(n\varphi) \right) = \frac{E_c I_c}{2R_c^3} \pi \sum_{n=2}^{\infty} n^2 (n^2 - 1)^2 (A_n^2(t) + B_n^2(t)), \quad (11)$$

并得机匣结构刚度为

$$K_s = \frac{F_n}{|u_s(\varphi, t)|} = \frac{F_n}{\sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{n^2 F_n \sin^2(n\varphi)}{n^2 (n^2 - 1)^2 \frac{E_c I_c \pi}{R_c^3}} + \frac{n^2 F_n \cos^2(n\varphi)}{n^2 (n^2 - 1)^2 \frac{E_c I_c \pi}{R_c^3}} \right]} = \frac{E_c I_c \pi}{R_c^3} \left/ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n^2 - 1)^2} \right. \quad (12)$$

为了验证任意点的总体位移为平动位移和柔性位移的向量和, 本文将机匣展开至 4 阶. 某机匣半径为 224 mm, 厚度为 3 mm, 碰摩长度 50 mm, 施加恒定径向激励 $F = 1$ N, 与水平方向夹角为 60° , 在 $k_{cx} = k_{cy} = \infty$ 和 $k_{cx} = k_{cy} = 20$ kN/m 时求取最大位移, 并与有限元仿真进行对比, 如表 1 所示. 两种工况下绘制机匣形状, 所有位移均放大 1 000 倍.

1.3 准静态碰摩力模型

叶片挠度 $y(x)$ 是碰摩力的函数, 由参考文献 [6], 叶片径向位移可表达为

$$u_L(F_n) = \frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial y(x)}{\partial x} \right)^2 dx. \quad (13)$$

$$F_n = \frac{F_c L^3 \mu \cos \beta + \Gamma L \left(\frac{9\Gamma}{K} + 6 \frac{\delta}{L} \right) - \sqrt{F_c^2 L^6 \mu^2 \cos^2 \beta + \frac{9\Gamma^2 L}{K} \left(\frac{9\Gamma^2 L}{K} + 12\Gamma\delta + 4L^2 \cos^2 \beta \mu^2 K\delta \right)}}{2 \left(\frac{\delta}{L} - L^2 \cos^2 \beta \mu^2 \right)}. \quad (15)$$

其中 $\Gamma = \frac{EI}{L^3} + \frac{1}{8} \rho A \omega^2 R_d$,

$$K = \frac{14\,400 K_c E_c I_c \pi}{1\,889 R_c^3 K_c + 14\,400 E_c I_c \pi}.$$

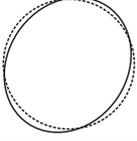
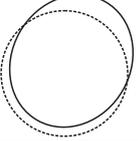
2 模型验证

为了验证上述模型的准确性, 搭建了叶片转子碰摩实验台. 实验台由动力系统、转子系统、进

根据弹性协调相容条件, 叶片-机匣在碰摩过程中侵入深度 δ 可以分解为 3 部分: 叶片径向位移 u_L 、沿碰摩法向机匣的平动位移 u_{cn} 和弹性位移 u_{sn} , 如图 5 所示. 可得

$$\delta(F_n) = u_{cn} + u_{sn} + u_L(F_n) = \frac{F_n}{K_c} + \frac{F_n}{K_s} + u_L(F_n). \quad (14)$$

表 1 机匣位移对比结果
Table 1 Comparison of displacement of casing

位移与变形	$k_{cx} = k_{cy} = \infty$	$k_{cx} = k_{cy} = 20$ kN/m
数值最大位移 $\times 10^5 / \mu\text{m}$	20.86	55.0
有限元最大位移 $\times 10^5 / \mu\text{m}$	20.91	55.8
误差/%	0.24	1.45
变形图		

注: ... 变形前, — 变形后.

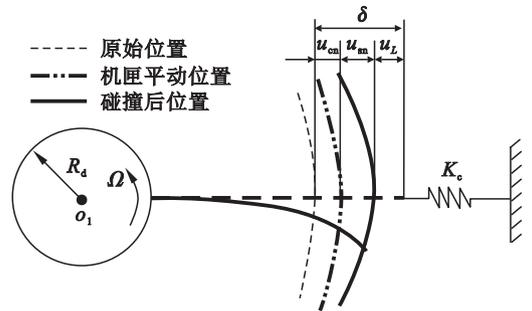


图 5 叶片-弹性机匣碰摩示意图

Fig. 5 Schematic diagram of blade-elastic casing rub-impact

将式(12)和式(13)代入式(14), 略去高阶小量, 可得法向碰摩力的表达式为

给系统, 以及测试系统组成. 实验台详细参数及支承刚度见文献 [6]. 由于条件所限, 本实验不能实现机匣的柔性变形, 只能考虑叶片以及机匣支承刚度的影响, 故将式(14)中 K_s 设为无穷大.

实验在 1 000, 1 500 和 2 000 r/min 三种转速下进行. 机匣采用钢制和铝制两种材料, 铝制机匣的支承刚度为 2×10^7 N/m, 钢制机匣的支承刚度为 3.5×10^7 N/m. 叶片分为厚度为 3 mm 的薄叶

片和 5 mm 的厚叶片两种,本文与文献[6]模型的对比如图 6 所示. 各工况下本文的精度略高于文献[6]模型. 对比图 6a 和 6b 可知,增加叶片厚度将提高抗弯刚度;侵入量相同时,碰摩擦力会大幅增加. 由图 6c 和 6d 以及图 6e 和 6f 的对比可知,侵入量相同时,由于支承刚度大,钢制机匣的法向碰摩擦力大于铝制机匣,对比图 6c 和 6e 以及图 6a, 6d 和 6f 可以看出,随着转速的提高,离心刚化作用增加叶片的抗弯刚度,保持侵入量不变,碰摩擦力会少许增加.

文献[12]对航空发动机整机进行建模,并通

过力传感器测得碰摩擦力. 为进一步验证机匣柔性变形与相关参数的影响,本文与其进行对比. 固定转速和支承刚度不变,随着碰摩程度逐渐加重,碰摩擦力逐渐增加,实验结果如图 7a 所示. 本文在机匣厚度 h_c 分别为 3,4 和 5 mm 三种工况下计算碰摩擦力与侵入深度的关系,如图 7b 所示,可以看出,由于机匣较薄,其结构刚度远小于支承刚度,法向碰摩擦力与侵入深度呈现出线性变化的关系. 当机匣厚度 h_c 为 4 mm 时,本文模型中法向碰摩擦力的计算结果与实验结果最为接近.

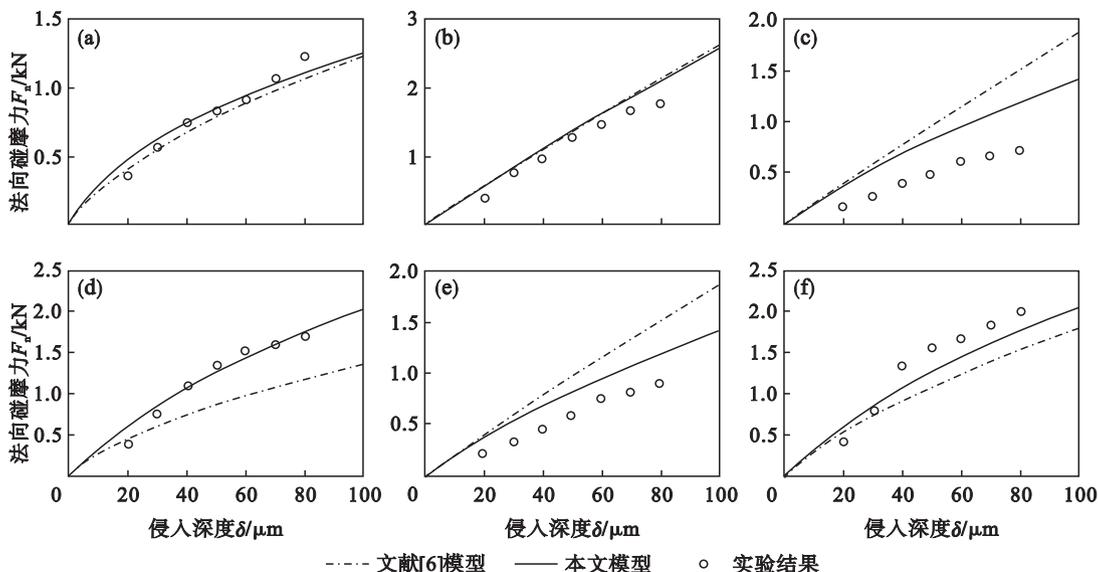


图 6 不同模型碰摩擦力对比

Fig. 6 Comparison of rub-impact force with different models

- (a) — $\Omega = 1\,000$ r/min, 薄叶片, 钢制机匣; (b) — $\Omega = 1\,000$ r/min, 厚叶片, 钢制机匣;
- (c) — $\Omega = 1\,500$ r/min, 薄叶片, 铝制机匣; (d) — $\Omega = 1\,500$ r/min, 薄叶片, 钢制机匣;
- (e) — $\Omega = 2\,000$ r/min, 薄叶片, 铝制机匣; (f) — $\Omega = 2\,000$ r/min, 薄叶片, 钢制机匣.

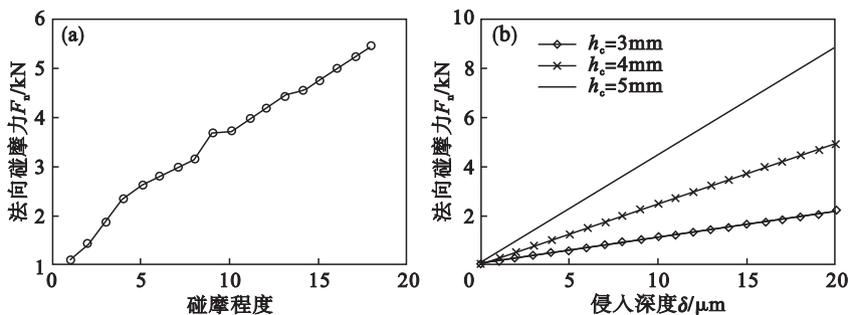


图 7 碰摩擦力对比

Fig. 7 Comparison of rub-impact force

- (a) — 文献[12]实验结果; (b) — 本文计算结果.

3 结 论

1) 叶片的弯曲变形同时受到离心刚化、旋转

软化和碰摩软化的作用,不同转速及碰摩擦力条件下,叶片的弯曲特性不同:提高转速会增加叶片的抗弯刚度,碰摩擦力的增加会降低叶片的抗弯刚度;叶片实际工作中的状态由二者共同决定.

2) 叶片 - 机匣碰摩中,碰摩部位机匣的位移由两部分组成:整体机匣位移和局部柔性位移.

3) 叶片 - 机匣的碰摩力受叶片刚度、机匣支承刚度和结构刚度的影响:侵入量相同时,机匣支承刚度和结构刚度的提高会增加碰摩力的值,其中机匣的结构刚度,主要由机匣的厚度、半径和碰摩宽度决定.

参考文献:

- [1] Padova C, Barton J, Dunn M, et al. Experimental results from controlled blade tip/shroud rubs at engine speed [J]. *Journal of Turbomachinery*, 2007, 129(4) : 1165 - 1177.
- [2] Padovan J, Choy F K. Nonlinear dynamics of rotor/blade/casing rub interactions [J]. *Journal of Turbomachinery*, 1987, 109(4) : 527 - 534.
- [3] Jiang J, Ahrens J, Ulbrich H, et al. A contact model of a rotating rubbing blade [C]// Proceedings of the 5th International Conference on Rotor Dynamics. Darmstadt: Technische Universität Darmstadt, 1998 : 478 - 489.
- [4] 刘昕,张华彪,孙小磊,等. 叶轮转子碰摩的非线性动力学响应 [J]. 振动与冲击, 2016, 35(20) : 172 - 177. (Liu Xin, Zhang Hua-biao, Sun Xiao-lei, et al. Nonlinear dynamics on rubbing of a blade-rotor system [J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2016, 35(20) : 172 - 177.)
- [5] Chen G. Simulation of casing vibration resulting from blade-casing rubbing and its verifications [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2016, 361 : 190 - 209.
- [6] Ma H, Tai X Y, Han Q K, et al. A revised model for rubbing between rotating blade and elastic casing [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2015, 337 : 244 - 262.
- [7] Lesaffre N, Sinou J J, Thouverez F. Model and stability analysis of a flexible bladed rotor [J]. *International Journal of Rotating Machinery*, 2006, 2006 : 1 - 16.
- [8] Parent M O, Thouverez F. Phenomenological model for stability analysis of bladed rotor-to-stator contacts [J]. *International Symposium on Transport Phenomena and Dynamics of Rotating Machinery*, 2016, 10/11/12/13/14/15 : 1 - 13.
- [9] Lesaffre N, Sinou J J, Thouverez F. Stability analysis of rotating beams rubbing on an elastic circular structure [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2007, 299 (4/5) : 1005 - 1032.
- [10] Chen G. Vibration modeling and verifications for whole aero-engine [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2015, 349 : 163 - 176.
- [11] Chu S M, Cao D Q, Sun S P, et al. Impact vibration characteristics of a shrouded blade with asymmetric gaps under wake flow excitations [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2013, 72(3) : 539 - 554.
- [12] 李勇,姜广义,王德友,等. 转静件碰摩状态下的叶片振动载荷和振动特性测试分析 [J]. 航空动力学报, 2008, 23(11) : 1988 - 1992. (Li Yong, Jiang Guang-yi, Wang De-you, et al. Test analysis of blades vibration load and vibration characteristics on the condition of rotor and stator rubbing [J]. *Journal of Aerospace Power*, 2008, 23(11) : 1988 - 1992.)