

在非黏性流体域中微悬臂梁振动的建模与仿真

马树军, 玄航, 孙嘉蔚, 杨磊

(东北大学 机械工程与自动化学院, 辽宁 沈阳 110819)

摘 要: 借用欧拉-伯努利梁理论推导并计算出微悬臂梁在真空中的共振频率, 根据非黏性理论经典模型分别计算出微悬臂梁在不同密度的流体中的共振频率. 然后在有限元软件 ANSYS (16.0) 仿真环境下, 采用 solid45-fluid30 和 shell63-fluid30 两种单元组合建立微悬臂梁在流体域中的三维模型并进行模态分析. 最后将仿真结果与相关研究者已发表的实验与理论数据进行对比, 在此基础上通过实验来验证新型有限元模型的正确性. 通过有限元和实验的方法进一步验证了非黏性流体的密度是影响微悬臂梁共振频率变化的主要因素.

关 键 词: 非黏性流体; ANSYS; 模态分析; 共振频率; 动态特性

中图分类号: TP 206

文献标志码: A

文章编号: 1005-3026(2018)09-1272-05

Modeling and Simulation of Micro-cantilever Vibrating in Inviscid Fluid Domains

MA Shu-jun, XUAN Hang, SUN Jia-wei, YANG Lei

(School of Mechanical Engineering & Automation, Northeastern University, Shenyang 110819, China.

Corresponding author: MA Shu-jun, E-mail: mashujun@me.neu.edu.cn)

Abstract: Based on the Euler-Bernoulli beam theory, the resonant frequency of micro-cantilever in vacuum was derived and calculated, then the resonant frequency of micro-cantilever in fluids with different density was calculated according to the classical non-viscous theoretical model. In the finite element software ANSYS (16.0) simulation environment, the solid45-fluid30 and shell63-fluid30 units were used to establish a three-dimensional model of micro-cantilever in the fluid domain and modal analysis was also performed. Finally, the simulation results were compared with the experimental and theoretical data reported by other researchers. Besides, experiments were done to verify the correctness of the finite element model. The theory that density of inviscid fluid is the main factor affecting the resonant frequency of micro-cantilever, is further verified by the finite element method and experimental method.

Key words: inviscid fluid; ANSYS; modal analysis; resonance frequency; dynamic properties

MEMS/NEMS(micro/nano- electro- mechanical system)传感器技术由于其微型化、智能化、成本低等优点,被认为是继微电子之后又一个对国民经济和军事有重大影响的技术领域. 在生物医学和机械工程等领域 MEMS 技术已经成为不可或缺的技术之一^[1]. 微悬臂梁又是 MEMS 传感器件的关键元件,被广泛应用于液体、气体等流体环境^[2],如微生物传感器(micro-biosensors)、微型开关(micro-switches)和微型共振器(micro-

resonators)等^[3]. 由于 MEMS 传感器主要工作在流体环境,所以流体阻尼(fluid damping)会影响关键元件——微悬臂梁的振动特性,因而研究微悬臂梁在流体中的振动非常重要. 相关研究可以通过微悬臂梁传感器在流体环境中共振特性的变化,从而精确地计算出传感器所在流体的性能指标^[4-5]. 流体阻尼分为附加质量(added mass)和黏性阻尼(viscous damping)^[6]. Sader 指出当流体的雷诺系数 $Re \gg 1$ 时,其黏度可认为非常小,流体

收稿日期: 2017-05-05

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(51505076); 辽宁省自然科学基金资助项目(2015020105); 中央高校基本科研业务费专项资金资助项目(N140304010, N150308001); 辽宁省高等学校创新团队(LT2014006).

作者简介: 马树军(1982-),男,河北保定人,东北大学副教授.

可近似为非黏性流体^[7-8]. 本文将对微悬臂梁在非黏性流体中的共振特性进行研究,即研究附加质量对微悬臂梁共振特性的影响. 在小黏性的流体环境下本文可以用非黏性模型代替黏性模型来提高计算效率. 目前国内外研究者在微悬臂梁浸没于流体中振动方面着重于理论和实验. 例如 Xie 等^[9]提出了非黏性流体的附加质量与微悬臂梁共振频率偏移的关系. Shabani 等^[3]总结了微悬臂梁在非黏性不可压缩流体中的共振频率的变化情况. Rezazadeh 等^[10]的研究表明在非黏性不可压缩流体中,由于流体密度的增加导致了附加质量 (added mass) 的增加. 目前的研究成果在有限元仿真模型方面缺乏足够的依据. 本研究将建立一种新的流固耦合模型并进行实验,对该模型的正确性进行验证. 新的模型在保证精度基础上大大提高了计算效率,对微悬臂梁传感器今后的制造和发展具有重要的参考价值和实际意义.

1 理论模型

首先使用欧拉 - 伯努利梁理论来分析并推导悬臂梁的振动模型 (见图 1)^[11]. 假设悬臂梁为等截面细长直杆, $y = y(x, t)$ 为曲线挠度, L, b, h 分别为梁的长、宽和厚度, 线密度为 ρ_1 , 截面惯性矩为 I (对于矩形梁 $I = bh^3/12$), 材料的弹性模量为 E .

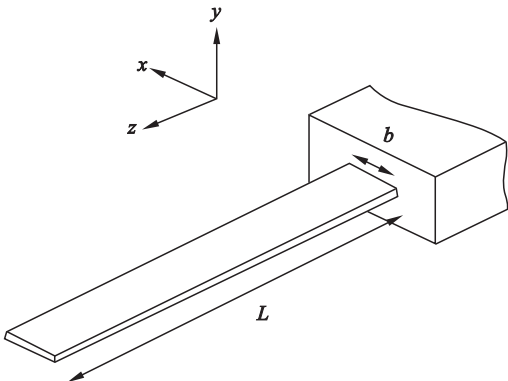


图 1 悬臂梁模型
Fig. 1 Cantilever beam model

对微元进行受力和化简,得到悬臂梁的运动方程为

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0, \tag{1}$$
$$a^2 = EI/\rho_1, \tag{2}$$
$$\beta^4 \equiv \omega^2/a^2. \tag{3}$$

通解为

$$y(x, t) = Y(x) G(t), \tag{4}$$

$$Y_i(x) = A \cosh(\beta_i x) + B \sinh(\beta_i x) + C \cos(\beta_i x) + D \sin(\beta_i x), \tag{5}$$
$$G(t) = E \sin(\omega t) + F \cos(\omega t). \tag{6}$$

悬臂梁的边界条件为

$$Y(0) = 0, Y'(0) = 0, Y''(L) = 0, Y'''(L) = 0. \tag{7}$$

将式(7)代入式(5)化简得悬臂梁振动特征方程为

$$\cos(\beta_i L) \cosh(\beta_i L) + 1 = 0. \tag{8}$$

模态振型为式 (9), 系数 ζ_i 见表 1.

$$Y_i(x) = \cosh(\beta_i x) - \cos(\beta_i x) + \zeta_i [\sinh(\beta_i x) - \sin(\beta_i x)]. \tag{9}$$

表 1 $\beta_i L$ 和 ζ_i Table 1 $\beta_i L$ and ζ_i						
阶数 i	1	2	3	4	...	i
$\beta_i L$	1.875	4.694	7.855	10.996	...	$(2i-1)\pi/2$
ζ_i	0.734	1.109	0.999	1.000	...	1

求得振动角频率为

$$\omega_i = (\beta_i L)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho_1 L^4}}, \tag{10}$$

不同阶数的 $\beta_i L$ 见表 1. 共振频率为

$$f_i = \omega_i/2\pi. \tag{11}$$

由式(11)和式(9)可计算出悬臂梁在真空中每阶的共振频率和振型. 引用 Chu^[12]的微悬臂梁在非黏性流体中的模型理论,可以计算出微悬臂梁在不同流体中的共振频率. 该模型应满足五点基本假设:

- 1) 微悬臂梁在长度方向上是定截面的;

2) 微悬臂梁的长度 L 远大于宽度 b ;

3) 微悬臂梁的材料是各向同性的线性弹性体,并且内部的摩擦影响可以被忽略;

4) 微悬臂梁振幅远小于在各个方向上的长度;

5) 非黏性流体是不可压缩的.

$$\frac{\omega_{\text{fluid}}}{\omega_{\text{vac}}} = [1 + \frac{\pi \rho b}{4 \rho_1 h}]^{-1/2}. \tag{12}$$

其中: ω_{fluid} 和 ω_{vac} 分别是微悬臂梁在流体和真空中的角频率; ρ 是流体密度; ρ_1 是悬臂梁的线密度.

2 仿真建模

本研究使用有限元仿真软件 ANSYS(16.0)建立 1 个三维的微悬臂梁在流体中的非黏性模型,如图 2 所示. 实体域与流体域的尺寸和材料参

数都可以任意设定. 为了验证文献[8]的结果, 本文选择的杨氏模量、泊松比和密度分别为 170 GPa, 0.3, 2 320 kg/m³, 微悬臂梁的尺寸为 197 μm × 29 μm × 2 μm, 使用 shell63 单元和 fluid30 三维流体单元分别做实体域与流体域.

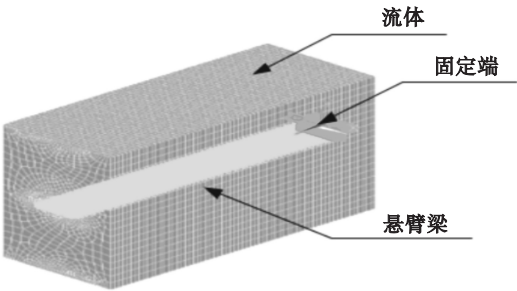


图 2 流体域与实体域模型

Fig. 2 Model of the fluid and structure domains

在仿真微悬臂梁流固耦合时可以做二维模型 plane42 – fluid79^[13] 和三维模型 solid45 – fluid30^[14], 而本文的 shell63 – fluid30 模型的计算结果与 solid45 – fluid30 模型结果非常接近. 但是, 采用 shell63 单元可以减少计算时间. 特别地, 当网格划分非常精细的时候, 用 shell63 单元代替

solid45 单元可以极大减少运算时间, 提高工作效率. 使用电脑(处理器: Intel(R) core(TM) i7 – 6700 CPU @ 3.4 GHz, 8 GB 内存)计算 C2 微悬臂梁流固耦合模型, solid45 – fluid30 模型用时 96 s, shell63 – fluid30 模型用时 59 s.

3 结果分析与讨论

3.1 模型正确性的验证

本文对非黏性模型进行了大量的仿真实验, 例如 Sader^[7]通过改变流体性能参数(见表 2), 从而仿真出了微悬臂梁在丙酮、正丁醇、水和四氯化碳中的共振频率, 结果见表 3.

表 2 在 20 ℃下各流体的参数
Table 2 Parameters of each fluid at 20 ℃

流体	$\rho/(\text{kg} \cdot \text{m}^{-3})$	$c/(\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$
空气	1.18	340
丙酮	785	1 192
正丁醇	805	1 212
水	997	1 460
四氯化碳	1 590	926

表 3 各种流体中 C2 微悬臂梁共振频率
Table 3 Resonant frequencies of the C2 micro-cantilever in each fluid

流体域	$f_{\text{Sader}}^{[13]}/\text{kHz}$	$f_{\text{solid45} - \text{fluid30}}/\text{kHz}$	误差/%	$f_{\text{shell63} - \text{fluid30}}/\text{kHz}$	误差/%
丙酮	31.90	31.13	2.38	31.07	2.60
正丁醇	31.60	30.82	2.46	30.90	2.21
水	29.00	28.16	2.89	28.11	3.07
四氯化碳	23.70	22.91	3.18	23.01	2.91

从表 3 可知, 新型有限元模型结果误差在 3% 左右, 可以认为仿真可靠性比较高. 本文再根据 Chu^[12]的非黏性理论对 shell63 – fluid30 模型的正确性进行了验证, 见图 3.

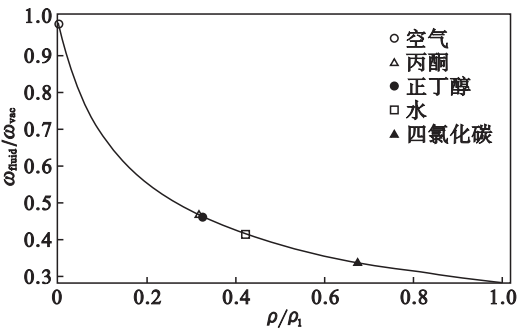


图 3 $\omega_{\text{fluid}}/\omega_{\text{vac}}$ 与 ρ/ρ_1 的关系曲线

Fig. 3 Relations between $\omega_{\text{fluid}}/\omega_{\text{vac}}$ and ρ/ρ_1

假设 $y = \omega_{\text{fluid}}/\omega_{\text{vac}}$, $x = \rho/\rho_1$, 式(12)变为

$$y = [1 + \frac{\pi b}{4h} x]^{-1/2}. \tag{13}$$

该函数曲线为单调递减曲线(见图 3 黑色曲线). 图中的点分别代表微悬臂梁在不同流体中第一阶共振频率的仿真结果, 每一种流体对应的结果都标在曲线上.

3.2 共振频率的变化

从图 4 中可以看出, 由于四氯化碳的密度最大, 该流体对微悬臂梁共振频率的影响最大, 可以认为流体密度对微悬臂梁共振频率的变化有很大影响.

3.3 共振模态的变化

图 5 为 Sader 的 C2 微悬臂梁在不同流体中

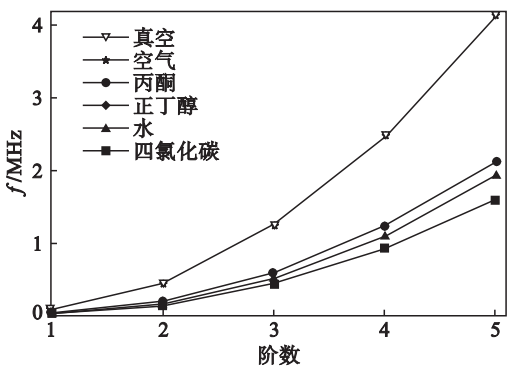


图 4 各种流体中微悬臂梁的共振频率

Fig. 4 Resonant frequencies of the micro-cantilever in each fluid

的前 4 阶模态,本文用 ANSYS 软件进行模态分析并用 Origin 软件对微悬臂梁的前四阶模态进行归一化处理。

图 5a ~ 图 5d 分别是微悬臂梁在真空、丙酮、正丁醇、水和四氯化碳中前 4 阶共振模态. 可以看到流体随着密度的增加,对微悬臂梁共振模态的影响随之增加,并且随着阶数的增加,流体阻尼对微悬臂梁的模态影响越来越大. 因此流体的密度对微悬臂梁的共振模态有很大影响。

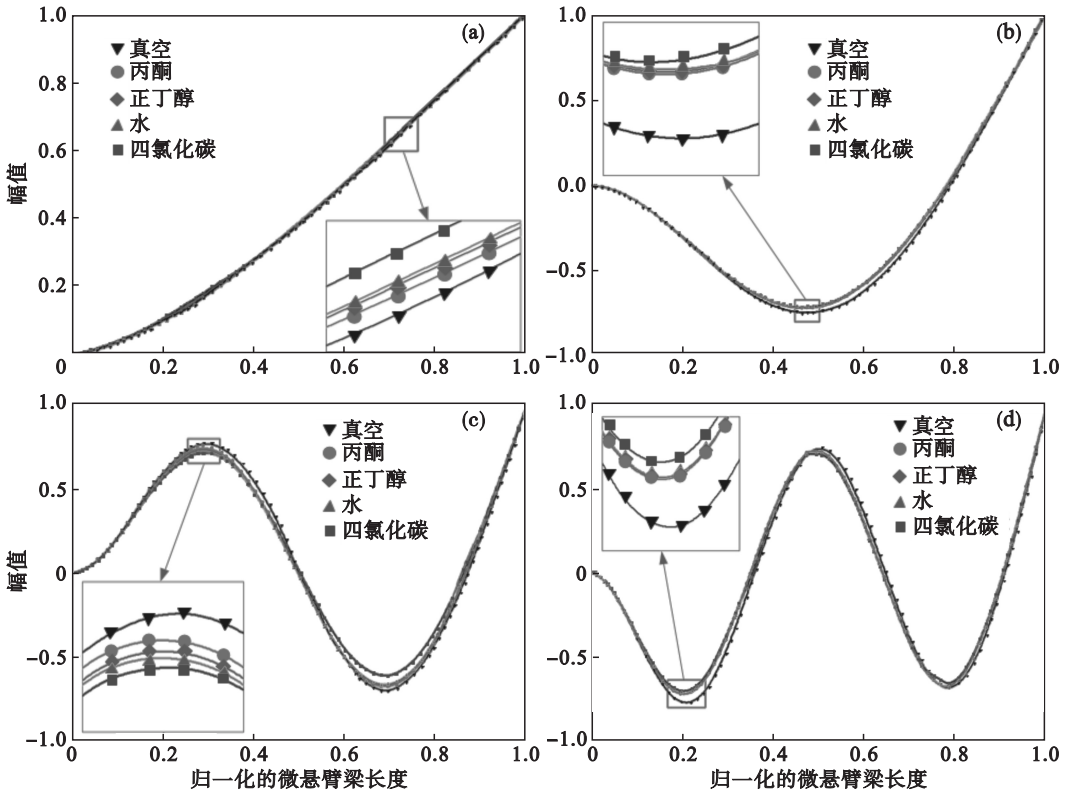


图 5 微悬臂梁在不同流体中共振模态

Fig. 5 Vibration modes of the micro-cantilever in different fluid

(a)——一阶模态; (b)——二阶模态; (c)——三阶模态; (d)——四阶模态。

4 实 验

本文的实验装置包括真空系统、激光位移测量系统和显微观测系统. 直径为 210 mm 圆柱形真空腔内真空度可达 0.1 Pa. 激光测量装置是基恩士公司的 LK - G5000 型位移传感器,分辨率能够达到 0.005 μm ,采样频率最大能达到 392 kHz. 显微观测装置为 E - M5II 型全幅相机和 50 倍物镜组成. 实验原理和实验装置见图 6 ~ 图 8. 本套设备可以实时测量在不同真空度下的微悬臂梁样品的振动位移,然后通过 FFT 变换,转变成频谱图. 图 9 为微悬臂梁样品在不同压强下的一组频谱图。

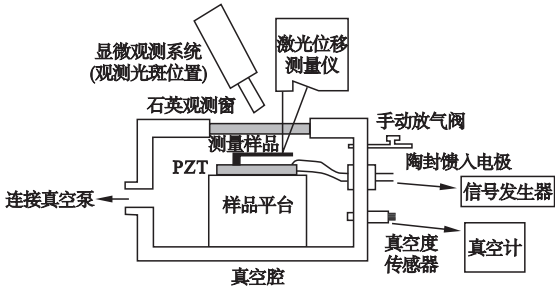


图 6 实验原理图

Fig. 6 Schematic diagram of the experiment

本文通过实验验证有限元模型的正确性,从表 4 中可以看出实验结果与有限元结果相差在 5% 以内,可以认为实验较为成功,也验证了本文

新型有限元模型的正确性.

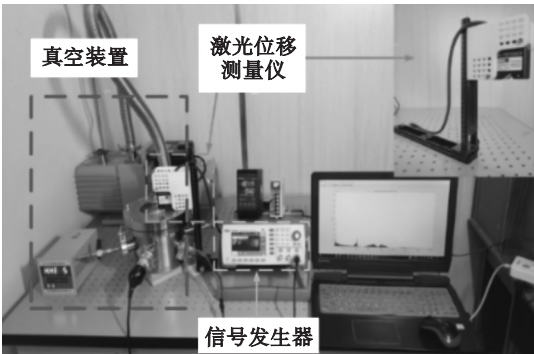


图 7 实验装置
Fig. 7 Experiment facility

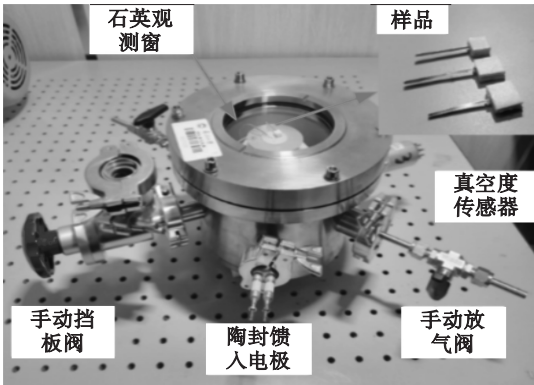


图 8 真空腔
Fig. 8 Vacuum chamber

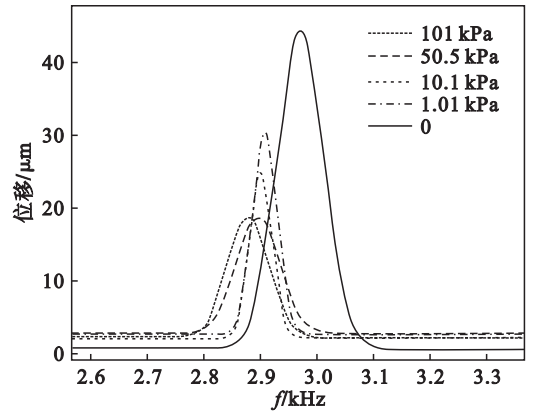


图 9 微悬臂梁样品在不同压强下的频谱
Fig. 9 Micro-cantilever vibration spectrum under different pressures

表 4 微悬臂梁样品共振频率的实验与 FEM 结果对比
Table 4 Comparison of experiment and FEM results of resonance frequency for the micro-cantilever

真空度/MPa	f_{FEM}/Hz	$f_{实验}/\text{Hz}$	误差/%
0.1	2 998.8	2 878.6	4.01
0.05	3 003.8	2 894.0	3.66
0.01	3 006.1	2 901.2	3.49
0.001	3 008.5	2 908.8	3.31
0	3 028.8	2 971.6	1.89

5 结 语

本文新型有限元模型 shell63 – fluid30 相比于传统的模型在保证精度的前提下将计算时间减少了 39% ,通过对比其他研究者的理论数据证明了新型有限元模型的可行性和高效性. 并用实验的方法进一步证实了非黏性流体的密度是影响微悬臂梁共振频率变化的主要因素这一结论.

参考文献:

[1] Ergin A, Uğurlu B. Linear vibration analysis of cantilever plates partially submerged in fluid[J]. *Journal of Fluids & Structures*,2003,17(7):927 – 939.

[2] Boisen A, Dohn S, Sylvest K S, et al. Cantilever-like micromechanical sensors [J]. *Reports on Progress in Physics*,2012,74(3):36101.

[3] Shabani R,Hatami H,Golzar F G,et al. Coupled vibration of a cantilever micro-beam submerged in a bounded incompressible fluid domain[J]. *Acta Mechanica*,2013,224(4):841 – 850.

[4] Alapan Y, Icoz K, Gurkan U A. Micro and nanodevices integrated with biomolecular probes [J]. *Biotechnology Advances*,2015,33(8):1727 – 1743.

[5] Johnson B N, Mutharasan R. Acousto fluidic particle trapping, manipulation, and release using dynamic-mode cantilever sensors[J]. *Analyst*,2017,142(1):123 – 131.

[6] Olfatnia M, Kottapalli A G P, Xu T, et al. Analysis of acoustic radiation and viscous damping on the vibration of piezoelectric circular micro-diaphragms[C] // *Actuators & Microsystems Conference*. New York: IEEE, 2011: 1689 – 1692.

[7] Sader J E. Frequency response of cantilever beams immersed in viscous fluids with applications to the atomic force microscope[J]. *Journal of Applied Physics*,1998,84(1):64 – 76.

[8] Chon J W M, Mulvaney P, Sader J E. Experimental validation of theoretical models for the frequency response of atomic force microscope cantilever beams immersed in fluids [J]. *Journal of Applied Physics*,2000,87(8):3978 – 3988.

[9] Xie X, Kong L, Zhang J, et al. Coupled analysis on the thickness-shear vibrations of a quartz plate resonator covered with micro-beams immersed in inviscid liquid and computation of the induced frequency-shift by the surface loadings[J]. *Mechanics of Advanced Materials & Structures*, 2016,23(7):758 – 763.

[10] Rezazadeh G, Fathalilou M, Shabani R, et al. Dynamic characteristics and forced response of an electro statically-actuated microbeam subjected to fluid loading [J]. *Microsystem Technologies*,2009,15(9):1355 – 1363.

[11] Rao S S. Vibration of continuous systems [M]. Florida: Wiley,2007:251 – 256.

[12] Chu W H. Technical report No 2, DTMB, contract NObs-86396 (X) [R]. San Antonio: Southwest Research Institute,1963.

[13] Hossain A,Humphrey L,Mian A. Prediction of the dynamic response of a mini-cantilever beam partially submerged in viscous media using finite element method [J]. *Finite Elements in Analysis & Design*,2012,48(1):1339 – 1345.

[14] Zhao L, Hu Y, Hebibul R, et al. Density measurement sensitivity of micro-cantilevers influenced by shape dimensions and operation modes[J]. *Sensors & Actuators B: Chemical*,2017,245:574 – 582.