

# 不重叠多分层纤维增强复合梁固有频率分析及验证

许卓, 李晖, 薛鹏程, 闻邦椿  
(东北大学 机械工程与自动化学院, 辽宁 沈阳 110819)

**摘 要:** 首先, 针对复合梁各向异性的特点, 利用子结构分析法分段表达各子梁的振型函数, 明确复合梁固有频率的求解原理; 然后, 基于 Matlab 编写计算程序, 提出不重叠多分层复合梁固有频率的分析流程; 最后, 以 TC500 碳纤维/树脂基复合梁为研究对象, 搭建了复合梁固有频率测试系统, 测试获得其未分层、单分层和不重叠多分层损伤下的固有频率. 研究发现, 随着分层数量增加, 固有频率逐渐下降, 且随着模态阶次升高, 对固有频率的影响愈发明显; 同时, 试验与计算结果的误差在 1.06% ~ 5.49% 之间, 验证了所提出计算方法的正确性.

**关 键 词:** 固有频率; 纤维增强; 复合梁; 不重叠多分层; 试验分析

中图分类号: TB 535      文献标志码: A      文章编号: 1005-3026(2018)11-1619-05

## Natural Frequency Analysis and Verification of Fiber-Reinforced Composite Beams with Non-overlapping Delaminations

XU Zhuo, LI Hui, XUE Peng-cheng, WEN Bang-chun  
(School of Mechanical Engineering & Automation, Northeastern University, Shenyang 110819, China.  
Corresponding author: XU Zhuo, E-mail: xuzhuo0816@foxmail.com)

**Abstract:** Firstly, according to the anisotropic characteristics of composite beams, the vibrational function of each sub beam was expressed by substructure analysis method, and the theoretical solution principle of the natural frequency of composite beams was clarified. Secondly, based on Matlab software, an analysis process of the natural frequency was proposed and the calculation program was coded. Finally, an experimental application toward TC500 carbon fiber/resin matrix composite beam was carried out, that the natural frequencies of fiber-reinforced composite beam with non-overlapping delaminations were measured under the same boundary condition based on the established natural frequency test system. It was found that the natural frequencies decreases gradually as the delamination number increasing. Meanwhile, with the increase of modal orders, the influence of delaminations on the natural frequencies became more obvious. Furthermore, the related errors were within the range of 1.06% ~ 5.49% by comparing experimental results with calculated results, which have verified the validity of the analysis method.

**Key words:** natural frequency; fiber-reinforced; composite beam; non-overlapping delaminations; experimental analysis

由于纤维增强复合材料具有比强度、比刚度  
高及耐高温性能好等优点,同时还具有良好的稳  
定性和阻尼特性,因此被广泛应用于航空、军工、  
汽车以及其他高精技术领域.但是,由于纤维增强  
复合材料常使用在恶劣的工作环境中,因此容易  
出现损伤故障,如分层、纤维断裂、整体开裂等.在  
众多的故障中,分层损伤是在复合材料中最常出  
现的一种故障形式<sup>[1]</sup>. 分层损伤,会改变结构的  
动力学特性,对固有频率、模态振型以及其他振动  
特性产生影响. 因此研究分层损伤下复合材料结

构的振动特性具有学术和工程意义.

由于纤维增强复合材料结构分层损伤故障具有代表性,目前已受到国内外学者的广泛关注. Wang 等<sup>[2]</sup>基于欧拉-伯努利梁理论对具有贯穿分层结构的弹性梁进行了振动分析,但该方法不适用于位于非中心区域的分层.为解决这一问题, Mujumdar 等<sup>[3]</sup>假设其拥有一致的剪切变形,提出一个约束模型,该模型分层发生在中心与非中心位置时,计算的结果与实验结果都有很好的一致性;但此类模型无法解释实验所获模态振型中分层出现的开口现象<sup>[4]</sup>.为解决该问题, Luo 等<sup>[5]</sup>基于 Timoshenko 梁理论,通过引入逐段线性弹簧模型的方法来模拟两层面间的张开与闭合.从而很好地解释实验中分层面间的开口现象. Chakraborty 等<sup>[6]</sup>基于一阶剪切变形理论,利用有限元法,对非对称复合梁的振动特性进行了分析, Della 等<sup>[7]</sup>提出了两个重叠分层损伤梁的振动模型,讨论了两分层重叠长度对固有频率的影响,但未进行实验验证. Kargarnovin 等<sup>[8]</sup>对分层梁在移动恒力作用下的动力学特性进行了分析,获得了该状态下复合梁的固有频率、模态振型和振动响应.国内方面,庄小燕等<sup>[9]</sup>提出了一种含有分层损伤层合结构的有限元模型,计算了该结构的频率和模态阻尼.吉桂秀等<sup>[10]</sup>基于一阶剪切变形理论,建立了含多个分层损伤层合结构自由振动的有限元模型并提出了分析方法.

虽然人们对分层损伤纤维复合梁的振动特性开展了大量的研究,但针对不重叠多分层损伤复合梁固有频率理论与实验结合的研究相对较少.复合材料由于其制备工艺,容易产生分层损伤;同时,由于其具有的各向异性特点,更加大了固有特性分析的难度.因此,有必要针对纤维增强复合材料结构在多分层故障下的固有特性问题进行更加深入的研究.

## 1 带有不重叠多分层损伤的纤维增强复合梁固有频率的理论求解

建立图 1 所示不重叠多分层损伤复合梁的模型,模型的总长度为  $L$ ,宽度为  $b$ ,厚度为  $h$ ,  $j$  个不重叠分层区域的长度分别为  $L_{d1} \sim L_{dj}$ . 基于经典梁理论,将该模型简化为由  $n$  根子梁在分层边界处相连接的模型,其中每根梁的厚度分别为  $h_i$  ( $i = 1 \sim n$ ). 模型中分层区域中的两根子梁被认为一直接触在一起,但相互之间可以产生滑动<sup>[3]</sup>.

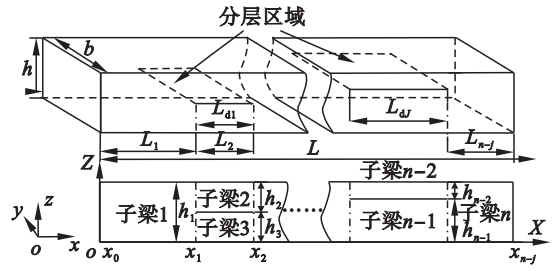


图 1 带有不重叠多分层损伤的纤维增强复合梁的理论模型  
Fig. 1 Theoretical model of the fiber-reinforced composite beam with non-overlapping delaminations

分层梁的振动控制方程通过欧拉-伯努利梁原理建立,其未分层区间子梁的控制方程为

$$D_i \frac{\partial^4 w_i}{\partial x^4} + m_i \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} = 0. \quad (1)$$

分层区间子梁的控制方程为

$$(D_{2+3s} + D_{3+3s}) \frac{\partial^4 w_i}{\partial x^4} + (m_{2+3s} + m_{2+3s}) \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} = 0. \quad (2)$$

式中:  $w_i$  和  $m_i$  分别为第  $i$  个子梁的挠度和质量;  $D_{2+s} = D_{3+s}$ ;  $s = 0 \sim j-1$ ;  $D_i$  为第  $i$  个子梁的缩减弯曲刚度,表示为

$$D_i = D_{11}^{(i)} - \frac{(B_{11}^{(i)})^2}{A_{11}^{(i)}}, (i = 1, \dots, n). \quad (3)$$

其中:  $A_{11}^{(i)}$ ,  $B_{11}^{(i)}$  和  $D_{11}^{(i)}$  分别为第  $i$  个子梁的拉伸刚度、耦合刚度和弯曲刚度. 表达式分别为

$$A_{11}^{(i)} = b \sum_{k=1}^{n_i} (\bar{Q}_{11}^k)_k (z_k - z_{k-1}), \quad (4)$$

$$B_{11}^{(i)} = \frac{b}{2} \sum_{k=1}^{n_i} (\bar{Q}_{11}^k)_k (z_k^2 - z_{k-1}^2), \quad (5)$$

$$D_{11}^{(i)} = \frac{b}{3} \sum_{k=1}^{n_i} (\bar{Q}_{11}^k)_k (z_k^3 - z_{k-1}^3). \quad (6)$$

在式(4)~式(6)中:  $n_i$  表示第  $i$  个子梁的层数;  $z_k$  和  $z_{k-1}$  表示第  $i$  个子梁的第  $k$  层纤维与中层的距离;  $\bar{Q}_{11}^k$  为子梁第  $k$  层的刚度系数,其表达式为

$$\bar{Q}_{11}^k = Q_{11}^k \cos^4 \varphi + Q_{22}^k \sin^4 \varphi + 2(Q_{12}^k + 2Q_{66}^k) \times \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi. \quad (7)$$

其中:  $Q_{11} = \frac{E_{11}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}$ ;  $Q_{22} = \frac{E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}$ ;  $Q_{66} = G_{12}$ ;

$Q_{12} = \nu_{12}Q_{22}$ ;  $\nu_{21} = \frac{\nu_{12}E_{22}}{E_{11}}$ .  $E_{11}$ ,  $E_{22}$ , 和  $G_{12}$  分别为沿纤维方向、垂直纤维方向和面内剪切杨氏模量,  $\nu_{12}$  和  $\nu_{21}$  分别为沿着纤维方向和垂直纤维方向的泊松比.

在自由振动中,对于式(1)和式(2)的通解为

$$w_i(x) = W_i(x) \sin(\omega t). \quad (8)$$

式中:  $\omega$  为复合梁的固有频率;  $W_i(x)$  为第  $i$  个子

梁的模态振形。

将式(8)代入式(1)和式(2)并消除零解  $\sin(\omega t) = 0$ , 可获得广义微分方程:

$$W_i(x) = C_i \cos(\lambda_i \frac{x}{L}) + S_i \sin(\lambda_i \frac{x}{L}) + CH_i \cosh(\lambda_i \frac{x}{L}) + SH_i \sinh(\lambda_i \frac{x}{L}) . \quad (9)$$

式中,  $\lambda_i$  在未分层区域的表达式为

$$\lambda_i^4 = \frac{\omega^2 m_i}{D_i} L^4 . \quad (10a)$$

在分层区域的表达式为

$$\lambda_{2+3s}^4 = \frac{\omega^2 (m_{2+3s} + m_{3+3s})}{(D_{2+3s} + D_{3+3s})} L^4 . \quad (10b)$$

$\lambda_i$  为无量纲的频率, 其中最小的特征值  $\lambda$  为梁的无量纲基频. 式(9)中包含的  $4n-4j$  个未知参数  $C_i, S_i, CH_i$  和  $SH_i (i=1, \dots, n)$  可以通过 4 个边界条件和 8j 个连续性条件来确定。

1) 边界条件的确定. 在子梁 1 边界  $x=0$  处和子梁  $n$  边界  $x=L$  处的具体表达如下, 式中的微分表示  $W$  对  $x$  的导数。

$$\begin{cases} \text{当在简支边界条件时, } W_i = 0, W_i'' = 0; \\ \text{当在固支边界条件时, } W_i = 0, W_i' = 0; \\ \text{当在自由边界条件时, } W_i'' = 0, W_i''' = 0. \end{cases}$$

2) 连续性条件的确定. 如图 2 所示, 以子梁 1、子梁 2 和子梁 3 为例, 子梁 2 和子梁 3 考虑到挠度和斜率的连续性条件, 在  $x=x_1=L_1$  处的弯曲和扭转运动的平衡条件为:  $W_1 = W_2, W_1' = W_2'$ 。

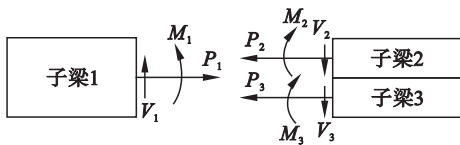


图 2  $x=L_1$  处子梁 1 与子梁 2 和 3 剪力力和弯曲位移平衡条件

Fig. 2 Equilibrium condition for the shear forces and bending moments between sub-beam 1 and sub-beam 2 and 3 at  $x=L_1$

图 2 中, 各分量关系:

$$V_1 = V_2 + V_3 , \quad (11)$$

$$M_1 = M_2 + M_3 - P_2 \left( \frac{h_1}{2} - \frac{h_2}{2} \right) + P_3 \left( \frac{h_1}{2} - \frac{h_3}{2} \right) . \quad (12)$$

式中:  $V_i = -D_i W_i'''; M_i = -D_i W_i'' (i=1, 2, 3)$ . 故式(11)可改写为

$$D_1 W_1''' = (D_2 + D_3) W_2''' . \quad (13)$$

此外, 轴向力  $P_i$  可以通过子梁间分层的伸长/缩短的相容性和轴向平衡获得. 这里

$$\frac{P_3 L_d}{A_{11}^{(3)}} - \frac{P_2 L_d}{A_{11}^{(2)}} = \frac{h_1}{2} [W_1'(L_1) - W_4'(L_1 + L_d)] , \quad (14)$$

$$P_1 = P_2 + P_3 = 0 . \quad (15)$$

整理得

$$D_1 W_1''(L_1) = (D_2 + D_3) W_2''(L_1) - \frac{h_1^2}{4L_d} \frac{[W_1'(L_1) - W_4'(L_1 + L_d)]}{\frac{1}{A_{11}^{(2)}} + \frac{1}{A_{11}^{(3)}}} . \quad (16)$$

同理, 也可以获得, 在  $x=x_2$  至  $x=x_{n-j-1}$  处考虑挠度和斜率连续性条件的弯曲和扭转运动的平衡条件. 通过在  $x_0$  和  $x_n$  点处获得的 4 个边界条件和  $x_1 \sim x_{n-j-1}$  处获得的 8j 个连续性条件, 将所获得的方程进行整理得

$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{V} = 0 . \quad (17)$$

式中:  $\mathbf{Q}$  为各未知参数  $C_i, S_i, CH_i$  和  $SH_i$  的系数所构成的  $(4n-4j) \times (4n-4j)$  的方阵;  $\mathbf{V}$  为未知参数  $C_i, S_i, CH_i$  和  $SH_i$  所构成  $(4n-4j) \times 1$  的矩阵. 若要使方程(17)成立, 则有  $|\mathbf{Q}| = 0$ , 求解即可求出其固有频率  $\omega$ 。

## 2 不重叠多分层损伤下纤维增强复合梁的固有频率分析流程

本文第 1 节明确了子结构分析法分层梁固有特性求解原理, 本节中, 基于 Matlab 编写了相应的程序, 并提出了多分层损伤的复合梁固有频率的分析流程, 具体步骤如下:

1) 输入分层复合梁的几何参数和材料参数. 首先, 需要给出分层复合梁的长、宽、厚、每层纤维角度等几何参数; 然后, 输入沿纤维方向和垂直纤维方向的弹性模量、剪切模量、泊松比和材料密度等参数, 为计算做好准备。

2) 基于子结构分析法, 获得各子梁的无量纲频率和振型表达式. 基于子结构分析法, 将分层复合梁简化成在分层边界处相连接的多根欧拉-伯努利子梁, 分别获得每根子梁的缩减弯曲刚度, 进而获得各子梁的无量纲频率和振型表达式。

3) 根据多分层损伤的复合梁的边界条件和连续性条件, 列出求解方程组. 首先, 在子梁 1 和子梁  $n$  所对应的边界状态, 确定边界条件方程; 然后, 根据未分层区域的子梁与其相邻的分层区域子梁的连续性条件、剪切力和弯曲位移平衡条件, 可获连续性条件方程; 最后, 将所获得的所有方程组联立, 准备进行求解。

4) 对方程进行整理, 获得分层梁的固有频率. 整理后的方程组可写成  $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{V} = 0$  的形式. 为使方程有非零解, 则  $|\mathbf{Q}| = 0$ , 求解可获得分层梁的各阶固有频率  $\omega$ 。



3 实验验证

以 TC500 碳纤维/树脂基纤维复合梁为研究对象,对其在未分层、单分层和不重叠多分层状态下的固有频率进行了测试. 被测试件长×宽×高的尺寸为 260 mm×30 mm×2.3 mm,沿纤维方向的弹性模量为 136 GPa,垂直纤维方向的弹性模量为 7.92 GPa,剪切模量为 3.39 GPa,泊松比为 0.32,密度为 1 780 kg/m<sup>3</sup>,质量为 32 g,材料的铺层方式为正交铺设,即[(0/90)<sub>s</sub>/0/(90/0)<sub>s</sub>],共铺设 21 层,每层具有相同的厚度和纤维体积分数. 测试时复合梁安装状态为悬臂形式,其固定端夹持长度为 30 mm,制作的两个分层长度分别为 60 mm 和 35 mm,分层区域左端距离悬臂边的距离分别为 130 mm 和 60 mm,距离上表面的距离分别为 1 mm 和 1.5 mm.

为验证本文提出不重叠多分层故障下复合梁固有频率计算方法的正确性,搭建如图 3 所示的实验系统.

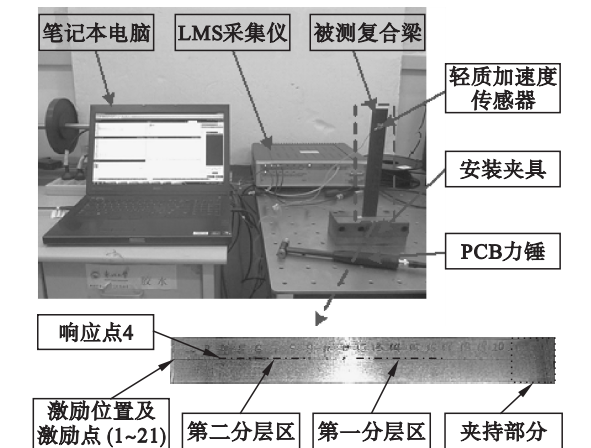


图 3 复合梁固有频率测试系统

Fig. 3 Natural frequency test system for the composite beam

3.1 未分层复合梁的固有频率测试

为比较分层前后复合梁固有频率的变化,先对未分层状态下的复合梁进行测试. 首先,将未分层的复合梁安装到图 3 所示的夹具中;安装完成后,对被测复合梁以单点响应,多点激励的方式进行测量,被测复合梁沿长度方向等分成 20 段,共 21 个激励点,响应点设置在点 4 位置,各测点位置如图 3 中的局部放大图所示. 测试时,使用 PCB 力锤在每个激励点进行 3 次有效激励,并通过 LMS 采集仪进行数据采集,最后通过 LMS Test. lab 14A 分析软件对采集的信号进行存储和分析,

获得其前 5 阶固有频率.

3.2 单个分层时复合梁的固有频率测试

1) 单分层复合梁的制作. 为保证边界条件的一致性,完成未分层复合梁固有频率测试后,在试验装置上直接完成分层的制作. 首先,对设置好的第一分层区域进行局部加热使胶体软化;在确认胶体软化后,使用尖头刀片在预分层区域穿透并将其扩展到指定长度,形成贯穿式的分层. 最后,待胶体重新冷却,单分层复合梁即置备完成. 分层部分的预制过程,如图 4 所示.

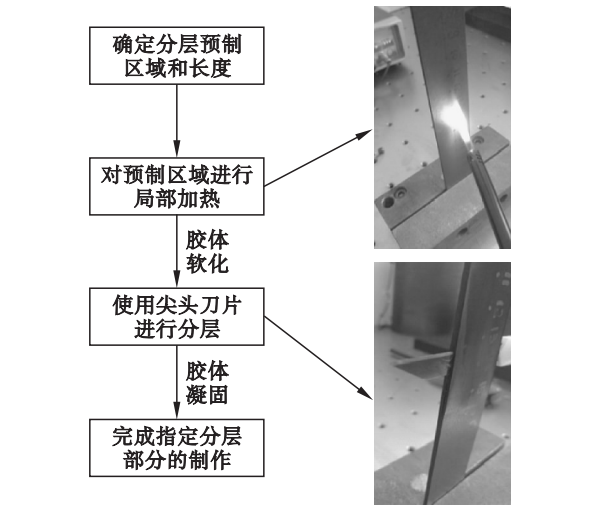


图 4 复合梁的分层区域制作过程

Fig. 4 Making a delamination area in the composite beam

2) 单分层复合梁的固有频率测试. 单个分层预制完成后,重复 3.1 节所使用测试方法,对单分层复合梁进行固有频率的测试,获得单分层复合梁的前 5 阶固有频率.

3.3 不重叠分层时复合梁的固有频率测试

1) 不重叠多分层的预制. 完成单分层复合梁振动测试后,不改变被测复合梁边界状态,在第二分层区进行局部加热,待胶体软化后,使用尖头刀片,在预分层区域穿透并将其扩展到指定的长度,形成贯穿式的分层. 最后,当胶体重新冷却,不重叠分层复合梁即置备完成.

2) 不重叠多分层复合梁的固有频率测试. 不重叠多分层预制完成后,重复 3.1 节所使用测试方法,对不重叠分层复合梁进行振动测试,获得不重叠分层复合梁的前 5 阶固有频率.

3.4 分层损伤对复合梁固有频率的影响规律

获得被测复合梁在上述情况下的固有频率后,对数据进行整理和分析,将其测试频率和计算频率同时列入表 1 中. 为方便验证,将各情况下测试频率和计算频率的误差值一并列入表 1.

通过表 1 结果可以看出,随着分层数量增加,

其固有频率逐渐降低,同时,基于子结构分析法所获得固有频率的计算结果与试验结果的误差在 1.06% ~5.49% 之间,处于误差允许范围内,验证了理论计算方法的正确性,从而可以证明,利用本文所提出计算方法可以较好地实现复合梁在不重叠多层情况下固有频率的分析与预测. 为了便于观察分层对固有频率的影响,将所得固有频率的结果列入图 5 中,可以看出,分层对被测复合梁前 3 阶的固有频率影响较小,但随着阶次的继续升高,当分层数量增加时,固有频率出现了明显的降低.

表 1 计算和试验获得的固有频率及误差  
Table 1 Natural frequencies and the errors obtained by the calculations and the experiments

相关指标		模态阶次				
		1	2	3	4	5
未 分 层	测试频率 A/Hz	40.2	261.3	714.8	1391.0	2 277.3
	计算频率 B /Hz	40.9	256.2	727.3	1405.7	2 323.4
	$\frac{ B-A }{A}$ %	1.74	1.95	1.75	1.06	2.02
单 分 层	测试频率 A /Hz	39.4	260.5	710.5	1316.4	2 205.5
	计算频率 B /Hz	40.1	250.7	722.9	1357.6	2 250.3
	$\frac{ B-A }{A}$ %	1.78	3.76	1.75	3.13	2.03
不 重 叠 多 分 层	测试频率 A /Hz	38.9	258.5	704.4	1239.1	2 178.9
	计算频率 B /Hz	39.5	244.3	715.8	1293.7	2 233.2
	$\frac{ B-A }{A}$ %	1.54	5.49	1.62	4.41	2.49

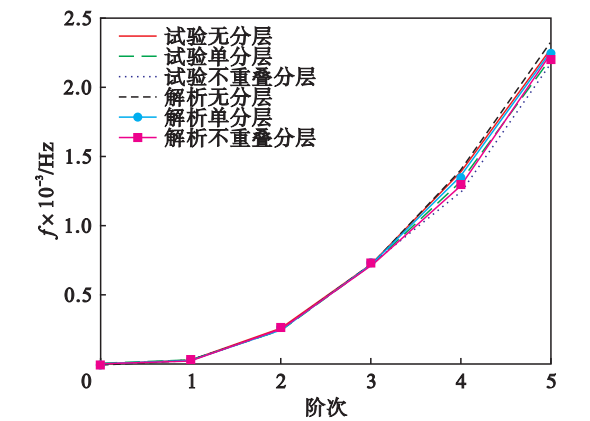


图 5 理论分析与实验测试获得的各阶固有频率  
Fig. 5 Natural frequencies obtained by the experiments and analysis

4 结 语

本文采用理论与实验相结合的方式,对不重叠多层复合梁的固有频率进行了计算及验证. 结果表明,计算频率与实验频率间误差在 1.06% ~5.49% 之间,验证了所提模型的正确性. 同时还可以看出,随着分层数量的增加,其固有频率逐渐降低,并且分层对被测复合梁前 3 阶固有频率的影响较小,但随着阶次的继续升高,当分层数量增加时,固有频率明显降低.

参考文献：

[ 1 ] Zou Y, Tong L, Steven G B. Vibration-based model-dependent damage ( delamination ) identification and health monitoring for composite structures—a review[ J ]. *Journal of Sound & Vibration*,2000,230( 2 ):357–378.

[ 2 ] Wang J T S, Liu Y Y, Gibby J A. Vibration of split beams [ J ]. *Journal of Sound & Vibration*,1982,84( 4 ):491–502.

[ 3 ] Mujumdar P M, Suryanarayan S. Flexural vibrations of beams with delaminations[ J ]. *Journal of Sound & Vibration*, 1988, 125( 3 ):441–461.

[ 4 ] Shen M H H, Grady J E. Free vibrations of delaminated beams[ J ]. *AIAA Journal*, 1992,30( 5 ):1361–1370.

[ 5 ] Luo H, Hanagud S. Dynamics of delaminated beams [ J ]. *International Journal of Solids & Structures*,2000,37( 10 ): 1501–1519.

[ 6 ] Chakraborty A, Mahapatra D R, Gopalakrishnan S. Finite element analysis of free vibration and wave propagation in asymmetric composite beams with structural discontinuities [ J ]. *Composite Structures*,2002,55( 1 ):23–36.

[ 7 ] Della C, Shu D W, Zhao Y P. Vibration of composite beams with two overlapping delaminations [ J ]. *Acta Mechanica Sinica*,2005,21( 1 ):47–55.

[ 8 ] Kargarnovin M H, Ahmadian M T, Jafari-Talookolaei R A. Analytical solution for the dynamic analysis of a delaminated composite beam traversed by a moving constant force[ J ]. *Journal of Vibration & Control*,2012,19( 10 ):1524–1537.

[ 9 ] 庄小燕,陈浩然. 基于频率和阻尼分析的含分层损伤复合材料层合板的损伤诊断[ J ]. *复合材料学报*,2005,22( 6 ): 150–155.

( Zhuang Xiao-yan, Chen Hao-ran. Delamination detection by using frequency and damping analysis in conjunction with neural networks [ J ]. *Acta Materiae Compositae Sinica*, 2005,22( 6 ):150–155. )

[ 10 ] 吉桂秀,李娇颜,陈浩然. 多层对复合材料层合板自振特性的影响[ J ]. *复合材料学报*,2007,24( 4 ):161–165.

( Ji Gui-xiu, Li Jiao-yan, Chen Hao-ran. Effect of multiple delaminations on free vibration characteristic for composite laminates [ J ]. *Acta Materiae Compositae Sinica*, 2007,24 ( 4 ):161–165. )