

# 基于减缩模型的硬涂层-失谐整体叶盘动力学分析

高峰<sup>1,2</sup>, 孙伟<sup>1,2</sup>, 范云飞<sup>1,2</sup>  
(1. 东北大学 机械工程与自动化学院, 辽宁 沈阳 110819;  
2. 东北大学 航空动力装备振动及控制教育部重点实验室, 辽宁 沈阳 110819)

**摘 要:** 提出一种对叶片涂敷硬涂层的阻尼减振方法,并以涂敷 NiCoCrAlY + YSZ 硬涂层的失谐整体叶盘为例进行有效性研究. 首先,利用改进的固定界面子结构模态综合法对涂敷硬涂层的失谐整体叶盘的有限元模型进行减缩,并求解其振动特性. 其次,研究了硬涂层对失谐整体叶盘振动特性的影响. 最后,重点分析了硬涂层厚度对失谐整体叶盘阻尼性能的影响. 结果表明,硬涂层对固有频率的影响微弱,但有较强的阻尼效应,能够显著抑制失谐整体叶盘的共振响应.

**关 键 词:** 失谐整体叶盘;硬涂层;减缩建模;涂层厚度;阻尼能力

**中图分类号:** TJ 650.3; TB 535      **文献标志码:** A      **文章编号:** 1005-3026(2018)11-1624-06

## Dynamic Analysis of the Hard-Coating Mistuned Blisk Using ROM

GAO Feng<sup>1,2</sup>, SUN Wei<sup>1,2</sup>, FAN Yun-fei<sup>1,2</sup>  
(1. School of Mechanical Engineering & Automation, Northeastern University, Shenyang 110819, China; 2. Key Laboratory of Ministry of Education on Vibration and Its Control of Aerospace Power Equipment, Northeastern University, Shenyang 110819, China. Corresponding author: SUN Wei, E-mail: weisun@mail.neu.edu.cn)

**Abstract:** A damping vibration reduction method with depositing hard coating on blades was proposed, and a mistuned blisk with NiCoCrAlY + YSZ hard coating deposited was taken as example for numerical calculation. Firstly, the reduced-order model (ROM) of the hard-coating mistuned blisk was established by the improved fixed interface component modal synthesis method (Fixed-ICMSM), then the vibration characteristics were calculated. Subsequently, the influences of hard coating were studied toward vibration characteristics of the mistuned blisk. Next, the influence of the coating thickness was studied particularly toward damping capacity of mistuned blisk. The results revealed that the NiCoCrAlY + YSZ hard coating has little effect on natural frequencies and good effect on damping. Also, the resonant response of the mistuned blisk can be suppressed remarkably, by the hard coating.

**Key words:** mistuned blisk; hard coating; reduced-order model (ROM); coating thickness; damping capacity

整体叶盘容易发生共振和局部振动超标,威胁飞行安全. 统计表明,振动故障占发动机故障的60%,叶片故障又占振动故障的70%<sup>[1]</sup>. 所以,整体叶盘的减振具有较大的意义.

对于一体化的整体叶盘,传统的磨擦阻尼器减振很难实验,结构优化减振则计算量大. 硬涂层耐高温、耐摩擦和耐腐蚀<sup>[2-5]</sup>,还能够提高阻尼能

力<sup>[6-8]</sup>. Yen 等<sup>[9]</sup>利用磁力涂层来提高涡轮机叶片的阻尼特性, Giuliano 等<sup>[10]</sup>研究了在单晶 PWA1484 超耐热合金上沉积镍钨铝粉强化的 Pt 薄膜.

本文对叶片涂敷硬涂层来实现失谐整体叶盘的振动控制. 首先,建立了涂敷硬涂层的失谐整体叶盘(复合结构)有限元减缩模型,并进行振动分

析;最后,以涂敷 NiCoCrAlY + YSZ 硬涂层的整体叶盘为例进行研究.此外,研究了硬涂层对失谐整体叶盘固有频率、损耗因子与频响函数的影响,硬涂层厚度对阻尼能力的影响.

## 1 理论分析

### 1.1 传统 Fixed－ICMSM 有限元减缩模型

轮盘和涂层叶片子结构的刚度矩阵  $\boldsymbol{K}^r$ ,质量矩阵  $\boldsymbol{M}^r$  与响应  $\boldsymbol{X}^r$  表示为

$$\boldsymbol{K}^r = \begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{ii}^r & \boldsymbol{K}_{ij}^r \\ \boldsymbol{K}_{ij}^{r\text{T}} & \boldsymbol{K}_{jj}^r \end{bmatrix}, \boldsymbol{M}^r = \begin{bmatrix} \boldsymbol{M}_{ii}^r & \boldsymbol{M}_{ij}^r \\ \boldsymbol{M}_{ij}^{r\text{T}} & \boldsymbol{M}_{jj}^r \end{bmatrix}; \quad (1)$$

$$\boldsymbol{X}^r = [\boldsymbol{X}_i^r \quad \boldsymbol{X}_j^r]^\text{T}. \quad (2)$$

式中: $r=b$  或  $d$ ,  $b$  和  $d$  分别为涂层叶片和轮盘结构,  $i$  和  $j$  分别代表内部与界面节点.

$$\boldsymbol{M}^r \ddot{\boldsymbol{X}}^r + \boldsymbol{K}^r \boldsymbol{X}^r = \boldsymbol{f}^r. \quad (3)$$

式中,  $\boldsymbol{f}^r$  表示子结构的界面力.

由特征方程得特征值  $\boldsymbol{\Lambda}_r$  与振型  $\boldsymbol{\varphi}_r$ :

$$(\boldsymbol{K}_{ii}^r - \lambda_r \boldsymbol{M}_{ii}^r) \boldsymbol{\varphi}_r = \mathbf{0}. \quad (4)$$

由截断得低阶  $\boldsymbol{\Lambda}_{rL}$  与界面主模态  $\boldsymbol{\Phi}_{rL}$ :

$$\boldsymbol{\Lambda}_{rL} = \text{diag}(\lambda_{r1}, \lambda_{r2}, \cdots, \lambda_{rm}), \quad (5)$$

$$\boldsymbol{\Phi}_{rL} = (\boldsymbol{\varphi}_{r1}, \boldsymbol{\varphi}_{r2}, \cdots, \boldsymbol{\varphi}_{rm}). \quad (6)$$

式中,  $m$  表示所选择的模态数目.

其次,子结构满足如下静力学条件,即

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{ii}^r & \boldsymbol{K}_{ij}^r \\ \boldsymbol{K}_{ij}^{r\text{T}} & \boldsymbol{K}_{jj}^r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\psi}_r \\ \boldsymbol{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{R}_j \end{bmatrix}. \quad (7)$$

式中,  $\boldsymbol{R}_j$  表示引起单位位移的反作用力.

求解得约束模态矩阵  $\boldsymbol{\psi}_r$ , 即

$$\boldsymbol{\psi}_r = -(\boldsymbol{K}_{ii}^r)^{-1} \boldsymbol{K}_{ij}^r. \quad (8)$$

### 1.2 改进的 Fixed－ICMSM 有限元减缩模型

将  $\boldsymbol{K}^r, \boldsymbol{M}^r, \boldsymbol{X}^r$  与  $\boldsymbol{f}^r$  分别用  $\boldsymbol{K}, \boldsymbol{M}, \boldsymbol{X}$  和  $\boldsymbol{f}$  表示,将低阶特征值矩阵  $\boldsymbol{\Lambda}_{rL}$ 、主模态  $\boldsymbol{\Phi}_{rL}$  与约束模态  $\boldsymbol{\psi}_r$  分别用  $\boldsymbol{\Lambda}_L, \boldsymbol{\Phi}_L$  与  $\boldsymbol{\psi}$  表示.通过傅里叶变换,可得任一无阻尼子结构的频域动力学方程为

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{X} - \lambda\boldsymbol{M}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{f}. \quad (9)$$

由于内部节点的作用力为零,式(9)表示为

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{ii} & \boldsymbol{K}_{ij} \\ \boldsymbol{K}_{ij}^\text{T} & \boldsymbol{K}_{jj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_i \\ \boldsymbol{X}_j \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} \boldsymbol{M}_{ii} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{M}_{jj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_i \\ \boldsymbol{X}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{f}_j \end{bmatrix}. \quad (10)$$

由式(10)可知,内部节点的特征值方程为

$$\left. \begin{aligned} (\boldsymbol{K}_{ii} - \lambda\boldsymbol{M}_{ii}) \boldsymbol{\Phi}_{ii} &= \mathbf{0}, \\ \boldsymbol{\Phi}_{ii} &= (\boldsymbol{\Phi}_L \quad \boldsymbol{\Phi}_H). \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

其固有频率和模态振型满足正交性,即

$$\left. \begin{aligned} \boldsymbol{\Phi}_L^\text{T} \boldsymbol{K}_{ii} \boldsymbol{\Phi}_L &= \boldsymbol{\Lambda}_L, \boldsymbol{\Phi}_H^\text{T} \boldsymbol{K}_{ii} \boldsymbol{\Phi}_H = \boldsymbol{\Lambda}_H, \\ \boldsymbol{\Phi}_L^\text{T} \boldsymbol{M}_{ii} \boldsymbol{\Phi}_L &= \boldsymbol{I}_L, \boldsymbol{\Phi}_H^\text{T} \boldsymbol{M}_{ii} \boldsymbol{\Phi}_H = \boldsymbol{I}_H. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

式中:  $\boldsymbol{\Phi}_L$  和  $\boldsymbol{\Phi}_H$  分别表示低、高阶振型;  $\boldsymbol{\Lambda}_L$  和  $\boldsymbol{\Lambda}_H$  分别表示低、高阶特征值;  $\boldsymbol{I}_L$  和  $\boldsymbol{I}_H$  表示单位矩阵,维度分别与低、高阶模态数目相等.

由式(10)第一行矩阵可得

$$\boldsymbol{X}_i = -(\boldsymbol{K}_{ii} - \lambda\boldsymbol{M}_{ii})^{-1} \boldsymbol{K}_{ij} \boldsymbol{X}_j. \quad (13)$$

将式(13)中的  $(\boldsymbol{K}_{ii} - \lambda\boldsymbol{M}_{ii})^{-1}$  变换成关于特征值  $\lambda$  的幂级数展开式并整理,则式(13)表示为

$$\boldsymbol{X}_i = -\boldsymbol{K}_{ii}^{-1} \boldsymbol{K}_{ij} \boldsymbol{X}_j - \lambda(\boldsymbol{K}_{ii} - \lambda\boldsymbol{M}_{ii})^{-1} \boldsymbol{M}_{ii} \boldsymbol{K}_{ii}^{-1} \boldsymbol{K}_{ij} \boldsymbol{X}_j. \quad (14)$$

将式(8)与式(12)代入式(14)可得

$$\boldsymbol{X}_i = \boldsymbol{\psi} \boldsymbol{X}_j + \boldsymbol{\Phi}_L \boldsymbol{q}_L + \boldsymbol{\Phi}_H \boldsymbol{q}_H. \quad (15)$$

$$\left. \begin{aligned} \boldsymbol{q}_L &= \lambda(\boldsymbol{\Lambda}_L - \lambda\boldsymbol{I}_L)^{-1} \boldsymbol{\Phi}_L^\text{T} \boldsymbol{M}_{ii} \boldsymbol{\psi} \boldsymbol{X}_j, \\ \boldsymbol{q}_H &= \lambda(\boldsymbol{\Lambda}_H - \lambda\boldsymbol{I}_H)^{-1} \boldsymbol{\Phi}_H^\text{T} \boldsymbol{M}_{ii} \boldsymbol{\psi} \boldsymbol{X}_j. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

将  $(\boldsymbol{\Lambda}_H - \lambda\boldsymbol{I}_H)^{-1}$  变换成关于  $\lambda$  的幂级数:

$$(\boldsymbol{\Lambda}_H - \lambda\boldsymbol{I}_H)^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{k-1} \boldsymbol{\Lambda}_H^{-k}. \quad (17)$$

则式(15)中的高阶模态可表示为

$$\boldsymbol{\Phi}_H \boldsymbol{q}_H = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k \boldsymbol{\Phi}_H \boldsymbol{\Lambda}_H^{-k} \boldsymbol{\Phi}_H^\text{T} \boldsymbol{M}_{ii} \boldsymbol{\psi} \boldsymbol{X}_j. \quad (18)$$

由式(12)的第一个矩阵方程变换可得

$$\boldsymbol{\Phi}_H \boldsymbol{\Lambda}_H^{-1} \boldsymbol{\Phi}_H^\text{T} = \boldsymbol{K}_{ii}^{-1} - \boldsymbol{\Phi}_L \boldsymbol{\Lambda}_L^{-1} \boldsymbol{\Phi}_L^\text{T} = \boldsymbol{\Psi}_H. \quad (19)$$

将式(19)代入式(18)中,整理可得

$$\boldsymbol{\Phi}_H \boldsymbol{\Lambda}_H^{-k} \boldsymbol{\Phi}_H^\text{T} = (\boldsymbol{\Psi}_H \boldsymbol{M}_{ii})^{k-1} \boldsymbol{\Psi}_H. \quad (20)$$

将式(18)~式(20)代入式(15),保留前  $n$  项:

$$\boldsymbol{X}_i = \boldsymbol{\psi} \boldsymbol{X}_j + \boldsymbol{\Phi}_L \boldsymbol{q}_L + \tilde{\boldsymbol{\Psi}}_{mH} \tilde{\boldsymbol{X}}_{mj}, \quad (21)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\Psi}}_{mH} = [\boldsymbol{\Psi}_H \quad \boldsymbol{\Psi}_{2H} \quad \cdots \quad \boldsymbol{\Psi}_{mH}] \boldsymbol{M}_{ii} \boldsymbol{\psi}, \quad (22)$$

$$\tilde{\boldsymbol{X}}_{mj} = (\lambda \quad \lambda^2 \quad \cdots \quad \lambda^m) \boldsymbol{X}_j. \quad (23)$$

利用低阶振型  $\boldsymbol{\Phi}_L$  和高阶振型  $\boldsymbol{\Phi}_H$  之间的正交性,将式(19)代入式(22)并整理可得

$$\boldsymbol{\Psi}_{2H} = \boldsymbol{K}_{ii}^{-1} \boldsymbol{M}_{ii} \boldsymbol{\Psi}_H, \quad (24)$$

$$\boldsymbol{\Psi}_{mH} = (\boldsymbol{K}_{ii}^{-1} \boldsymbol{M}_{ii})^{m-1} \boldsymbol{\Psi}_H. \quad (25)$$

则子结构的完整的高阶模态  $\boldsymbol{\Phi}_H$  可以表示为

$$\boldsymbol{\Phi}_H = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{K}_{ii}^{-1} \boldsymbol{M}_{ii} \\ \cdots \\ (\boldsymbol{K}_{ii}^{-1} \boldsymbol{M}_{ii})^{m-1} \\ \cdots \\ (\boldsymbol{K}_{ii}^{-1} \boldsymbol{M}_{ii})^k \end{bmatrix}^\text{T} \begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{ii}^{-1} - \boldsymbol{\Phi}_L \boldsymbol{\Lambda}_L^{-1} \boldsymbol{\Phi}_L^\text{T} \\ \boldsymbol{M}_{ii} \boldsymbol{\psi} \end{bmatrix}. \quad (26)$$

由式(10)与式(15)综合可得

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_i \\ \boldsymbol{X}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\psi} \\ \boldsymbol{I} \end{bmatrix} \boldsymbol{X}_j + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_L \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \boldsymbol{q}_L + \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\Psi}}_{mH} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{X}}_{mj}. \quad (27)$$

由式(25)可知,  $\boldsymbol{\Psi}_H, \boldsymbol{\Psi}_{2H}, \cdots, \boldsymbol{\Psi}_{mH}$  是线性相

关的. 因此, 将式(27)变换为矩阵形式, 即

$$X = \begin{bmatrix} \Phi_L & \psi & \tilde{\Psi}_{mH} \\ 0 & I & 0 \end{bmatrix} [q_L \quad X_j \quad X_{mj}]^T. \quad (28)$$

将式(28)代入式(27), 整理可得

$$\begin{bmatrix} 0 \\ f_j \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_L & 0 & 0 \\ 0 & M_{jj} + K_{ij}^T \psi & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\Psi}_{mH}^T M_{ii} \tilde{\Psi}_{mH} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_L \\ X_j \\ \tilde{X}_{mj} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} I_L & \Phi_L^T M_{ii} \psi & 0 \\ (M_{ii} \psi)^T \Phi_L & M_{jj} - K_{ij}^T K_{ii}^{-1} (M_{ii} \psi)^T & (M_{ii} \psi)^T \tilde{\Psi}_{mH} \\ 0 & \tilde{\Psi}_{mH}^T M_{ii} \psi & \tilde{\Psi}_{mH}^T M_{ii} \tilde{\Psi}_{mH} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_L \\ X_j \\ \tilde{X}_{mj} \end{bmatrix}. \quad (29)$$

将式(29)整理类推可得

$$\lambda^m q_L = \sum_{k=1}^m (\Lambda_L^m q_L - \lambda^m \Lambda_L^{m-k} \Phi_L^T M_{ii} \psi X_j), \quad (30)$$

$$\tilde{\Psi}_{mH}^T K_{ii} \tilde{\Psi}_{mH} \tilde{X}_{mj} - \lambda \tilde{\Psi}_{mH}^T M_{ii} (\psi X_j + \tilde{\Psi}_{mH} \tilde{X}_{mj}) = 0. \quad (31)$$

考虑到

$$\left. \begin{aligned} \Psi_{aH} K_{ii} \Psi_{bH} &= \Psi_{(a+b-1)H}, \\ \Psi_{aH} M_{ii} \Psi_{bH} &= \Psi_{(a+b)H}. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

将式(32)代入式(31)展开, 整理可得

$$\left. \begin{aligned} X_{(m+1)j} &= 0, m \geq 2; \\ X_{kj} &= 0, k > m. \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

两个子结构分别用右上标  $\alpha$  和  $\beta$  表示. 仅考虑低阶模态的影响时, 双重模态协调条件表示为

$$X_j^\alpha = X_j^\beta, f_j^\alpha = -f_j^\beta. \quad (34)$$

考虑低阶与高阶模态影响, 对式(34)增广,

$$\left. \begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} S_1 & S_2 & S_3 & \cdots & S_{m-1} & S_m \\ R_0 + S_0 & S_1 & S_1 & \cdots & S_{m-2} & S_{m-1} \\ R_1 & R_0 + S_0 & S_1 & \cdots & S_{m-3} & S_{m-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ R_{m-3} & R_{m-4} & R_{m-5} & \cdots & S_1 & S_2 \\ R_{m-2} & R_{m-3} & R_{m-4} & \cdots & R_0 + S_0 & S_1 \end{bmatrix}, \\ \tilde{B} &= - \begin{bmatrix} S_0 & K_{ij}^{\alpha T} \Phi_L^\alpha & K_{ij}^{\beta T} \Phi_L^\beta \\ 0 & K_{ij}^{\alpha T} \Phi_L^\alpha \Lambda_L^\alpha & K_{ij}^{\beta T} \Phi_L^\beta \Lambda_L^\beta \\ 0 & K_{ij}^{\alpha T} \Phi_L^\alpha (\Lambda_L^\alpha)^2 & K_{ij}^{\beta T} \Phi_L^\beta (\Lambda_L^\beta)^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & K_{ij}^{\alpha T} \Phi_L^\alpha (\Lambda_L^\alpha)^{m-1} & K_{ij}^{\beta T} \Phi_L^\beta (\Lambda_L^\beta)^{m-1} \\ 0 & K_{ij}^{\alpha T} \Phi_L^\alpha (\Lambda_L^\alpha)^m & K_{ij}^{\beta T} \Phi_L^\beta (\Lambda_L^\beta)^m \end{bmatrix}, \\ \tilde{q} &= [X_j^\alpha \quad q_L^\alpha \quad q_L^\beta]^T. \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

高阶模态在广义坐标下的影响可以表示为

$$\Phi_H^\alpha q_H^\alpha = \tilde{\Psi}_{mH}^\alpha A^{-1} \tilde{B} \tilde{q}. \quad (44)$$

可得

$$\lambda^m X_j^\alpha = \lambda^m X_j^\beta, \lambda^m f_j^\alpha = -\lambda^m f_j^\beta. \quad (35)$$

将式(34)代入式(10), 整理可得

$$K_{ij}^{\alpha T} X_j^\alpha + K_{ij}^{\beta T} X_j^\beta + (K_{ij}^\alpha + K_{ij}^\beta) X_j^\alpha - \lambda (M_{jj}^\alpha + M_{jj}^\beta) X_j^\alpha = 0. \quad (36)$$

将式(21)、式(34)和式(35)代入式(36)得

$$\left. \begin{aligned} S_1 X_{1j}^\alpha + \sum_{k=2}^m S_m X_{1j}^\alpha &= - (S_0 X_j^\alpha + K_{ij}^{\alpha T} \Phi_L^\alpha q_L^\alpha + K_{ij}^{\beta T} \Phi_L^\beta q_L^\beta). \\ S_0 &= - [K_{ij}^{\alpha T} (K_{ii}^\alpha)^{-1} K_{ij}^\alpha + K_{ij}^{\beta T} (K_{ii}^\beta)^{-1} K_{ij}^\beta] + K_{ii}^\alpha + K_{ii}^\beta, \\ S_1 &= - (M_{jj}^\alpha + M_{jj}^\beta) + K_{ij}^{\alpha T} \Psi_H^\alpha M_{ii}^\alpha \psi^\alpha + K_{ij}^{\beta T} \Psi_H^\beta M_{ii}^\beta \psi^\beta, \\ S_k &= K_{ij}^{\alpha T} \Psi_{kH}^\alpha M_{ii}^\alpha \psi^\alpha + K_{ij}^{\beta T} \Psi_{kH}^\beta M_{ii}^\beta \psi^\beta. \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

式(37)两端乘  $\lambda^y, y = 1, 2, \dots, m-1$ , 得

$$\sum_{k=0}^m S_k X_{(y+k)j}^\alpha = -\lambda^y (K_{ij}^{\alpha T} \Phi_L^\alpha q_L^\alpha + K_{ij}^{\beta T} \Phi_L^\beta q_L^\beta). \quad (39)$$

将式(30)和式(33)代入式(39), 可得

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^y R_{y-k} X_{kj}^\alpha + \sum_{k=0}^{m-y} S_k X_{(y+k)j}^\alpha &= - [K_{ij}^{\alpha T} \Phi_L^\alpha (\Lambda_L^\alpha)^y q_L^\alpha + K_{ij}^{\beta T} \Phi_L^\beta (\Lambda_L^\beta)^y q_L^\beta]. \\ R_k &= - K_{ij}^{\alpha T} \Phi_L^\alpha (\Lambda_L^\alpha)^k \Phi_L^{\alpha T} M_{ii}^\alpha \psi^\alpha \\ &\quad - K_{ij}^{\beta T} \Phi_L^\beta (\Lambda_L^\beta)^k \Phi_L^{\beta T} M_{ii}^\beta \psi^\beta, \\ k &= 0, 1, 2, \dots, m-2. \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

将式(37)和式(40)联立可得

$$A \tilde{X}_{mj}^\alpha = \tilde{B} \tilde{q}. \quad (42)$$

通过式(44)即可消除高阶模态内部线性相关性. 分别将子结构  $\alpha$  与  $\beta$  变换为广义坐标形式,

即

$$\boldsymbol{X}^e = \boldsymbol{Z}^e \tilde{\boldsymbol{q}}. \tag{45}$$

式中： $\boldsymbol{e} = \alpha$  或  $\beta$ ； $\boldsymbol{Z}^e$  表示坐标变换矩阵，且有

$$\boldsymbol{Z}^e = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_L^e & \boldsymbol{\psi} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} + \tilde{\boldsymbol{\Psi}}_{mH}^e \boldsymbol{A}^{-1} \tilde{\boldsymbol{B}}. \tag{46}$$

利用式(46)对式(9)进行坐标变换，可得

$$(\boldsymbol{Z}^{eT} \boldsymbol{K}^e \boldsymbol{Z}^e - \lambda \boldsymbol{Z}^{eT} \boldsymbol{M}^e \boldsymbol{Z}^e) \tilde{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{Z}^{eT} \boldsymbol{f}^e. \tag{47}$$

将子结构  $\alpha$  与子结构  $\beta$  进行组装，可得

$$(\tilde{\boldsymbol{K}}_{cs} - \lambda \tilde{\boldsymbol{M}}_{cs}) \tilde{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{0}. \tag{48}$$

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{K}}_{cs} &= (\boldsymbol{Z}^\alpha)^{-1} \boldsymbol{K}^\alpha + (\boldsymbol{Z}^\beta)^{-1} \boldsymbol{K}^\beta, \\ \tilde{\boldsymbol{M}}_{cs} &= (\boldsymbol{Z}^\alpha)^{-1} \boldsymbol{M}^\alpha + (\boldsymbol{Z}^\beta)^{-1} \boldsymbol{M}^\beta. \end{aligned} \right\} \tag{49}$$

1.3 复合结构的振动特性

根据模态应变能法<sup>[11]</sup>，复合结构在第  $v$  阶的模态损耗因子  $\eta_{csv}$  可以表示为

$$\eta_{csv} = \frac{\text{MSE}_{csv} \times \eta_{cv} + (\text{MSE}_{cv} - \text{MSE}_{csv}) \times \eta_{bd}}{\text{MSE}_{cv}}. \tag{50}$$

式中： $\eta_c$  与  $\eta_{bd}$  分别表示硬涂层与整体叶盘材料损耗因子； $\text{MSE}_{cv}$  和  $\text{MSE}_{csv}$  分别表示硬涂层的模态应变能与复合结构总模态应变能。依据比例阻尼，可复合结构阻尼  $\tilde{\boldsymbol{C}}_{cs}$ ，即

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{C}}_{cs} &= \delta \tilde{\boldsymbol{M}}_{cs} + \xi \tilde{\boldsymbol{K}}_{cs}, \\ \delta + \xi \omega_{csv}^2 &= \eta_{csv} \omega_{csv}. \end{aligned} \right\} \tag{51}$$

式中， $\delta$  与  $\xi$  表示比例系数。进一步，可求得复合结构的频响函数：

$$H(\omega) = \sum_{v=1}^m \frac{\tilde{\boldsymbol{q}}_v \tilde{\boldsymbol{q}}_v^T}{\omega_{csv}^2 - \omega^2 + i\omega\eta_{csv}}. \tag{52}$$

式中： $\omega$  表示激励频率； $i$  表示虚数单位。

2 研究实例

图 1 为叶片涂敷 NiCoCrAlY + YSZ 硬涂层的失谐整体叶盘，叶片尺寸为 50 mm × 25 mm × 3 mm，硬涂层以 0.15 mm/层的厚度全涂敷在叶片两侧。表 1 为铝制整体叶盘与硬涂层的材料参数。

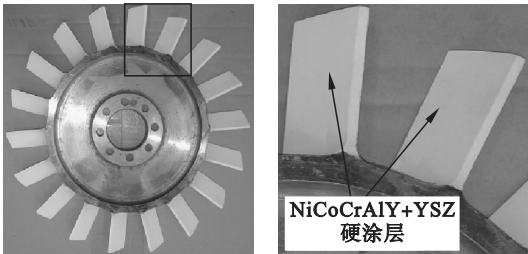


图 1 涂敷硬涂层的失谐整体叶盘实物  
Fig. 1 Hard-coating mistuned blisk

图 2 为理论与实验得到的固有频率。可以看到，两种途径的固有频率有所不同，但是偏差比较微小，而且变化规律非常相似。图 3 为理论与实验得到的模态损耗因子。可以看出，实验模态损耗因子普遍大于理论模态损耗因子，这是由于实验中外部干扰造成的，但是两者数值的变化趋势是相似的。

表 1 失谐整体叶盘与硬涂层的材料参数  
Table 1 Material parameters of the hard-coating mistuned blisk

名称	失谐整体叶盘	硬涂层
杨氏模量/GPa	70	54.494
密度/(kg·m <sup>-3</sup> )	2 700	5 600
泊松比	0.33	0.30
材料损耗因子	0.000 1	0.021 2

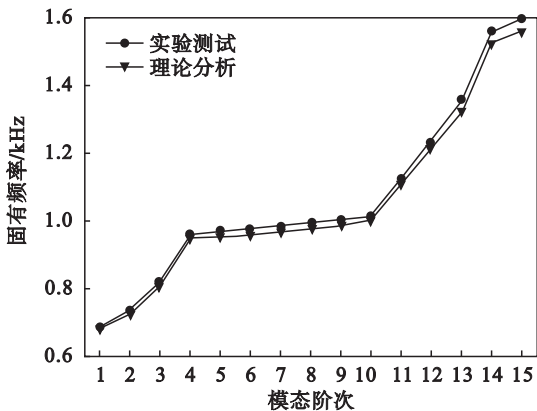


图 2 复合结构固有频率  
Fig. 2 Natural Frequencies of composite structure

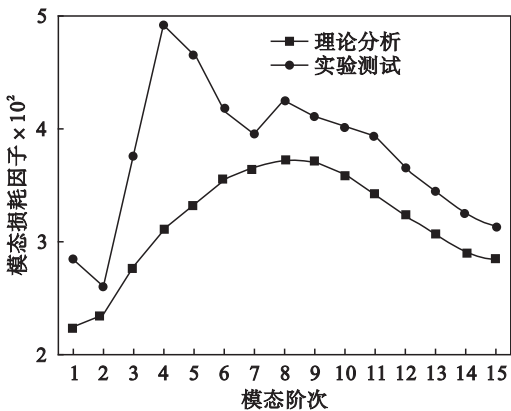


图 3 复合结构模态损耗因子  
Fig. 3 Modal loss factors of composite structure

图 4 为理论与实验得到的第 1, 3, 11 和 13 阶的模态阵型。浅色区域代表此处振幅比较小，接近于 0；深色区域代表此处具有很大的振幅。可以发现，理论分析与实验测试得到的区域分布是非常相似的，而且盘片耦合振动是整体叶盘振动的主导类型。

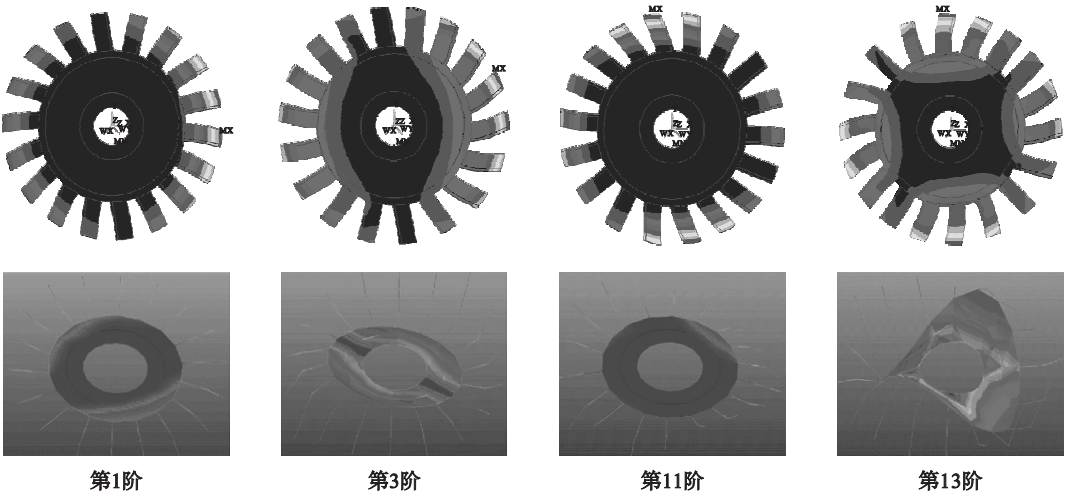


图 4 理论分析与实验测试得到的复合结构模态阵型  
Fig. 4 Mode shapes of composite structure obtained by analytical analysis and the experimental tests

3 硬涂层对失谐整体叶盘的影响

表 2 为整体叶盘在涂敷硬涂层前后获取的前 15 阶固有频率. 可以发现, 在实验测试中, 涂敷后的整体叶盘固有频率较涂敷前普遍变大, 但是这

表 2 涂敷硬涂层前后的失谐整体叶盘的固有频率  
Table 2 Natural frequencies of the mistuned blisk with and without hard coating

阶次	实验测试			理论分析		
	整体叶盘 Hz	复合结构 Hz	偏差 %	整体叶盘 Hz	复合结构 Hz	偏差 %
1	678. 65	689. 53	1. 58	671. 38	685. 26	1. 60
2	732. 54	734. 22	0. 23	712. 91	741. 87	1. 79
3	802. 57	819. 93	2. 12	795. 67	821. 52	1. 73
4	936. 64	960. 38	2. 47	933. 99	957. 68	1. 74
5	952. 39	969. 73	1. 79	936. 48	963. 04	1. 83
6	959. 83	976. 96	1. 75	940. 71	974. 04	1. 93
7	967. 66	982. 27	1. 49	946. 76	984. 01	2. 02
8	977. 31	993. 05	1. 59	955. 36	995. 06	2. 10
9	986. 1	999. 80	1. 37	965. 75	1 002. 59	2. 18
10	997. 65	1 012. 86	1. 50	978. 08	1 013. 72	2. 25
11	1 103. 9	1 123. 32	1. 73	1 090. 47	1 132. 18	1. 40
12	1 213. 41	1 233. 81	1. 65	1 189. 09	1 236. 92	2. 02
13	1 330. 19	1 356. 18	1. 92	1 297. 79	1 348. 74	1. 93
14	1 518. 41	1 557. 44	2. 51	1 496. 16	1 544. 55	1. 74
15	1 555. 52	1 594. 31	2. 43	1 530. 52	1 578. 77	1. 77

些变化量非常微小, 在 2. 5% 以内. 理论分析求解的固有频率也有相似的变化规律, 其变化量也在 2. 3% 以内. 这就说明硬涂层不会对固有频率产生过大影响.

图 5 为整体叶盘在涂敷硬涂层前后损耗因子. 可以看到, 涂敷硬涂层前后的模态损耗因子发生明显变化, 说明硬涂层可以有效提高整体叶盘的阻尼能力, 即 A 大于 C, B 大于 D. 此外, 由于实验中受到外部干扰, 所以实验模态损耗因子大于理论模态损耗因子, 即 A 大于 B, C 大于 D.

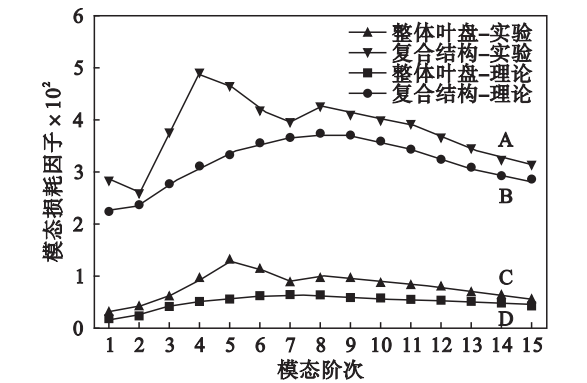


图 5 涂敷硬涂层前后的失谐整体叶盘的模态损耗因子  
Fig. 5 Modal loss factor of the mistuned blisk with and without depositing hard coating

图 6 为整体叶盘在叶片涂敷硬涂层前后频响函数. 可以看到, 整体叶盘在涂敷硬涂层后的函数幅值较涂敷前的函数幅值普遍减小, 这就说明整体叶盘的共振响应受到显著抑制, 而且这种抑制效果在高阶模态时尤其显著. 这与整体叶盘阻尼能力的变化趋势是相似的.



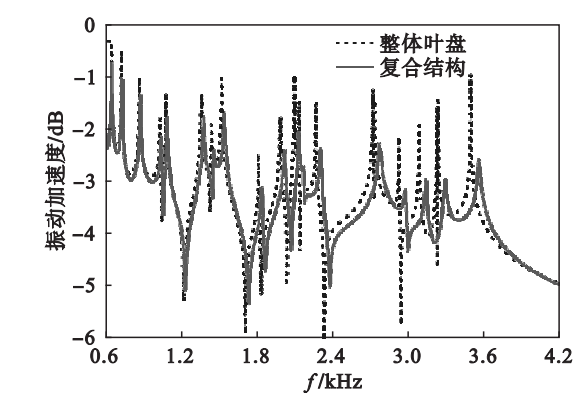


图 6 涂敷硬涂层前后的失谐整体叶盘的频响函数  
Fig. 6 Frequency response function of the mistuned blisk with and without depositing hard coating

## 4 结 论

NiCoCrAlY + YSZ 硬涂层能够明显提高失谐整体叶盘的阻尼能力,可以在固有频率不发生较大变化的前提下显著抑制失谐整体叶盘共振区的共振响应,并具有刚度可调节的显著优点.

### 参考文献：

[ 1 ] Klaue T, Kühhorn A, Beirow B, et al. Numerical investigations of localized vibrations of mistuned blade integrated disks ( blisks ) [ J ]. *Journal of Turbo-Machinery*, 2009, 131 ( 3 ) : 031002.

[ 2 ] Laxalde D, Thouverez F, Sinou J J, et al. Qualitative analysis of forced response of blisks with friction ring dampers [ J ]. *European Journal of Mechanics*, 2007, 26 ( 4 ) : 676 – 687.

[ 3 ] 单颖春, 朱梓根, 刘献栋. 凸肩结构对叶片的干摩擦振动控制研究—理论方法 [ J ]. *航空动力学报*, 2006, 21 ( 1 ) : 168 – 173.

( Shan Ying-chun, Zhu Zi-gen, Liu Xian-dong. Investigation of the vibration control by frictional constraints between blade shrouds—theoretical method [ J ]. *Journal of Aerospace Power*, 2006, 21 ( 1 ) : 168 – 173. )

[ 4 ] 余学冉, 陆山. 整体叶盘结构强度振动控制一体化设计方法 [ J ]. *航空动力学报*, 2013, 28 ( 10 ) : 2235 – 2239.  
( Yu Xue-ran, Lu Shan. Integrative design method of blisk considering structure strength and resonant vibration avoidance [ J ]. *Journal of Aerospace Power*, 2013, 28 ( 10 ) : 2235 – 2239. )

[ 5 ] Shao F, Yang K, Zhao H, et al. Effects of inorganic sealant and brief heat treatments on corrosion behavior of plasma sprayed Cr<sub>2</sub>O<sub>3</sub> – Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> composite ceramic coatings [ J ]. *Surface and Coatings Technology*, 2015, 276 : 8 – 15.

[ 6 ] Stathopoulos V, Sadykov V, Pavlova S, et al. Design of functionally graded multilayer thermal barrier coatings for gas turbine application [ J ]. *Surface and Coatings Technology*, 2016, 295 : 20 – 28.

[ 7 ] Filippi S, Torvik P J. A methodology for predicting the response of blades with nonlinear coatings [ J ]. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 2011, 133 ( 4 ) : 042503.

[ 8 ] Bruce R W, Schell J D. Process for depositing a coating on a blisk : 12/241,678 [ P ]. 2008 – 09 – 30.

[ 9 ] Yen H Y, Shen M H H. Passive vibration suppression of beams and blades using magneto-mechanical coating [ J ]. *Journal of Sound and Vibration*, 2001, 245 ( 4 ) : 701 – 714.

[ 10 ] Gregori G, Li L, Nychka J A, et al. Vibration damping of superalloys and thermal barrier coatings at high-temperatures [ J ]. *Materials Science and Engineering : A*, 2007, 466 ( 1 ) : 256 – 264.

[ 11 ] Lepoittevin G, Kress G. Optimization of segmented constrained layer damping with mathematical programming using strain energy analysis and modal data [ J ]. *Materials & Design*, 2010, 31 ( 1 ) : 14 – 24.