

悬臂纤维金属复合薄板固有特性分析及验证

许卓, 李晖, 薛鹏程, 闻邦椿
(东北大学 机械工程与自动化学院, 辽宁 沈阳 110819)

摘 要: 通过理论与实践相结合的方式,对悬臂边界下纤维金属复合薄板固有特性进行了分析与验证。针对所研究复合薄板的结构特点,基于复合材料力学和经典层合板理论进行建模,利用正交多项式法求解其固有特性并提出计算流程,搭建相应试验系统,以 TA2/TC500 纤维金属复合薄板为研究对象进行测试。结果表明,提出的计算方法所获得固有频率的结果与试验测试结果间的误差在 1.2% ~ 4.7% 之间,对应模态振型的变化规律也完全一致,验证了所提方法的正确性。

关 键 词: 纤维金属复合薄板;悬臂边界;正交多项式法;固有特性

中图分类号: TB 535 文献标志码: A 文章编号: 1005-3026(2018)12-1737-06

Natural Characteristics Analysis and Validation of Fiber Metal Laminates Thin Plates Under Cantilever Boundary

XU Zhuo, LI Hui, XUE Peng-cheng, WEN Bang-chun
(School of Mechanical Engineering & Automation, Northeastern University, Shenyang 110819, China.
Corresponding author: XU Zhuo, E-mail: 165647578@qq.com)

Abstract: The natural characteristics of fiber metal laminates (FMLs) thin plates under cantilever boundary were calculated and validated by combining theory with experiment. According to the structural characteristics of FMLs thin plates, theoretical modeling was carried out based on the mechanics of composite material and classical laminated plate theory. Then, the natural characteristics were solved by using the orthogonal polynomial method. Meanwhile, the calculation processes were proposed. A natural characteristic experiment system of FMLs thin plates was established and the natural characteristics of a TA2/TC500 FMLs thin plate were acquired. It is found that comparing the calculation results of the frequencies with the test ones, the errors are within the range of 1.2% and 4.7%, and the trends of modal shapes are consistent as well, thus the effectiveness of the above method is verified.

Key words: FMLs thin plate; cantilever boundary; orthogonal polynomial method; natural characteristics

纤维金属复合材料 (fiber metal laminates, FMLs) 是由纤维与金属层交替铺设而成的新型复合材料^[1],其结合了金属材料韧性好、抗冲击性强、损伤容限高以及复合材料高比强度和比刚度、耐腐蚀、抗疲劳等诸多优点,近年来在先进飞机的机翼、尾翼、舱门等得到了广泛使用^[2]。上述复合材料制成的梁、板、壳等结构件常会在恶劣环境中使用,容易产生振动超标、疲劳失效和磨损等问题。因此,研究 FMLs 薄壁构件振动特性有着重要工程和学术意义。

固有特性包括固有频率和模态振型,它们是深入研究结构系统振动特性的基础,其对于理论分析、动态设计、故障诊断都有着重要的指导作用。国外学者对 FML 薄板结构的固有特性进行了大量研究。Harras 等^[3]基于 Hamilton 原理,建立了全固支边界下 GLARE 3 薄板的理论模型,获得

了该边界条件下结构的固有频率和模态振型,并通过实验的方法进行了验证. Botelho 等^[4]通过实验对比分析了铝板、碳纤维/树脂基复合板以及玻璃纤维/铝合金层合板的阻尼特性,并将其弹性模量的测试结果与力学分析法的结果进行了对比验证. Shooshtari 等^[5]基于一阶剪切变形理论,通过加勒金法建立了纤维金属复合薄板的非线性常微分方程,对该结构的自由振动进行了分析,并求解其简支边界条件下无量纲的固有频率. Payeganeh 等^[6]对纤维金属复合板在低速冲击下的动力学特性进行了分析,发现铺层顺序、长宽比、冲击速度和质量等参数对纤维金属复合板的动力学特性具有明显的影响. Ghasemi 等^[7]采用 Ritz 法和 ABAQUS 有限元法获得了简支边界条件下纤维金属层合板的无量纲固有频率,并研究了几何参数和金属分布的不同层数对其振动参数的影响. Rahimi 等^[8]提出了一种基于状态空间微分求积法的纤维金属层合板的三维弹性分析理论,并计算了环状纤维金属复合薄板的无量纲频率,研究了不同边界、薄板厚度、纤维角方向等对其固有频率的影响. Mahi 等^[9]利用 Navier 法和 Hamilton 原理获得能量方程,通过 Ritz 法求解了不同边界下各种薄板的固有频率,但并未进行实验研究. Iriondo 等^[10]通过在强迫振动下的共振实验,对传统 FML 薄板和自增强聚丙烯 FML 薄板的阻尼特性进行了研究,并提取了上述材料的弹性模量. Sayyad 等^[11]利用三角剪切法和法向变形理论,基于虚功原理建立了简支边界条件下多叠层合板的动力学模型. 国内由于对纤维金属层和材料的研究起步较晚,大多数的研究都集中在静力学方面^[12-14],在动力学研究方面,李瑞等^[15]通过实验与 ABAQUS 有限元法对悬臂 C-Ti 的 FMLs 梁和板进行研究,分析了尺寸与不同金属层数对固有频率的影响规律,但未进行解析推导求解.

从目前文献来看,人们针对悬臂纤维金属复合薄板固有特性的研究还不是很充分,绝大多数文献并未进行试验验证. 因此有必要对其固有特性进行更加深入的研究. 本文针对悬臂 FMLs 薄板,考虑纤维铺设角度的影响,基于复合材料力学和经典层合板理论建立了理论模型,并利用了正交多项式法实现了悬臂状态下该类型结构固有特性的计算和求解. 最后搭建了 FMLs 薄板固有特性测试系统,以 TA2/TC500 纤维金属复合薄板为例,对其固有频率和模态振型进行了实际测试,有效验证了所建立模型的正确性.

1 悬臂 FMLs 薄板固有特性理论求解

1.1 理论模型

所研究 FMLs 薄板上下两层由相同金属构成,中间层由 n 层正交各向异性纤维增强材料对称铺设,理论模型如图 1 所示. 图 1 中,以中面为参考平面建立直角坐标系,令薄板长 a ,宽 b ,其位于 $yo z$ 所在平面的边被固定,金属层厚度 h_1 ,纤维层厚度 h_2 ,总厚度 $h = 2h_1 + h_2$,纤维层铺层数 n ,各铺层厚度为 h_2/n ,纤维纵向与 x 方向夹角 θ . 材料参数为金属弹性模量 E_1 ,金属泊松比 ν_1 ,纤维层中沿着纤维方向、垂直纤维方向和面内剪切杨氏模量分别为 E_{21} , E_{22} 和 G_{12} ,沿着纤维方向和垂直纤维方向泊松比分别为 ν_{12} 和 ν_{21} ,金属层和纤维层密度分别为 ρ_1 和 ρ_2 .

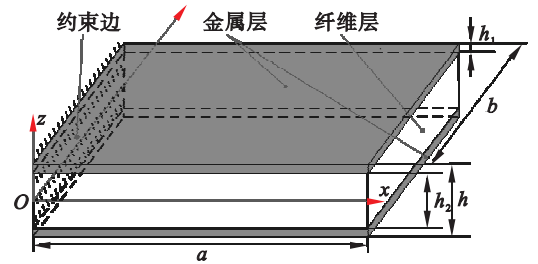


图 1 悬臂边界下纤维金属混杂薄板的理论模型
Fig. 1 Theoretical model of the FMLs thin plates under cantilever boundary

基于 Kirchhoff 假设和经典薄板理论,其沿着 x, y, z 方向的位移分量 u, v, w 可表示为

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0(x, y, t)}{\partial x}, \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0(x, y, t)}{\partial y}, \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t). \end{aligned} \quad (1)$$

式中: u_0, v_0, w_0 分别表示薄板的中面位移; t 表示时间.

薄板任意一点的应变可用位移表示为

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}, \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}, \\ \varepsilon_z &= \gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

式中: $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ 和 $\gamma_{yz}, \gamma_{xz}, \gamma_{xy}$ 分别代表 x, y 和 z 方向的线应变与剪应变.

所以,其应力-应变关系的表达式为

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}. \quad (3)$$

式中:对于金属层 $Q_{11} = Q_{22} = \frac{E_1}{1-\nu_1^2}$, $Q_{12} = Q_{21} =$

$$\frac{\nu_1 E_1}{1-\nu_1^2}, Q_{66} = \frac{E_1}{2(1+\nu_1)}; \text{对于纤维层 } Q_{11} = \frac{E_{21}}{1-\nu_{12}\nu_{21}}, Q_{12} = Q_{21} = \frac{\nu_{12}E_{22}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} = \frac{\nu_{21}E_{21}}{1-\nu_{12}\nu_{21}}, Q_{22} = \frac{E_{22}}{1-\nu_{12}\nu_{21}}, Q_{66} = G_{12}.$$

纤维层中,纤维方向与 x 轴夹角为 θ 时,利用转轴公式,获得第 k 层纤维板应力-应变关系式为

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}. \quad (4)$$

其中,

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= Q_{11} \cos^4 \theta_k + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta_k \cos^2 \theta_k + Q_{22} \sin^4 \theta_k, \\ \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 \theta_k \cos^2 \theta_k + Q_{12} (\sin^4 \theta_k + \cos^4 \theta_k), \\ \bar{Q}_{22} &= Q_{11} \sin^4 \theta_k + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta_k \cos^2 \theta_k + Q_{22} \cos^4 \theta_k, \\ \bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{22} - 2Q_{66}) \sin \theta_k \cos^3 \theta_k + (Q_{11} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin^3 \theta_k \cos \theta_k, \\ \bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{22} - 2Q_{66}) \sin^3 \theta_k \cos \theta_k + (Q_{11} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin \theta_k \cos^3 \theta_k, \\ \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^2 \theta_k \cos^2 \theta_k + Q_{66} (\sin^4 \theta_k + \cos^4 \theta_k). \end{aligned} \quad (5)$$

式中, θ_k 代表第 k 层纤维与 x 轴方向的夹角。

1.2 能量方程

模型的金属层的动能和应变能可分别表示为

$$\begin{aligned} E_{k1} &= \frac{1}{2} \int_A \int_{-h/2}^{h/2} \rho_1 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dz dA, \\ U_{s1} &= \frac{1}{2} \int_A \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_{xy} \gamma_{xy}) dz dA, \\ E_{k3} &= \frac{1}{2} \int_A \int_{-h/2}^{h/2} \rho_1 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dz dA, \\ U_{s3} &= \frac{1}{2} \int_A \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_{xy} \gamma_{xy}) dz dA. \end{aligned} \quad (6)$$

纤维层的动能和应变能可分别表示为

$$E_{k2} = \frac{1}{2} \int_A \int_{-h/2}^{h/2} \rho_2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dz dA,$$

$$U_{s2} = \frac{1}{2} \int_A \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_{xy} \gamma_{xy}) dz dA. \quad (7)$$

式中, A 代表薄板的面积. 将式(1)~(4)代入式(6)和式(7)相应式子中,可获得金属层和纤维层的动能和应变能通过中面位移 w_0 的表达式:

$$\begin{aligned} E_{k1} &= \frac{1}{2} \int_A \int_{-h/2}^{h/2} \rho_1 \left[z^2 \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial t} \right)^2 + z^2 \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial y \partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial t} \right)^2 \right] dz dA, \\ E_{k2} &= \frac{1}{2} \int_A \int_{-h/2}^{h/2} \rho_2 \left[z^2 \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial t} \right)^2 + z^2 \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial y \partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial t} \right)^2 \right] dz dA, \\ E_{k3} &= \frac{1}{2} \int_A \int_{-h/2}^{h/2} \rho_1 \left[z^2 \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial t} \right)^2 + z^2 \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial y \partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial t} \right)^2 \right] dz dA, \\ U_{s1} &= \frac{1}{2} \int_A \int_{-h/2}^{h/2} z^2 \left[Q_{11} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right)^2 + 2Q_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + Q_{22} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right)^2 + 4Q_{66} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dz dA, \\ U_{s2} &= \frac{1}{2} \int_A \int_{-h/2}^{h/2} z^2 \left[\bar{Q}_{11} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right)^2 + 2\bar{Q}_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + 4\bar{Q}_{16} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + \bar{Q}_{22} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right)^2 + 4\bar{Q}_{26} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + 4\bar{Q}_{66} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dz dA, \\ U_{s3} &= \frac{1}{2} \int_A \int_{-h/2}^{h/2} z^2 \left[Q_{11} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right)^2 + 2Q_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + Q_{22} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right)^2 + 4Q_{66} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dz dA. \end{aligned} \quad (8)$$

将各层动能和应变能相加可得总动能和应变能:

$$\begin{aligned} E_k &= E_{k1} + E_{k2} + E_{k3}, \\ U_s &= U_{s1} + U_{s2} + U_{s3}. \end{aligned} \quad (9)$$

1.3 正交多项式法求解

由于正交多项式法求解原理清晰、计算速度快、并可适用于多种边界下固有特性的求解,参考文献[14],利用该方法的中面位移表达式为

$$w_0 = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{mn} P_m(\xi) P_n(\eta) \sin \omega t. \quad (10)$$

式中: M 和 N 为求解时的截断系数; A_{mn} 为待定参数; ω 为固有角频率; $P_m(\xi)$ 和 $P_n(\eta)$ 为正交特征多项式. 其具体表达式为

$$\left. \begin{aligned} P_1(\xi) &= \varphi(\xi), P_1(\eta) = \varphi(\eta), \\ P_2(\xi) &= (\xi - B_2) P_1(\xi), \\ P_k(\xi) &= (\xi - B_k) P_{k-1}(\xi) - C_k P_{k-2}(\xi), \\ \xi &= \xi, \eta; k > 2. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

式中: B_k 和 C_k 为系数参数; $\varphi(\xi)$ 和 $\varphi(\eta)$ 为确定边界条件的多项式函数, 它们的表达式为

$$B_k = \frac{\int_0^1 W(\xi) [P_{k-1}(\xi)]^2 \xi d\xi}{\int_0^1 W(\xi) [P_{k-1}(\xi)]^2 d\xi},$$

$$C_k = \frac{\int_0^1 W(\xi) P_{k-1}(\xi) P_{k-2}(\xi) \xi d\xi}{\int_0^1 W(\xi) [P_{k-2}(\xi)]^2 d\xi}.$$

$$\varphi(\xi) = \xi^p (1 - \xi)^q, \varphi(\eta) = \eta^r (1 - \eta)^s,$$

$$\xi = x/a, \eta = y/b. \quad (12)$$

式中: $W(\xi)$ 为加权函数, 通常取 1; p, q, r, s 分别代表 $x=0, x=a, y=0, y=b$ 处边界状态参数, 根据本文中的模型, p, q, r, s 取值为 2, 0, 0, 0^[13].

将式(10)代入式(9), 令 $\cos\omega t = 1$ 和 $\sin\omega t = 1$, 可得到含有待定参数的 E_k^{\max} 和 U_s^{\max} 表达式:

$$E_k^{\max} = \frac{1}{2} \int_A \int_{h_2/2}^{h/2} \rho_1 \omega^2 \left\{ z^2 \left(\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{mn} \frac{dP_m}{dx} P_n \right)^2 + \right.$$

$$z^2 \left(\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{mn} P_m \frac{dP_n}{dy} \right)^2 + \left. \left(\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{mn} P_m P_n \right)^2 \right\} dz dA +$$

$$\frac{1}{2} \int_A \int_{-h_2/2}^{h_2/2} \rho_2 \omega^2 \left\{ z^2 \left(\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{mn} \frac{dP_m}{dx} P_n \right)^2 + \right.$$

$$z^2 \left(\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{mn} P_m \frac{dP_n}{dy} \right)^2 + \left. \left(\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{mn} P_m P_n \right)^2 \right\} dz dA$$

$$+ \frac{1}{2} \int_A \int_{-h/2}^{-h_2/2} \rho_1 \omega^2 \left\{ z^2 \left(\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{mn} \frac{dP_m}{dx} P_n \right)^2 + \right.$$

$$z^2 \left(\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{mn} P_m \frac{dP_n}{dy} \right)^2 + \left. \left(\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{mn} P_m P_n \right)^2 \right\} dz dA;$$

$$U_s^{\max} = \frac{1}{2} \int_A \int_{h_2/2}^{h/2} z^2 \left\{ Q_{11} \left(\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{mn} \frac{d^2 P_m}{dx^2} P_n \right)^2 + \right.$$

$$2Q_{12} \left(\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{mn} \frac{d^2 P_m}{dx^2} P_n \right) \left(\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{mn} P_m \frac{d^2 P_n}{dy^2} \right) +$$

$$Q_{22} \left(\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{mn} P_m \frac{d^2 P_n}{dy^2} \right)^2 +$$

$$4Q_{66} \left(\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{mn} \frac{dP_m}{dx} \frac{dP_n}{dy} \right)^2 \Big\} dz dA +$$

$$\frac{1}{2} \int_A \int_{-h_2/2}^{h_2/2} z^2 \left\{ \bar{Q}_{11} \left(\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{mn} \frac{d^2 P_m}{dx^2} P_n \right)^2 + \right.$$

$$2\bar{Q}_{12} \left(\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{mn} \frac{d^2 P_m}{dx^2} P_n \right) \left(\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{mn} P_m \frac{d^2 P_n}{dy^2} \right) +$$

$$4\bar{Q}_{16} \left(\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{mn} \frac{d^2 P_m}{dx^2} P_n \right) \left(\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{mn} \frac{dP_m}{dx} \frac{dP_n}{dy} \right) +$$

$$4\bar{Q}_{26} \left(\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{mn} P_m \frac{d^2 P_n}{dy^2} \right) \left(\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{mn} \frac{dP_m}{dx} \frac{dP_n}{dy} \right) +$$

$$\left. \bar{Q}_{22} \left(\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{mn} P_m \frac{d^2 P_n}{dy^2} \right)^2 \right\} dz dA +$$

$$4\bar{Q}_{66} \left(\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{mn} \frac{dP_m}{dx} \frac{dP_n}{dy} \right)^2 \Big\} dz dA +$$

$$\frac{1}{2} \int_A \int_{-h/2}^{-h_2/2} z^2 \left\{ Q_{11} \left(\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{mn} \frac{d^2 P_m}{dx^2} P_n \right)^2 + \right.$$

$$2Q_{12} \left(\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{mn} \frac{d^2 P_m}{dx^2} P_n \right) \left(\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{mn} P_m \frac{d^2 P_n}{dy^2} \right) +$$

$$Q_{22} \left(\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{mn} P_m \frac{d^2 P_n}{dy^2} \right)^2 +$$

$$4Q_{66} \left(\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{mn} \frac{dP_m}{dx} \frac{dP_n}{dy} \right)^2 \Big\} dz dA. \quad (13)$$

所以能量方程可表示为

$$F = E_k^{\max} - U_s^{\max}. \quad (14)$$

要求解 FMLs 薄板的固有特性, 就是求解能量方程 F 的最小待定参数问题, 可令

$$\frac{\partial F}{\partial A_{mn}} = 0. \quad m = 1, 2, \dots, M; n = 1, 2, \dots, N. \quad (15)$$

求解式(14)最小待定参数广义特征值问题得

$$(K - \omega^2 M)q = 0. \quad (16)$$

式中: K, M 为所求结构系统刚度矩阵和质量矩阵; 特性向量 $q = [A_{11}, A_{12}, \dots, A_{mn}]^T$. 若使式(16)有解, 则特征向量 q 的系数矩阵行列式为 0, 即

$$\det(K - \omega^2 M) = 0. \quad (17)$$

求解式(17)可得结构各阶固有频率, 其精度由 M, N 值确定, M, N 值越大, 所获得结果精度越高.

将所获得各阶固有频率代入式(16), 可得到相应的模态振型.

2 FMLs 薄板固有特性的分析流程

基于 Matlab 软件, 编写相应程序, 提出悬臂 FMLs 薄板固有特性分析流程, 具体步骤如下:

1) 输入 FMLs 薄板的几何参数和材料参数. 首先, 分别给出 FMLs 薄板长、宽、金属层和纤维层厚度、纤维层中每层纤维角度等几何参数; 然后, 分别输入金属和纤维弹性模量、泊松比、材料密度等参数, 为计算做好准备.

2) 获得最大动能和最大应变能表达式. 将位移分量表达式(1)代入一般动能表达式(9)中, 整理后代入中面位移表达式(15)中, 根据边界确定 $P_m(\xi)$ 和 $P_n(\eta)$, 整理后令 $\cos\omega t = 1$ 可获得最大动能, 令 $\sin\omega t = 1$ 可获得最大应变能.

3) 基于正交多项式法求解固有频率. 将步骤 2) 中得到的最大动能和最大应变能代入式(14)中, 得到能量方程 F 具体表达式, 求解最小待定

参数广义特征值问题式(17),可以得到 FMLs 薄板各阶固有频率 ω .

4) 求解待定参数,获得各阶模态振型. 将所获得各阶固有频率 ω 代入式(16),可求得待定参数 A_{mn} ,将所获得参数代回到位移表达式(10)中,即可获得各阶固有频率下的模态振型.

3 实验验证

以 TA2/TC500 FMLs 薄板为研究对象,对其悬臂边界下的固有频率和模态振型进行测试. 被测试件长、宽、高分别为 200 mm × 300 mm × 2.6 mm,其中,金属层厚度为 0.3 mm,密度为 $4.15 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$,弹性模量为 108 GPa,泊松比为 0.3;纤维层厚度为 2 mm,纤维沿纤维方向的弹性模量为 136 GPa,垂直纤维方向的弹性模量为 7.92 GPa,剪切模量为 3.39 GPa,泊松比为 0.3,密度为 $1\,780 \text{ kg/m}^3$,材料铺层方式为正交铺设,即 $[(0/90)_s]$,共铺设 16 层,每层具有相同的厚度和纤维体积分数. 安装时对短边进行夹持,夹持长度为 30 mm.

为验证本文计算方法的正确性,搭建图 2 所示测试系统. 实验采用多点激励单点响应方式. 测试前将被测薄板沿长度方向和宽度方向分别进行 9 等分和 10 等分,即 110 个激励点,其中响应点设置在 33 测点处,即图 2 中加速度传感器位置. 同时,设定测试带宽 1 600 Hz,频谱线数 4 096,

频率分辨率 0.39 Hz. 为提高测试精度,对激励信号添加力指数窗函数,对响应信号添加指数窗函数.

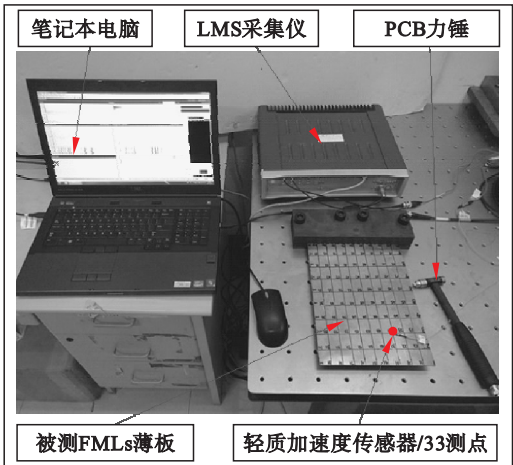


图 2 FMLs 薄板固有特性测试系统
Fig. 2 Natural characteristic experiment system of FMLs thin plates

测试时,使用 PCB086C01 模态力锤在每个激励点分别进行 3 次有效激励,同时使用 LMS 16 通道声-振分析仪对激励信号和响应信号进行采集,最后通过安装有 LMS Test. lab 14A 分析软件的笔记本电脑进行存储和分析,即可获得其前 5 阶固有频率和模态振型. 所获得的固有频率和模态振型结果如表 1 所示,为方便比较,将通过 Matlab 软件计算获得的频率和振型以及计算误差一并列入表 1.

表 1 计算和测试获得的纤维金属复合薄板的前 5 阶固有频率和模态振型					
Table 1 First 5 natural frequencies and modal shapes of FMLs thin plates by calculation and experiment					
阶次	计算频率/Hz	测试频率/Hz	误差/%	计算振型	测试振型
1	38.3	36.7	4.1		
2	79.6	77.7	2.4		
3	225.3	217.2	3.6		
4	310.8	307.0	1.2		
5	501.5	478.1	4.7		

通过对计算结果和实验结果的对比可知,本文所提出的 FMLs 薄板固有频率计算方法所获得结果与实验测试所获得结果间的误差为 1.2% ~ 4.7%,在误差允许范围内,且前 5 阶模态振型的振动形态及其变化趋势也完全一致,验证了理论分析方法的正确性。

4 结 论

本文通过理论与实践相结合的方式,对悬臂边界条件下纤维金属复合薄板的固有特性进行了分析与验证。通过对 TA2/TC500 纤维金属复合薄板的计算结果和实验结果进行对比可知,所提出理论模型计算获得的固有频率结果与实验测试获得结果的误差在 1.2% ~ 4.7%,在误差允许范围内,且前 5 阶模态振型的振动形态及其变化趋势也完全一致,进而验证了理论分析方法的正确性。利用本文提出的方法,可以较好地实现悬臂边界条件下纤维金属复合薄板固有特性的分析与预测。同时,所建立理论模型还适用于自由、简支、固支等不同边界和更多对称铺层时 FMLs 复合薄板固有特性的分析。但本文还未对非对称以及多铺层结构的 FMLs 复合薄板的固有特性进行分析和讨论,其结果有待进一步论证。

参考文献:

- [1] Sinmazçelik T, Avcu E, Bora M Ö, et al. A review: fibre metal laminates, background, bonding types and applied test methods[J]. *Materials & Design*, 2011, 32(7): 3671 – 3685.
- [2] Marsh G. Air framers exploit composites in battle for supremacy[J]. *Reinforced Plastics*, 2005, 49(3): 26 – 32.
- [3] Harras B, Benamar R, White R G. Experimental and theoretical investigation of the linear and non-linear dynamic behaviour of a glare 3 hybrid composite panel[J]. *Journal of Sound & Vibration*, 2002, 252(2): 281 – 315.
- [4] Botelho E C, Campos A N, Barros E D, et al. Damping behavior of continuous fiber/metal composite materials by the free vibration method[J]. *Composites Part B*, 2005, 37(2): 255 – 263.
- [5] Shooshtari A, Razavi S. A closed form solution for linear and nonlinear free vibrations of composite and fiber metal laminated rectangular plates[J]. *Composite Structures*, 2010, 92(11): 2663 – 2675.
- [6] Payeganeh G H, Ghasemi F A, Malekzadeh K. Dynamic response of fiber-metal laminates (FMLs) subjected to low-velocity impact[J]. *Thin-Walled Structures*, 2010, 48(1): 62 – 70.
- [7] Ghasemi F A, Paknejad R, Fard K M. Effects of geometrical and material parameters on free vibration analysis of fiber metal laminated plates[J]. *Mechanics & Industry*, 2013, 14(4): 229 – 238.
- [8] Rahimi G H, Gazor M S, Hemmatnezhad M, et al. Free vibration analysis of fiber metal laminate annular plate by state-space based differential quadrature method[J]. *Advances in Materials Science & Engineering*, 2014, 2014(3): 653 – 659.
- [9] Mahi A, Bedia E A A, Tounsi A. A new hyperbolic shear deformation theory for bending and free vibration analysis of isotropic, functionally graded, sandwich and laminated composite plates[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2015, 39(9): 2489 – 2508.
- [10] Iriondo J, Aretxabaleta L, Aizpuru A. Characterisation of the elastic and damping properties of traditional FML and FML based on a self-reinforced polypropylene[J]. *Composite Structures*, 2015, 131: 47 – 54.
- [11] Sayyad A S, Ghugal Y M. On the free vibration analysis of laminated composite and sandwich plates; A review of recent literature with some numerical results[J]. *Composite Structures*, 2015, 129: 177 – 201.
- [12] 廖建. 纤维金属层板(FMLs)基本力学性能试验研究[D]. 西安: 西北工业大学, 2007.
(Liao Jian. Experimental study on basic mechanical properties of fiber-metal laminate (FMLs) [D]. Xi'an: Northwestern Polytechnical University, 2007.)
- [13] 王时玉. 纤维金属层板的制备及力学性能研究[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2012.
(Wang Shi-yu. Study on the preparation and mechanical properties of fiber-metal laminates [D]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2012.)
- [14] 马玉娥, 胡海威, 熊晓枫. 低速冲击下 FMLs、铝板和复合材料的损伤对比[J]. 航空学报, 2014, 35(7): 1902 – 1911.
(Ma Yu-e, Hu Hai-wei, Xiong Xiao-feng. Comparison of damage in FMLs, aluminum and composite panels subjected to low-velocity impact[J]. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2014, 35(7): 1902 – 1911.)
- [15] 李瑞, 陈秀华, 刘沛禹. Ti-C 纤维金属层压板自由振动试验和数值分析[J]. 复合材料学报, 2016, 33(5): 1064 – 1071.
(Li Rui, Chen Xiu-hua, Liu Pei-yu. Free vibration test and numerical analysis of Ti-C fiber metal laminate[J]. *Acta Materiae Compositae Sinica*, 2016, 33(5): 1064 – 1071.)