doi:10.12068/j.issn.1005-3026.2019.01.028

三维 Minkowski 空间中的圆纹曲面

钱金花, 付雪山
(东北大学 理学院, 辽宁 沈阳 110819)

摘　　要：在三维闵可夫斯基(Minkowski)空间中定义了以类时曲线为脊线的圆纹(canal)曲面,并对温加顿(Weingarten)圆纹曲面进行了分类.与三维欧氏空间类似,首先以类时曲线的伏雷内(Frenet)标架为基础,结合圆纹曲面的几何定义,得到了伪正交标架下以类时曲线为脊线的圆纹曲面的参数方程.然后,建立此类圆纹曲面的基本理论,包括第一、第二基本量,高斯曲率和平均曲率等.在此基础上,得到了高斯曲率和平均曲率之间的关系,并对 Weingarten 圆纹曲面进行了详细的讨论.得到了三维 Minkowski 空间中以类时曲线为脊线的 Weingarten 圆纹曲面是管道曲面或者旋转曲面的结论.

关 键 词：Minkowski 空间;圆纹曲面;Weingarten 曲面;高斯曲率;平均曲率
中图分类号：O 186　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1005-3026(2019)01-0150-03

Canal Surfaces in 3D Minkowski Space

QIAN Jin-hua, *FU Xue-shan*
(School of Sciences, Northeastern University, Shenyang 110819, China. Corresponding author: QIAN Jin-hua, E-mail: qianjinhua@mail.neu.edu.cn)

Abstract: The canal surfaces with time-like center curves in 3D Minkowski space were defined and the Weingarten canal surfaces were classified. Similar to the studying method for surfaces in Euclidean space, at first, the parametric equation of canal surfaces under pseudo orthogonal frame was built according to the Frenet frame of time-like curves and the geometric definition of canal surfaces, then the basic theories were obtained which include two fundamental quantities, the Gaussian curvature and mean curvature and so on. Using basic theories, the relationship between the Gaussian curvature and the mean curvature were found and the Weingarten canal surfaces were studied explicitly. The conclusion was achieved that a canal surface is a Weingarten surface if and only if it is a tube or a revolution surface.

Key words: Minkowski space; canal surfaces; Weingarten surfaces; Gaussian curvature; mean curvature

1850 年 Monge 将由单参数球面族沿脊线运动生成的包络面定义为圆纹曲面[1].本文将欧氏空间中的圆纹曲面推广到三维 Minkowski 空间.将由单参数伪球面族 S_1^2 沿脊线运动生成的包络面定义为圆纹曲面,并对 Weingarten 圆纹曲面进行了分类.本文主要讨论了以类时曲线为脊线的圆纹曲面,用类似的方法可以讨论以类空曲线和类光曲线为脊线的圆纹曲面的性质.

1　预备知识

设 E_1^3 是三维 Minkowski 空间,其中的内积定义为

$$\langle\ ,\ \rangle = dx_1^2 + dx_2^2 - dx_3^2.$$

设 E_1^3 中的任意非零向量 $\boldsymbol{\alpha}$,若 $\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}\rangle>0$,则称 $\boldsymbol{\alpha}$ 为类空向量;若 $\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}\rangle<0$,则称 $\boldsymbol{\alpha}$ 为类时向量;若 $\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}\rangle=0$,则称 $\boldsymbol{\alpha}$ 为类光向量.特别地,规定零向量为类空向量[2].

收稿日期：2017-10-17
基金项目：国家自然科学基金资助项目(11801065,11371080).
作者简介：钱金花(1979-),女,河北唐山人,东北大学副教授.

设 c 是 E_1^3 中任意一条正则曲线. 若曲线 c 的切向量为类空向量(类时向量、类光向量),则称 c 为类空曲线(类时曲线、类光曲线). 类似地,设 $x=x(u,v)$ 是 E_1^3 中的任意正则曲面,若曲面 x 的法向量为类空向量(类时向量、类光向量),则称曲面 x 为类时曲面(类空曲面、类光曲面)[3].

引理 1[4]　设 $c(s)$ 是以 s 为弧长参数的类时曲线,则其满足如下 Frenet 公式:

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{\alpha}'(s)=\kappa(s)\boldsymbol{\beta}(s),\\&\boldsymbol{\beta}'(s)=\kappa(s)\boldsymbol{\alpha}(s)-\tau(s)\boldsymbol{\gamma}(s),\\&\boldsymbol{\gamma}'(s)=\tau(s)\boldsymbol{\beta}(s).\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

其中:$\boldsymbol{\alpha}(s)$,$\boldsymbol{\beta}(s)$,$\boldsymbol{\gamma}(s)$ 分别为曲线 $c(s)$ 的切向量、主法向量和副法向量;$\kappa(s)$ 和 $\tau(s)$ 分别称为 $c(s)$ 的曲率和挠率函数.

定义 1[5]　设 p 是 E_1^3 中的一固定点,$C>0$ 是常数. 则 E_1^3 中的伪黎曼球定义为

$$S_1^2(p,C)=\{x\in E_1^3:\langle x-p,x-p\rangle=C^2\}.$$

类比欧氏空间中圆纹曲面的定义见文献[6-7],本文给出如下定义.

定义 2　设 S 是 E_1^3 中由伪球族 S_1^2 沿一条类时脊线 $c(s)$ 运动所生成的圆纹曲面. 则曲面 S 可表示为

$$x(s,\theta)=c(s)+r(s)\{r'(s)\boldsymbol{\alpha}(s)+\sqrt{1+r'(s)^2}\cos\theta\boldsymbol{\beta}(s)+\sqrt{1+r'(s)^2}\sin\theta\boldsymbol{\gamma}(s)\}.$$

其中:曲线 $c(s)$ 称为圆纹曲面的脊线(中央线);$r(s)$ 称为圆纹曲面的半径函数;s 为脊线的弧长参数;$\{\boldsymbol{\alpha}(s),\boldsymbol{\beta}(s),\boldsymbol{\gamma}(s)\}$ 为脊线的 Frenet 标架.

标注 1　特别地,当脊线为直线时,其 Frenet 标架可看作正交标架,圆纹曲面为旋转曲面;当半径函数为常数时,圆纹曲面又称为管道曲面[8].

标注 2　除非特殊说明,本文所讨论的都是 E_1^3 中以类时曲线为脊线的圆纹曲面,后续不再赘述.

定义 3[9-10]　若曲面的高斯曲率 K 和平均曲率 H 满足 $\Phi(K,H)=0$,其中 Φ 是雅克比函数,则称其为 Weingarten 曲面.

2　主要结论

根据定义 2,为了方便,令 $r'(s)=\tan\varphi$,这里 $\varphi=\varphi(s)$ 为光滑函数,则曲面 S 可表示为

$$x(s,\theta)=c(s)+r(s)\{\tan\varphi\boldsymbol{\alpha}(s)+\sec\varphi\cos\theta\boldsymbol{\beta}(s)+\sec\varphi\sin\theta\boldsymbol{\gamma}(s)\}.\tag{2}$$

其中:$\theta\in[0,2\pi)$;$\varphi\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$.

下面计算圆纹曲面的两个基本量、高斯曲率以及平均曲率.

首先,对式(2)分别关于 s,θ 求偏导数,结合式(1)得

$$\left.\begin{aligned}&x_s=\frac{\partial x}{\partial s}=x_s^1\boldsymbol{\alpha}+x_s^2\boldsymbol{\beta}+x_s^3\boldsymbol{\gamma},\\&x_\theta=\frac{\partial x}{\partial\theta}=(-\sin\theta\boldsymbol{\beta}+\cos\theta\boldsymbol{\gamma})r\sec\varphi.\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

其中:

$$\begin{aligned}&x_s^1=\sec^2\varphi+rr''+r\kappa\sec\varphi\cos\theta;\\&x_s^2=r'\sec\varphi\cos\theta+r\tau\sec\varphi\sin\theta+\\&rr'\sec\varphi\varphi'\cos\theta+rr'\kappa;\\&x_s^3=r'\sec\varphi\sin\theta-r\tau\sec\varphi\cos\theta+\\&rr'\sec\varphi\varphi'\sin\theta.\end{aligned}$$

于是,曲面 S 的第一基本量为

$$\left.\begin{aligned}&E=r^2(-\kappa^2\sec^2\varphi\cos^2\theta+r'^2\kappa^2+\\&\tau^2\sec^2\varphi-2\kappa\sec\varphi\varphi'\cos\theta+\\&2r'\kappa\tau\sec\varphi\sin\theta-r''\varphi')-\\&2(rr''+r\kappa\sec\varphi\cos\theta)-\sec^2\varphi,\\&F=-r^2\tau\sec^2\varphi-r^2r'\kappa\sec\varphi\sin\theta,\\&G=r^2\sec^2\varphi.\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

由式(4)得

$$EG-F^2=-r^2(rr''+\sec^2\varphi+r\kappa\sec\varphi\cos\theta)^2.\tag{5}$$

根据式(3),式(5)可得曲面 S 的法向量为

$$\boldsymbol{n}=\tan\varphi\boldsymbol{\alpha}+\sec\varphi\cos\theta\boldsymbol{\beta}+\sec\varphi\sin\theta\boldsymbol{\gamma}.\tag{6}$$

显然 $\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{n}\rangle=1$,所以有如下结论.

定理 1　三维 Minkowski 空间中以类时曲线为脊线的圆纹曲面是类时曲面.

对式(6)分别关于 s,θ 求偏导数,可得

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{n}_s=(r''+\kappa\sec\varphi\cos\theta)\boldsymbol{\alpha}+\\&(r'\kappa+(r'\varphi'\cos\theta+\tau\sin\theta)\sec\varphi)\boldsymbol{\beta}+\\&(-\tau\cos\theta+r'\varphi'\sin\theta)\sec\varphi\boldsymbol{\gamma},\\&\boldsymbol{n}_\theta=-(\sec\varphi\sin\theta)\boldsymbol{\beta}+(\sec\varphi\cos\theta)\boldsymbol{\gamma}.\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

由式(3),式(7)可得 S 的第二基本量为

$$\left.\begin{aligned}&L=r(\kappa^2\sec^2\varphi\cos^2\theta-r'^2\kappa^2-\\&\tau^2\sec^2\varphi+2\kappa\sec\varphi\varphi'\cos\theta+\\&\sec^2\varphi\varphi'^2-2r'\kappa\tau\sec\varphi\sin\theta)+\\&(r''+\kappa\sec\varphi\cos\theta),\\&M=r\tau\sec^2\varphi+rr'\kappa\sec\varphi\sin\theta,\\&N=-r\sec^2\varphi.\end{aligned}\right\}\tag{8}$$

由曲面 S 的两个基本量,经过简单地计算,不难得到下面的结论,具体证明略.

定理 2　设 S 是 E_1^3 中的圆纹曲面,则 S 的高斯曲率 K 和平均曲率 H 可表示为

$$K=\frac{Q}{rP},\quad H=\frac{\sec^2\varphi-2P}{2rP}.$$

其中,

$$P = rr'' + r\kappa\sec\varphi\cos\theta + \sec^2\varphi,$$

$$Q = r'' + \kappa\sec\varphi\cos\theta.$$

并且它们满足

$$H = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r} + Kr\right).$$

定理3 设 S 是 E_1^3 中的圆纹曲面,则 S 是Weingarten曲面的充要条件是它为管道曲面或者旋转曲面.

证明 首先,由定理2,通过计算得

$$K_s = r^{-2}P^{-2}(-2rr'\kappa^2\sec^2\varphi\cos^2\theta + (r\kappa' - r'\kappa)\sec^3\varphi\cos\theta - 5rr'r''\kappa\sec\varphi\cos\theta - 4rr'r''^2 - r'r''\sec^2\varphi + rr'''\sec^2\varphi),$$

$$K_\theta = -r^{-1}P^{-2}(\kappa\sec^3\varphi\sin\theta),$$

$$H_s = 2^{-1}r^{-2}P^{-2}(2r^2r'\kappa^2\sec^2\varphi\cos^2\theta + (2rr'\kappa - r^2\kappa')\sec^3\varphi\cos\theta + 5r^2r'r''\kappa\sec\varphi\cos\theta + 4r^2r'r''^2 - r^2r'''\sec^2\varphi + 2rr'r''\sec^2\varphi + r'\sec^4\varphi),$$

$$H_\theta = 2^{-1}P^{-2}(\kappa\sec^3\varphi\sin\theta).$$

根据 $H_sK_\theta = H_\theta K_s$,得到

$$r'(K - r^{-2})K_\theta = 0. \tag{9}$$

由曲面 S 的正则性知 $K \neq r^{-2}$ 且 $\sec\varphi \neq 0$.

所以有下列两种情况:

1) 当 $r' = 0, K_\theta \neq 0$ 时,S 的半径函数 r 为常数,此时,S 是管道曲面.

2) 当 $K_\theta = 0, r' \neq 0$ 时,有 $\kappa \equiv 0$,此时,S 是旋转曲面.

反之,若 S 是旋转曲面,则有 $\kappa = 0$,代入定理2中的公式,得

$$K = \frac{r''}{r(rr'' + 1 + r'^2)},$$

$$H = -\frac{2rr'' + 1 + r'^2}{2r(rr'' + 1 + r'^2)}.$$

由于 K 和 H 中均不含参数 θ,所以等式 $H_sK_\theta = H_\theta K_s$ 显然成立.

另一方面,若 S 是管道曲面,则半径函数 r 为常数,代入定理2中的公式并求导,得

$$K_s = \frac{\kappa'\cos\theta}{rP^2}, \quad K_\theta = -\frac{\kappa\sin\theta}{rP^2},$$

$$H_s = -\frac{\kappa'\cos\theta}{2P^2}, H_\theta = \frac{\kappa\sin\theta}{2P^2}.$$

等式 $H_sK_\theta = H_\theta K_s$ 恒成立. 定理得证.

3 结 语

本文将三维欧氏空间中的圆纹曲面推广到Minkowski空间. 定义了以类时曲线为脊线的圆纹曲面,并对Weingarten圆纹曲面进行了分类. 此项工作开创了Minkowski空间圆纹曲面研究的先例,为其他类型圆纹曲面的研究奠定了坚实的基础.

参考文献:

[1] Gray A. Modern differential geometry of curves and surfaces with mathematica[M]. 2nd ed. New York:CRC Press,1998.

[2] Kim Y H,Yoon D W. On non-developable ruled surface in Lorentz-Minkowski 3-spaces[J]. *Taiwanese Journal of Mathematics*,2007,11(1):197-214.

[3] Izumiya S,Takiyama A. A timelike surface in Minkowski 3-space which contains lightlike lines[J]. *Journal of Geometry*,1999,64(1):95-101.

[4] Ucum A, IlarslanK. New types of canal surfaces in Minkowski 3-space[J]. *Advances in Applied Clifford Algebras*,2016,26(1):449-468.

[5] Liu H L. Ruled surfaces with lightlike ruling in 3-Minkowski space[J]. *Journal of Geometry and Physics*,2009,59(1):74-78.

[6] Kim Y H,Liu H L,Qian J H. Some characterizations of canal surfaces[J]. *Bulletin of the Korean Mathematical Society*,2016,53(2):461-477.

[7] Qian J H,Kim Y H. Classifications of canal surfaces with L_1 pointwise 1-type Gauss map[J]. *Milan Journal of Mathematics*,2015,83(1):145-155.

[8] Doğan F,Yayli Y. On the curvatures of tubular surface with Bishop frame[J]. *Communications*,2011,60(1):59-69.

[9] Lopez R. Rotational linear Weingarten surfaces of hyperbolic type[J]. *Israel Journal of Mathematics*, 2008, 167(1): 283-301.

[10] Ro J S,Yoon D W. Tubes of Weingarten types in a Euclidean 3-space[J]. *Journal of the Chungcheong Mathematical Society*,2009,22(3):360-366.