

齿顶修形行星轮系啮合刚度分析

马 辉, 段田堂, 孙衍宁, 陈康康
(东北大学 机械工程与自动化学院, 辽宁 沈阳 110819)

摘 要: 以含有太阳轮减重孔、齿圈固定孔、柔性系杆的行星轮系为研究对象, 基于 ANSYS 软件, 建立了考虑实际结构的修形行星轮系有限元模型. 基于该模型, 研究了齿顶修形以及减重孔、齿圈轮缘厚度、柔性系杆等齿轮结构对行星轮系时变啮合刚度的影响. 研究表明: 齿顶修形改变了啮合刚度曲线的形状和数值大小; 减重孔增大将导致啮合刚度减小而齿圈支持率变大使啮合刚度增加; 同时, 系杆越柔, 行星轮系啮合刚度波动越小. 研究结果可为实际生产中考虑修形的行星轮系设计提供理论依据.

关 键 词: 行星轮系; 啮合刚度; 齿顶修形; 齿轮结构

中图分类号: TH 113 **文献标志码:** A **文章编号:** 1005-3026(2019)03-0380-06

Mesh Stiffness Analysis of Planetary Gear System with Gear Tip Relief

MA Hui, DUAN Tian-tang, SUN Yan-ning, CHEN Kang-kang
(School of Mechanical Engineering & Automation, Northeastern University, Shenyang 110819, China.
Corresponding author: MA Hui, E-mail: mahui_2007@163.com)

Abstract: Taking the planetary gear system as the research object, which contains lightening hole of sun gear, pin support of ring gear and the flexible carrier arm, a finite element model of planetary gear system with gear tip relief was established on the basis of ANSYS software. Based on the model, the influence of the gear tip relief and gear structure, such as lightening hole of sun gear, the rim thickness of ring gear and the flexible carrier arm, on the mesh stiffness was analyzed. The results show that the gear tip relief changes the shape and value of the mesh stiffness curve. Mesh stiffness decreases with the increase of lightening hole size. However, with the increase of the backup ratio of ring gear, the mesh stiffness increases gradually. Meanwhile, the more flexible the carrier arm is, the smaller the gear meshing stiffness fluctuates. The research results may provide a theoretical basis for the design of planetary gear system considering gear modification in actual production.

Key words: planetary gear system; mesh stiffness; gear tip relief; gear structure

行星轮系是各种机械传动系统的重要组成部分. 行星轮系的振动直接影响整个机械系统的可靠性, 如果引起共振, 将会产生不可估量的后果. 行星齿轮系统啮合刚度作为轮系内在激励, 对轮系振动特性有着重要的影响. 因此, 对行星轮系啮合刚度的研究便显得尤为重要.

国内外学者对行星轮系啮合刚度进行了一定的研究. Parker^[1] 提供了行星轮系相对相位和啮合周期的计算方法. Liang 等^[2] 使用能量法, 将齿

轮轮齿建立在基圆上并假设齿轮基体为刚体, 计算了太阳轮-行星轮及齿圈-行星轮啮合刚度. 而后, Liang 等^[3] 改进啮合刚度计算模型, 将轮齿建立在齿根圆上, 使计算结果更加准确. Chen 等^[4] 使用解析方法研究了齿圈齿根裂纹的啮合刚度和动力学响应. 扬扬等^[5] 针对行星齿轮的 APDL 参数化建模过程进行了论述. Ambarisha 等^[6] 使用有限元以及解析方法计算了平面行星轮系啮合刚度. Xue 等^[7] 利用有限元方法计算了

行星轮系扭转刚度并且研究了裂纹对刚度的影响. 基于文献[7],Xue 等^[8]研究了含裂纹行星轮系振动特性. Fan 等^[9]建立非线性动力学模型,研究了行星轮系杆盘片裂纹对系统振动的影响.

上述研究多假设齿圈基体为刚体且不考虑实际行星轮系结构布置,同时,研究对象多为标准齿轮. 本文针对解析方法不能有效分析复杂行星轮系啮合刚度的情况,使用有限元方法建立考虑修形和变位且含太阳轮减重孔、齿圈固定孔、柔性系杆的模型,分析修形和轮系结构参数对行星轮系啮合刚度的影响,研究结果能够为行星轮系设计提供参考.

1 行星轮系有限元建模

考虑行星轮系具体结构(见图 1),基于 ANSYS 软件的 APDL 功能,建立考虑修形、太阳轮减重孔、齿圈固定孔及系杆的平面行星轮系模型(如图 2 所示),行星轮系主要参数如表 1 所示.

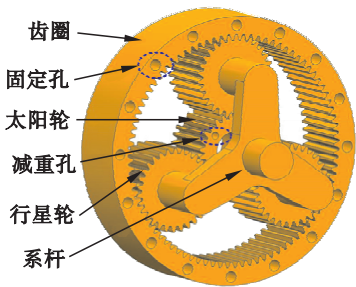


图 1 行星轮系结构

Fig. 1 Structure of the planetary gear system

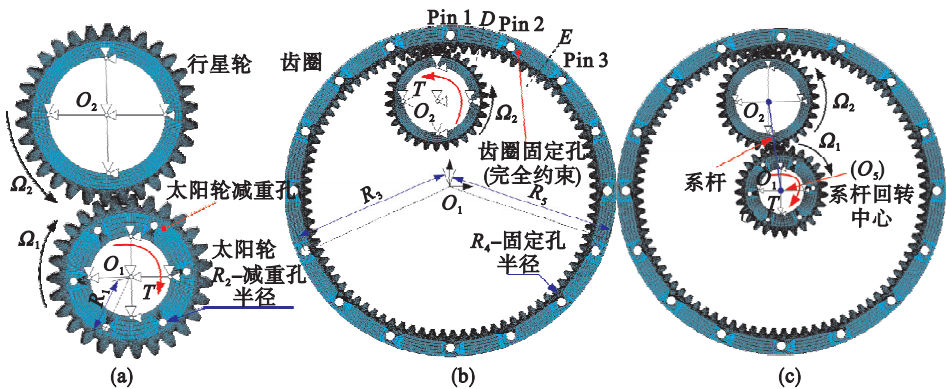


图 2 行星轮系示意图

Fig. 2 Schematics of planetary gear system

(a)—太阳轮—行星轮啮合;(b)—齿圈—行星轮啮合;(c)—含系杆齿圈—行星轮—太阳轮啮合.

2 行星轮系啮合刚度分析

2.1 太阳轮—行星轮啮合刚度

齿顶修形对行星轮系传动具有重要意义,能够使传动过程更加平稳. 太阳轮—行星轮啮合有

图 2 中行星轮系有限元模型采用 PLANE82 单元模拟齿轮, BEAM188 单元模拟系杆,在啮合线上建立 CONTA172 和 TARGE169 接触对模拟齿轮接触. 在太阳轮矢量半径为 R_1 和齿圈矢量半径为 R_3 的圆周上分别建立 6 个均布的半径为 R_2 的减重孔和 16 个均布的半径为 R_4 的固定孔. 行星轮和太阳轮通过系杆联结在一起并和齿圈组成行星轮系.

表 1 行星轮系主要参数

Table 1 Main parameters of the planetary gear pairs

轮系参数	太阳轮	行星轮	齿圈
齿轮个数 n	1	1	1
齿数 z	27	30	87
模数 m/mm	14	14	14
变位系数 χ	0.223 9	0.227 8	0.679 5
齿顶修形长度 L_a/mm	5.6	5.6	—
齿顶修形量 C_a/mm	0.056	0.056	—
压力角 $\alpha/(\text{°})$	22.216	22.216	22.216
齿顶高系数 h_a^*	1.0	1.0	1.0
顶隙系数 c	0.25	0.25	0.25
内孔直径 d/mm	200	290	—
外缘半径 R_5/mm	—	—	721
弹性模量 E/GPa	206	206	206
泊松比 ν	0.3	0.3	0.3
摩擦系数 μ	0.1	0.1	—

针扭矩 T , 由于齿轮基体和轮齿具有弹性, 所以参与啮合齿轮会产生弹性变形, 提取 O_1 位置的扭转角 $\Delta\theta$, 则太阳轮-行星轮啮合刚度 K 可由式 (1) 获得:

$$K = T / (r_b^2 \times \Delta\theta) . \tag{1}$$

其中 r_b 为太阳轮基圆半径.

现基于表 1 数据研究修形对太阳轮-行星轮啮合刚度影响, L_{a_sun}, L_{a_pla} 分别表示太阳轮、行星轮齿顶修形长度; C_{a_sun}, C_{a_pla} 分别表示太阳轮、行星轮齿顶修形量. 当修形量 $C_{a_sun} = C_{a_pla} = C_a = 0.056\text{ mm}$, 修形长度 $L_{a_sun} = L_{a_pla} = L_a = 0, 2.6, 3.6, 4.6, 5.6\text{ mm}$ 时, 啮合刚度如图 4a 所示. 当修形长度 $L_{a_sun} = L_{a_pla} = L_a = 5.6\text{ mm}$, 修形量 $C_{a_sun} = C_{a_pla} = C_a = 0, 0.006, 0.016, 0.036, 0.056\text{ mm}$ 时, 啮合刚度如图 4b 所示. 从图 4 中可以看出: 随着修形长度 L_a 、修形量 C_a 增大, 啮合刚度下降明显; 当 $L_a = 5.6\text{ mm}, C_a = 0.056\text{ mm}$ 时, 啮合刚度下降 8.60%, 且单双齿啮合过渡区域刚度曲线更加平缓.

太阳轮减重孔大小和位置对啮合刚度的影响如图 5 所示, 其中 R_1, R_2 分别表示减重孔径向位置和其半径(见图 2a). 图 5 表明: 1) 当减重孔半径逐渐增大时, 啮合刚度逐渐减小, 尤其当太阳轮-行星轮在减重孔附近啮合且处于单齿啮合区(图 5b

中啮合位置 A 附近), 啮合刚度下降明显(下降 10.34%); 2) 随着 R_1 的增加(即减重孔越来越靠近轮齿), 啮合刚度逐渐下降, 但啮合刚度变化不大(下降 1.40%). 啮合刚度随减重孔半径增大而明显下降的原因主要是更大的减重孔同时对齿轮基体和轮齿的承载能力产生更强的削弱作用. 啮合刚度随减重孔径向位置更改而变化不明显的原因是随着减重孔逐渐靠近轮齿, 减重孔对轮齿承载能力的削弱作用增大, 但是对齿轮基体承载能力的削弱作用减小, 所以齿轮啮合刚度的变化不大.

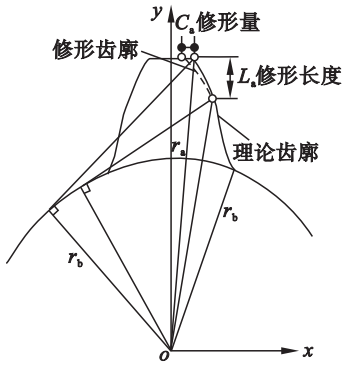


图 3 轮齿齿顶修形示意图
Fig. 3 Schematic of the mesh tooth with gear tip relief

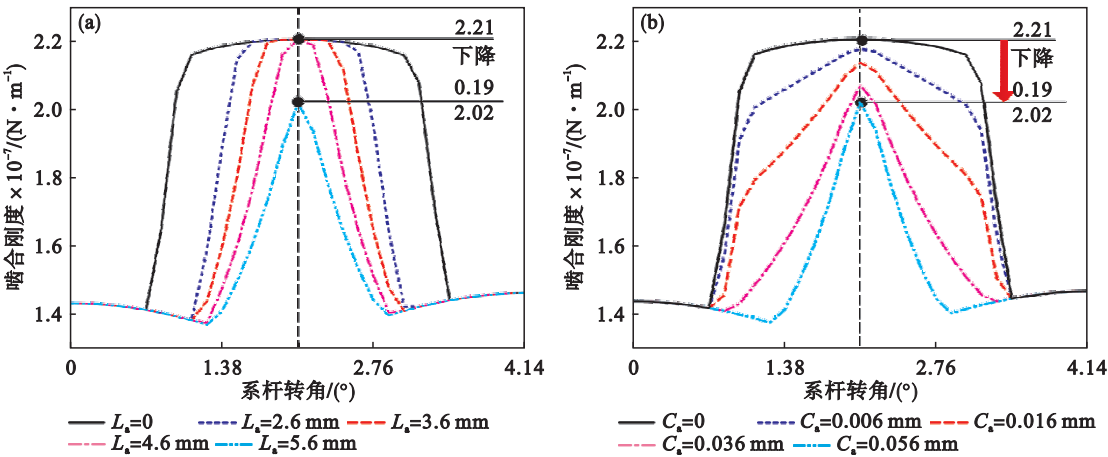


图 4 齿顶修形对太阳轮-行星轮啮合刚度影响
Fig. 4 Influence of gear tip relief on sun-planet mesh stiffness

(a) —修形长度影响; (b) —修形量影响.

2.2 齿圈-行星轮啮合刚度

齿圈-行星轮啮合有限元模型如图 2b 所示, 齿圈通过固定孔被约束, 而行星轮绕自身中心 O_2 自转同时绕齿圈中心 O_1 公转, 行星齿轮约束和加载方式和 2.1 节中的太阳轮的情况类似, 齿圈-行星轮啮合刚度同样可以通过式 (1) 获得, 这时 T, r_b 和 $\Delta\theta$ 分别表示行星轮输入扭矩、基圆半径、 O_2 扭转角.

齿轮修形对齿圈-行星轮啮合刚度同样有较

大的影响. 当修形量 $C_{a_pla} = C_a = 0.056\text{ mm}$, 修形长度 $L_{a_pla} = L_a = 0, 2.6, 3.6, 4.6, 5.6\text{ mm}$ 时, 啮合刚度如图 6a 所示. 当修形长度 $L_{a_pla} = L_a = 5.6\text{ mm}$, 修形量 $C_{a_pla} = C_a = 0, 0.006, 0.016, 0.036, 0.056\text{ mm}$ 时, 啮合刚度如图 6b 所示. 从图 6 中可以明显地看出修形长度越大, 双齿区域越小.

扭矩对齿圈-行星轮啮合刚度的影响如图 7 所示, 从图中可以看出随着扭矩的增大, 啮合刚度逐渐增大. 值得注意的是当齿圈-行星轮在齿圈固定孔

附近啮合时, 啮合刚度达到最大(见啮合位置 A, B, C); 齿轮在相邻固定孔中间区域啮合时, 啮合刚度达到最小(见啮合位置 D, E); 以上啮合刚度波动的原因是固定孔的约束作用使得固定孔周边齿圈基体的

刚性增加, 所以刚度较大. 但是, 距离固定孔较远的区域, 固定孔的约束作用明显减少, 齿圈基体柔性明显增大, 所以啮合刚度较小. 图 7 中固定孔 $\text{Pin}1, 2, 3$ 和啮合位置 D, E 如图 2b 所示.

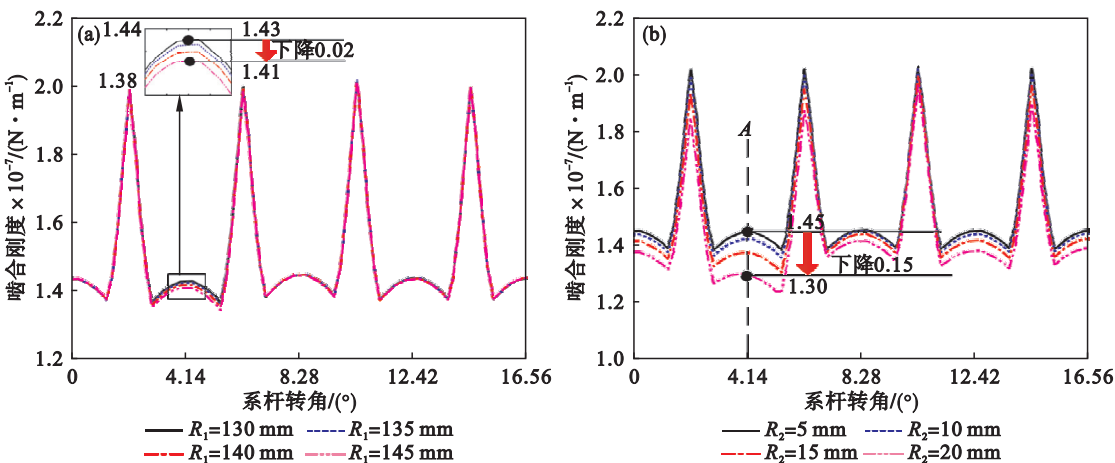


图 5 太阳轮减重孔对太阳轮-行星轮啮合刚度影响
Fig. 5 Influence of sun gear lightening hole on sun-planet mesh stiffness
(a)—减重孔位置影响; (b)—减重孔尺寸影响.

齿轮支持率 $m_{bh} = b/h$ 是指轮缘厚度 b 和全齿高 h 的比值, 其大小的改变会对啮合刚度产生影响, 继而会影响裂纹扩展路径^[10], 因此针对像齿圈这种轮缘厚度较薄的齿轮研究便显得尤为重要. 不同支持率条件下, 齿轮的啮合刚度如图 8 所示, 齿圈支持率 m_{bh} 从 2.88 增长到 4.88 (即齿圈轮缘越来越厚), 啮合位置 A, D 处的啮合刚度增长情况如表 2 所示. 其中 $\Delta K_{3.88} = K_{3.88} - K_{2.88}$, 即支持率 $m_{bh} = 3.88$ 和 $m_{bh} = 2.88$ 时, 啮合刚度之间差值, $P_{3.88} = (\Delta K_{3.88}/K_{2.88}) \times 100\%$, 即啮合刚度增加百分比, 表 2 中其他符号含义类似. 图 8 和表 2 显示, 随着齿圈支持率的增大, 啮合刚度逐渐增大, 但是 A 处啮合刚度增大百分比要明显小于 D 处, 这是由于在 A 处, 齿圈-行星轮在齿圈固

定孔附近啮合, 固定孔被约束死, 该处齿圈基体刚度很大, 整体角位移 $\Delta\theta$ 主要取决于轮齿弹性变形, 所以齿圈基体厚度的增大, 并不会带来明显的刚度增加. 但在 D 处, 啮合位置处于两相邻固定孔之间(见图 2b), $\Delta\theta$ 取决于轮齿和基体共同的弹性变形, 所以, 此时齿圈基体厚度的增大所带来的啮合刚度增大更加明显.

表 2 不同支持率啮合刚度比较				
Table 2 Mesh stiffness comparisons under various backup ratios				
位置	$\frac{\Delta K_{3.88} \times 10^{-7}}{\text{N} \cdot \text{m}^{-1}}$	$\frac{\Delta K_{4.88} \times 10^{-7}}{\text{N} \cdot \text{m}^{-1}}$	$\frac{P_{3.88}}{\%}$	$\frac{P_{4.88}}{\%}$
A	0.041	0.058	1.21	1.71
D	0.147	0.218	5.00	7.40

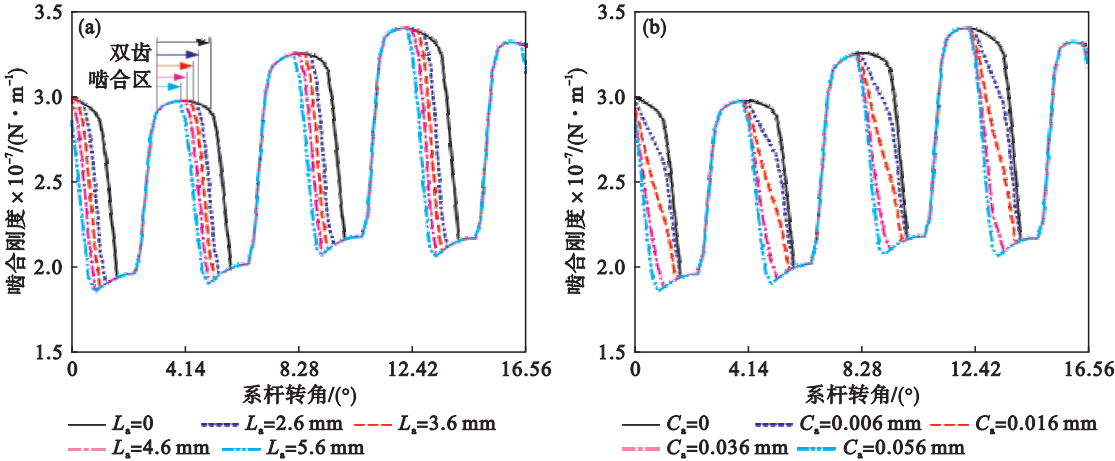


图 6 齿顶修形对齿圈-行星轮啮合刚度影响
Fig. 6 Influence of gear tip relief on ring-planet mesh stiffness
(a)—修形长度影响; (b)—修形量影响.

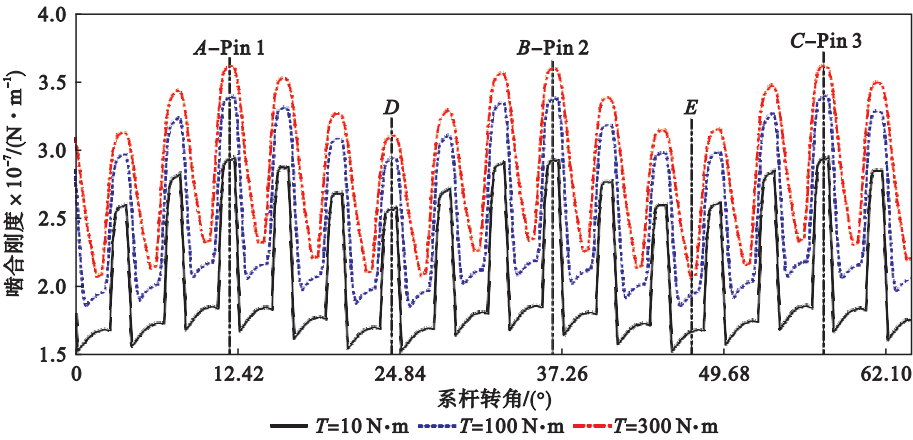


图 7 不同扭矩条件下齿圈-行星轮啮合刚度
Fig. 7 Ring-planet mesh stiffness under different torques

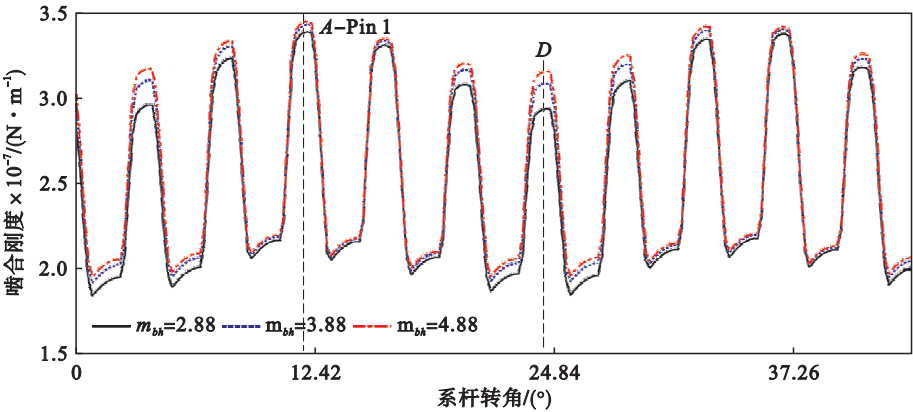


图 8 齿圈支持率对啮合刚度的影响
Fig. 8 Ring-planet mesh stiffness under different backup ratios

2.3 考虑柔性系杆的行星轮系啮合刚度

大多数文献研究不考虑系杆,即假设系杆为刚体,但实际生活中任何材料的系杆都不可能是刚体,皆具有柔性,现选用硬质铝合金、灰口铸铁、合金钢作为制造系杆材料,其弹性模量分别为 71,130,206 GPa,以此研究系杆柔性对行星轮系啮合刚度的影响.含柔性系杆行星轮系有限元模型如图 2c 所示,太阳轮和行星轮之间通过系杆联

结.不同材质系杆条件下,轮系啮合刚度如图 9 所示.图 9 表明,随着系杆弹性模量的减小,轮系啮合刚度明显减小,并且啮合刚度在啮合周期内波动减弱,这主要是由于随着系杆弹性模量的减小,系杆柔性增大,系杆变形在轮系整体弹性变形所起作用逐渐变大.

3 结 论

- 1) 齿顶修形使行星轮系单双齿过渡区域啮合刚度曲线更加平滑.当修形长度和修形量较大时,啮合刚度下降明显,有利于行星齿轮系统减振降噪.
- 2) 随着减重孔逐渐增大,啮合刚度逐渐减小.尤其当齿轮在减重孔附近啮合且处于单齿啮合区时,啮合刚度下降明显.但是,减重孔位置对啮合刚度影响较小.
- 3) 靠近齿圈固定孔位置处啮合刚度值比远离固定孔位置处的啮合刚度值大.随着齿圈支持率增大,啮合刚度逐渐增大,但靠近固定孔位置处

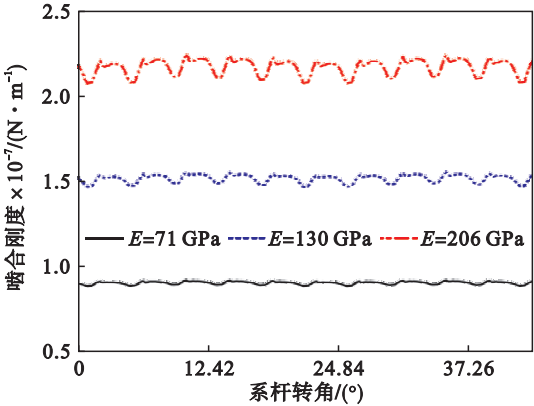


图 9 柔性系杆对啮合刚度的影响
Fig. 9 Effect of the flexible carrier arm on mesh stiffness

比远离固定孔位置处啮合刚度增大量小.

4) 随着系杆柔性的增大,行星轮系啮合刚度下降明显且周期性变化愈加平缓.

参考文献：

[1] Parker R G. Mesh phasing relationships in planetary and epicyclic gears[J]. *Journal of Mechanical Design*,2004,126 (2) :365 – 370.

[2] Liang X H, Zuo M J, Patel T H. Evaluating the time-varying mesh stiffness of a planetary gear set using the potential energy method [J]. *Journal of Mechanical Engineering Science*,2014,228(3) :535 – 547.

[3] Liang X H, Zuo M J, Pandey M. Analytically evaluating the influence of crack on the mesh stiffness of a planetary gear set [J]. *Mechanism and Machine Theory*,2014,76(6) :20 – 38.

[4] Chen Z G, Shao Y M. Dynamic simulation of planetary gear with tooth root crack in ring gear [J]. *Engineering Failure Analysis*,2013,31(9) :8 – 18.

[5] 杨扬,朱如鹏. 基于 APDL 的行星齿轮的参数化建模[J]. *机械工程师*,2008,3(3) :108 – 109.

(上接第 379 页)

统而言,其优势明显. 此研究对磁流变制动器后续的实际应用奠定了基础.

参考文献：

[1] Clarke P, Muneer T, Cullinane K. Cutting vehicle emissions with regenerative braking[J]. *Transportation Research Part D*,2010,15(3) :160 – 167.

[2] Gerla M, Lee E K, Pau G, et al. Internet of vehicles: from intelligent grid to autonomous cars and vehicular clouds[J]. *Internet of Things, IEEE*,2016,16(1) :241 – 246.

[3] Finn A, Scheduling S. Developments and challenges for autonomous unmanned vehicles [M]. Berlin: Intelligent Systems Reference Library,2012:56 – 77.

[4] 贺辉,宋大风,杨南南,等. 轮毂马达液驱系统控制与仿真 [J]. *吉林大学学报(工学版)*,2012,42(1) : 27 – 31. (He Hui, Song Da-feng, Yang Nan-nan, et al. Control and simulation of hydraulic in-wheel motor propulsion system [J]. *Journal of Jilin University(Engineering and Technology Edition)* ,2012,42(1) :27 – 31.)

[5] 陈勇,张建荣,张大明. 电动轮技术在电动汽车中的应用及发展趋势[J]. *机械设计与制造*,2006(10) :169 – 171. (Chen Yong, Zhang Jian-rong, Zhang Da-ming. State-of-art of application of hub-motor in electric vehicle [J].

(Yang Yang, Zhu Ru-peng. Parameterized modeling of planetary gears based on APDL [J]. *Mechanical Engineer*, 2008,3(3) :108 – 109.)

[6] Ambarisha V K, Parker R G. Nonlinear dynamics of planetary gears using analytical and finite element models [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2007, 302 (3) : 577 – 595.

[7] Xue S, Entwistle R, Mazhar I, et al. The spur planetary gear torsional stiffness and its crack sensitivity under quasi-static conditions[J]. *Engineering Failure Analysis*,2016,63:106 – 120.

[8] Xue S, Howard I. Torsional vibration signal analysis as a diagnostic tool for planetary gear fault detection [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2018, 100: 706 – 728.

[9] Fan L, Wang S P, Wang X J, et al. Nonlinear dynamic modeling of a helicopter planetary gear train for carrier plate crack fault diagnosis [J]. *Chinese Journal of Aeronautics*, 2016,29(3) :675 – 687.

[10] Pandya Y, Parey A. Crack behavior in a high contact ratio spur gear tooth and its effect on mesh stiffness [J]. *Engineering Failure Analysis*,2013,34:69 – 78.

Machinery Design and Manufacture,2006(10) :169 – 171.)

[6] Gudmundsson K H, Jonsdottir F, Thorsteinnsson F. A geometrical optimization of a magneto-rheological rotary brake in a prosthetic knee [J]. *Smart Materials and Structures*,2010,19(19) :035023.

[7] Park E J, Luz L F D, Suleman A. Multidisciplinary design optimization of an automotive magnetorheological brake design [J]. *Computers and Structures*, 2008, 86 (35) : 207 – 216.

[8] Farjoud A, Vahdati N, Fah Y F. Mathematical model of drum-type MR brakes using herschel-bulkley shear model [J]. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 2008,19(5) :565 – 572.

[9] Ashour O. Magnetorheological fluids: materials, characterization, and devices [J]. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 2010, 7 (2) : 123 – 130.

[10] Song W L, Li D H, Tao Y, et al. Simulation and experimentation of a magnetorheological brake with adjustable gap [J]. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*,2016,28(12) :1614 – 1626.

[11] 宋宇. 磁流变液 ABS 制动器结构研究与性能仿真 [D]. 哈尔滨:东北林业大学,2011. (Song Yu. Structure research and performance simulation of magnetorheological fluid ABS brake [D]. Harbin: Northeast Forestry University, 2011.)