

doi: 10.12068/j.issn.1005-3026.2019.05.003

带有传感器故障的不确定分数阶系统观测器设计

张雪峰, 刘博豪

(东北大学 理学院, 辽宁 沈阳 110819)

摘 要: 在考虑带有传感器故障和存在量测噪声的条件下, 设计了不确定分数阶系统的状态观测器. 通过利用增广矩阵和根据矩阵秩不变的性质, 把不确定分数阶系统增广为广义分数阶不确定系统. 根据线性矩阵不等式的分数阶系统稳定性判据, 考虑分数阶次在 $1 < q < 2$ 的范围, 给出误差动态系统渐近稳定的充分条件, 得到传感器故障和量测噪声的准确估计. 为了能在实际应用中得到更好的结果, 将观测器改进为不带输出导数的形式. 通过仿真算例验证了结果的有效性.

关 键 词: 不确定分数阶系统; 渐近稳定性; 线性矩阵不等式; 观测器设计; 传感器故障; 量测噪声

中图分类号: TP 13; TP 302.8 **文献标志码:** A **文章编号:** 1005-3026(2019)05-0619-06

Observer Design for Uncertain Fractional-Order Linear Systems with Sensor Fault

ZHANG Xue-feng, LIU Bo-hao

(School of Sciences, Northeastern University, Shenyang 110819, China. Corresponding author: ZHANG Xue-feng, E-mail: zhangxuefeng@mail.neu.edu.cn)

Abstract: The observer for the uncertain fractional-order system with sensor fault and system measurement noise is developed. By using the method of augmented matrix and the invariant property of matrix rank, the uncertain fractional-order system is augmented into the singular fractional-order uncertain system. Based on the linear matrix inequality approach of stability criterion for fractional-order systems, an asymptotic stability criterion of the error dynamic system with fractional-order satisfying $1 < q < 2$ is proved. An exact estimation with sensor fault and measurement noise is derived. In order to obtain better outcomes in practical application, the observer is improved to the form without output derivative. Through numerical examples, the obtained criterion is verified.

Key words: uncertain fractional-order systems; asymptotic stability; linear matrix inequalities (LMIs); observer design; sensor fault; measurement noise

分数阶微积分已有 300 多年的历史, 它是对整数阶微积分的推广和延伸. 利用分数阶导数来描述某些现象是更加合理的. 在实际生活中, 很多物理模型都可以利用分数阶微积分来进行刻画, 例如电子电路系统、热传导系统、电磁波系统、黏弹性系统都可以用分数阶微分方程来描述^[1-3]. 传感器作为控制系统的基本设备, 其特点是分布广、数量大, 数据测点可分布在各种不同设备的多个部位, 及时发现和识别传感器故障并能迅速做出决定来纠正它们是十分必要的.

目前, 有很多学者对观测器设计、故障诊断和消除噪声干扰进行了深入研究. 文献[4]利用矩阵秩的性质和 LMI 的方法对广义离散系统进行了观测器的设计; 文献[5]将网络控制系统与分数阶系统相结合, 设计了针对有网络诱导时延的分数阶最优 $PI^q D^q$ 控制器; 文献[6]研究了基于线性矩阵不等式的 Lipschitz 系统传感器的故障诊断; 文献[7]提出了一种用来正确分析同时存在动态噪声和量测噪声的时间序列系统的新方法; 文献[8]提出了一种新型的增广故障诊断观

测器的设计方法,不仅显著地拓宽了自适应故障诊断观测器的适用范围,而且使其具有处理系统扰动的良好性能;文献[9]通过静态输出反馈控制器研究了分数阶 T-S 模糊系统的稳定性,提出了一种基于 LMI 的控制器设计方法.

分数阶系统是比较整数阶系统更加一般化的一类系统. 本文对不确定分数阶系统的观测器设计问题进行了研究. 基于文献[9]的判据,将传感器故障、量测噪声和分数阶系统理论相结合,利用矩阵秩的性质对这类复杂系统进行状态观测器的设计. 构造误差系统,使误差系统渐近稳定,从而使观测器系统成功对原系统状态进行估计. 区别于已有文献的结果,本文考虑了存在故障的分数阶系统的控制问题.

1 问题描述与预备知识

考虑带有传感器故障和量测噪声的线性分数阶不确定系统:

$$\left. \begin{aligned} D^q \mathbf{x}(t) &= (\mathbf{A} + \Delta \mathbf{A}) \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t) \ , \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C} \mathbf{x}(t) + \mathbf{M} \mathbf{f}_s(t) + \mathbf{N} \mathbf{w}(t) \ . \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

其中:分数阶次 $1 < q < 2$; $\mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^n$ 是状态向量; $\mathbf{u}(t) \in \mathbf{R}^m$ 是控制输入向量; $\mathbf{y}(t) \in \mathbf{R}^p$ 是输出向量, $\mathbf{f}_s(t) \in \mathbf{R}^q$ 是传感器故障向量; $\mathbf{w}(t) \in \mathbf{R}^r$ 是量测噪声向量; 矩阵 $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n \times n}$; $\mathbf{B} \in \mathbf{R}^{n \times m}$; $\mathbf{C} \in \mathbf{R}^{p \times n}$; $\mathbf{M} \in \mathbf{R}^{p \times q}$; $\mathbf{N} \in \mathbf{R}^{p \times r}$ 是故障矩阵和噪声矩阵. 其中 $\Delta \mathbf{A}$ 代表不确定性,并且满足

$$\Delta \mathbf{A} = \mathbf{D} \mathbf{F}(\sigma) \mathbf{H} \ . \quad (2)$$

其中: \mathbf{D} 和 \mathbf{H} 是已知的常数矩阵; $\mathbf{F}(\sigma)$ 的元是 Lebesgue 可测的并且满足

$$\mathbf{F}^T(\sigma) \mathbf{F}(\sigma) \leq \mathbf{I} \ . \quad (3)$$

本文考虑的分数阶微分是在 Caputo 定义^[1]下的,表述为

$$D^q f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-q)} \int_0^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{q-n+1}} d\tau \ . \quad (4)$$

其中: n 为整数且满足条件 $n-1 < q < n$; $\Gamma(\cdot)$ 是 Gamma 函数^[1],表达形式为

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \ .$$

考虑系统(1),现将传感器故障项和量测噪声项合计为误差项 $\mathbf{x}_s(t)$,则有

$$\mathbf{x}_s(t) = \mathbf{M} \mathbf{f}_s(t) + \mathbf{N} \mathbf{w}(t) \ . \quad (5)$$

因为要同时估计状态和误差,现利用增广的思想将分数阶不确定系统(1)变为广义分数阶不确定系统:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}_a D^q \mathbf{x}_a(t) &= \mathbf{A}_a \mathbf{x}_a(t) + \mathbf{B}_a \mathbf{u}(t) + \mathbf{N}_a \mathbf{x}_s(t) \ , \\ \mathbf{y}_a(t) &= \mathbf{C}_a \mathbf{x}_a(t) \ . \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

其中: $\mathbf{B}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$; $\mathbf{N}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}$; $\mathbf{E}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$; $\mathbf{x}_a(t) =$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}_s(t) \end{bmatrix}; \mathbf{C}_a = [\mathbf{C} \quad \mathbf{I}]; \mathbf{A}_a = \mathbf{A}_1 + \mathbf{D}_A \mathbf{F}_A \mathbf{E}_A;$$

$$\mathbf{A}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{A} + \Delta \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I} \end{bmatrix}; \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I} \end{bmatrix}.$$

不确定项矩阵 $\mathbf{D}, \mathbf{F}, \mathbf{H}$ 的增广阵表示为

$$\mathbf{D}_A = \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \mathbf{F}_A = \begin{bmatrix} \mathbf{F}(\sigma) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{E}_A = \begin{bmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

很显然系统(6)是一个分数阶不确定广义系统,其中 $\mathbf{x}_a(t)$ 是由原始系统的状态向量 $\mathbf{x}(t)$, 传感器故障向量 $\mathbf{f}_s(t)$ 和量测噪声向量 $\mathbf{w}(t)$ 组成. 可以构造一个观测器来估计状态 $\mathbf{x}_a(t)$, 意味着可以同时重新构建 $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{f}_s(t)$ 和 $\mathbf{w}(t)$.

引理 1^[10] 分数阶系统 $D^q \mathbf{x}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t)$, 其中阶次属于 $1 < q < 2$ 时是渐近稳定的,当且仅当存在矩阵 $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T > 0$, 满足

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}) \sin(\frac{q\pi}{2}) & (\mathbf{A}^T \mathbf{P} - \mathbf{P} \mathbf{A}) \cos(\frac{q\pi}{2}) \\ (\mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{A}^T \mathbf{P}) \cos(\frac{q\pi}{2}) & (\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}) \sin(\frac{q\pi}{2}) \end{bmatrix} < 0. \quad (7)$$

引理 2^[11] 给定适当维数的矩阵 \mathbf{Z}, \mathbf{X} 和 \mathbf{Y} , 其中 \mathbf{Z} 是对称的,那么

$$\mathbf{Z} + \mathbf{X} \mathbf{F}(t) \mathbf{Y} + \mathbf{Y}^T \mathbf{F}^T(t) \mathbf{X}^T < 0 \ . \quad (8)$$

对任意的 $\mathbf{F}(t)$ 满足 $\mathbf{F}^T(t) \mathbf{F}(t) \leq \mathbf{I}$, 当且仅当存在一个标量 $\varepsilon > 0$, 使得

$$\mathbf{Z} + \varepsilon \mathbf{X} \mathbf{X}^T + \varepsilon^{-1} \mathbf{Y}^T \mathbf{Y} < 0 \ . \quad (9)$$

引理 3^[12] 对于任意给定的实矩阵 $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2$ 和 \mathbf{S}_3 , 其中, $\mathbf{S}_1 = \mathbf{S}_1^T, \mathbf{S}_3 > 0$, 有

$$\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 \mathbf{S}_3^{-1} \mathbf{S}_2^T < 0 \ . \quad (10)$$

当且仅当

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}_1 & \mathbf{S}_2 \\ \mathbf{S}_2^T & -\mathbf{S}_3 \end{bmatrix} < 0 \ . \quad (11)$$

引理 4^[8] 对于矩阵 $\mathbf{E} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 和 $\mathbf{C} \in \mathbf{R}^{p \times n}$, 如果满足

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{C} \end{bmatrix} = n \ .$$

那么一定存在矩阵 $[\mathbf{T} \quad \mathbf{N}]$ 满足:

$$\mathbf{T} \mathbf{E} + \mathbf{N} \mathbf{C} = \mathbf{I}_n.$$

引理 5^[9] 考虑如下的分数阶线性时不变系统：

$$\left. \begin{aligned} D^q \mathbf{x}(t) &= \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t), \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C} \mathbf{x}(t). \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

在静态输出反馈控制律下,有 $\mathbf{u}(t) = \mathbf{K} \mathbf{y}(t)$, 那么闭环系统可描述为

$$D^q \mathbf{x}(t) = (\mathbf{A} + \mathbf{B} \mathbf{K} \mathbf{C}) \mathbf{x}(t) = \mathbf{A}_k \mathbf{x}(t).$$

那么对于一些变量 $\varepsilon > 1$, 存在对称正定矩阵 \mathbf{Q} 和矩阵 \mathbf{K} 满足：

$$\text{Sym} \left\{ \boldsymbol{\Omega} \otimes \begin{bmatrix} \mathbf{A}_k \mathbf{Q} - (\varepsilon - 1) \mathbf{Q} & \mathbf{B} \mathbf{K} \mathbf{C} + \varepsilon \mathbf{I} \\ \varepsilon \mathbf{I} & (\varepsilon + 1)(\mathbf{Q} - 2\mathbf{I}) \end{bmatrix} \right\} < 0. \quad (13)$$

其中：

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} \sin \theta & \cos \theta \\ -\cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix}; \theta = \pi - \frac{q\pi}{2}.$$

使得闭环系统(13)是渐近稳定的.

2 主要结论

2.1 观测器设计

观察到系统(6)中的矩阵 \mathbf{E}_a 和 \mathbf{C}_a 满足：

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{E}_a \\ \mathbf{C}_a \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C} & \mathbf{I}_p \end{bmatrix} = n + p. \quad (14)$$

根据引理 4 可知, 存在行满秩矩阵 $[\mathbf{T}_1 \ \mathbf{T}_2]$ 使得

$$[\mathbf{T}_1 \ \mathbf{T}_2] \begin{bmatrix} \mathbf{E}_a \\ \mathbf{C}_a \end{bmatrix} = \mathbf{I}_{n+p}. \quad (15)$$

本文的目的是设计一个观测器来估计系统(6)的状态,设计观测器：

$$\begin{aligned} D^q \hat{\mathbf{x}}_a(t) &= \mathbf{T}_1 \mathbf{A}_a \hat{\mathbf{x}}_a(t) + \mathbf{L}(\mathbf{y}_a(t) - \mathbf{C}_a \hat{\mathbf{x}}_a(t)) + \\ &\quad \mathbf{T}_2 D^q \mathbf{y}_a(t) + \mathbf{T}_1 \mathbf{B}_a \mathbf{u}(t). \end{aligned} \quad (16)$$

其中, \mathbf{L} 为观测器向量. 又因为 $\mathbf{y}_a(t) = \mathbf{C}_a \mathbf{x}_a(t)$, 所以满足：

$$\mathbf{T}_2 D^q \mathbf{y}_a(t) = \mathbf{T}_2 \mathbf{C}_a D^q \mathbf{x}_a(t). \quad (17)$$

在式(6)的第一行左边乘以 \mathbf{T}_1 , 可以得到

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_1 \mathbf{E}_a D^q \mathbf{x}_a(t) &= \mathbf{T}_1 \mathbf{A}_a \mathbf{x}_a(t) + \\ &\quad \mathbf{T}_1 \mathbf{B}_a \mathbf{u}(t) + \mathbf{T}_1 \mathbf{N}_a \mathbf{x}_s(t). \end{aligned} \quad (18)$$

把式(17)加在等式(18)两边,并由式(15)可得

$$\begin{aligned} D^q \mathbf{x}_a(t) &= \mathbf{T}_1 \mathbf{A}_a \mathbf{x}_a(t) + \mathbf{T}_1 \mathbf{B}_a \mathbf{u}(t) + \mathbf{T}_1 \mathbf{N}_a \mathbf{x}_s(t) + \\ &\quad \mathbf{T}_2 D^q \mathbf{y}_a(t). \end{aligned} \quad (19)$$

现定义误差为

$$\mathbf{e}_a(t) = \mathbf{x}_a(t) - \hat{\mathbf{x}}_a(t). \quad (20)$$

用式(19)减去式(16),并由式(20)可得误差

动态方程为

$$D^q \mathbf{e}_a(t) = (\mathbf{T}_1 \mathbf{A}_a - \mathbf{L} \mathbf{C}_a) \mathbf{e}_a(t) + \mathbf{T}_1 \mathbf{N}_a \mathbf{x}_s(t). \quad (21)$$

令 $\mathbf{A}_s = \mathbf{T}_1 \mathbf{A}_a - \mathbf{L} \mathbf{C}_a$, 则式(21)可以写成

$$D^q \mathbf{e}_a(t) = \mathbf{A}_s \mathbf{e}_a(t) + \mathbf{T}_1 \mathbf{N}_a \mathbf{x}_s(t). \quad (22)$$

根据式(15)可以构造 \mathbf{T}_1 和 \mathbf{T}_2 ：

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{R}_1 \\ -\mathbf{C} & \mathbf{R}_2 \end{bmatrix}, \mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}. \quad (23)$$

使得等式成立：

$$\mathbf{T}_1 \mathbf{E}_a + \mathbf{T}_2 \mathbf{C}_a = \mathbf{I}.$$

其中, \mathbf{R}_1 和 \mathbf{R}_2 是适当维数的任意矩阵. 如果选取适当矩阵,使得误差动态方程(22)的 $\mathbf{x}_s(t)$ 可以消除,那么系统就变得更加容易操作. 因此,选取 \mathbf{T}_1 为

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (24)$$

所以,此时满足：

$$\mathbf{T}_1 \mathbf{N}_a = \mathbf{0}.$$

误差动态方程可表述为

$$D^q \mathbf{e}_a(t) = (\mathbf{T}_1 \mathbf{A}_a - \mathbf{L} \mathbf{C}_a) \mathbf{e}_a(t), 1 < q < 2. \quad (25)$$

2.2 误差动态系统稳定性分析

定理 1 存在 $\varepsilon > 1$, 使得误差动态系统(25)是渐近稳定的,若存在对称矩阵 $\mathbf{Q} > 0$, \mathbf{L} 和参数 $\gamma > 0$ 满足：

$$\left[\begin{array}{cccccccc} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} & \lambda_{14} & \lambda_{15} & 0 & 0 & 0 \\ * & \lambda_{22} & \lambda_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \lambda_{33} & \lambda_{34} & 0 & 0 & \lambda_{37} & 0 \\ * & * & * & \lambda_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & \lambda_{55} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & \lambda_{66} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & \lambda_{77} & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & \lambda_{88} \end{array} \right] < 0. \quad (26)$$

其中: $\lambda_{11} = \lambda_{33} = \text{Sym} \{ \mathbf{T}_1 \mathbf{A}_1 \mathbf{Q} \} \sin \theta - 2(\varepsilon - 1) \times \mathbf{Q} \sin \theta + \gamma(\mathbf{T}_1 \mathbf{D}_A)(\mathbf{T}_1 \mathbf{D}_A)^T$; $\lambda_{12} = \lambda_{34} = (-\mathbf{L} \mathbf{C}_a + 2\varepsilon \mathbf{I}) \sin \theta$; $\lambda_{13} = (\mathbf{T}_1 \mathbf{A}_1 \mathbf{Q} - \mathbf{Q} \mathbf{A}_1^T \mathbf{T}_1^T) \cos \theta$; $\lambda_{14} = -\mathbf{L} \mathbf{C}_a \cos \theta$; $\lambda_{15} = \lambda_{37} = \mathbf{Q} \mathbf{E}_A^T$; $\lambda_{22} = \lambda_{44} = 2(\varepsilon + 1)(\mathbf{Q} - 2\mathbf{I}) \sin \theta$; $\lambda_{23} = \mathbf{C}_a^T \mathbf{L}^T \cos \theta$; $\lambda_{55} = \lambda_{66} = \lambda_{77} = \lambda_{88} = -\gamma \mathbf{I}$.

证明 假设存在对称矩阵 $\mathbf{Q} > 0$, 矩阵 \mathbf{L} 和实数 $\varepsilon > 1$, 可得

$$\text{Sym} \left\{ \boldsymbol{\Omega} \otimes \begin{bmatrix} (\mathbf{T}_1 \mathbf{A}_1 + \mathbf{T}_1 \mathbf{D}_A \mathbf{F}_A \mathbf{E}_A) \mathbf{Q} - (\varepsilon - 1) \mathbf{Q} \\ \varepsilon \mathbf{I} \end{bmatrix} \right\}$$

$$-LC_a + \varepsilon I \left. \vphantom{\begin{matrix} \rho_{11} & \lambda_{12} & \rho_{13} & \lambda_{14} \\ * & \lambda_{22} & \lambda_{23} & 0 \\ * & * & \rho_{11} & \lambda_{12} \\ * & * & * & \lambda_{22} \end{matrix}} \right\} = \begin{bmatrix} \rho_{11} & \lambda_{12} & \rho_{13} & \lambda_{14} \\ * & \lambda_{22} & \lambda_{23} & 0 \\ * & * & \rho_{11} & \lambda_{12} \\ * & * & * & \lambda_{22} \end{bmatrix}. \quad (27)$$

其中: $\rho_{11} = \text{Sym} \{ (T_1 A_1 Q + T_1 D_A F_A E_A Q) \times \sin \theta \}$
 $- 2(\varepsilon - 1) Q \sin \theta$; $\rho_{33} = (T_1 A_1 Q - Q A_1^T T_1^T) \cos \theta +$
 $\text{Sym} \{ T_1 D_A F_A E_A Q \} \sin \theta$.

式(27)可以被进一步计算为

$$\text{Sym} \left\{ \begin{bmatrix} T_1 D_A F_A E_A Q \sin \theta & 0 & T_1 D_A F_A E_A Q \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -T_1 D_A F_A E_A Q \cos \theta & 0 & T_1 D_A F_A E_A Q \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} +$$

$$\begin{bmatrix} \eta_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} & \lambda_{14} \\ * & \lambda_{22} & \lambda_{23} & 0 \\ * & * & \eta_{11} & \lambda_{12} \\ * & * & * & \lambda_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_{11} & \lambda_{12} & \rho_{13} & \lambda_{14} \\ * & \lambda_{22} & \lambda_{23} & 0 \\ * & * & \rho_{11} & \lambda_{12} \\ * & * & * & \lambda_{22} \end{bmatrix}.$$

其中, $\eta_{11} = \text{Sym} \{ T_1 A_1 Q \sin \theta \} - 2(\varepsilon - 1) Q \times \sin \theta$.

又因为

$$\lambda_{11} = \lambda_{33} = \eta_{11} + \gamma (T_1 D_A) (T_1 D_A)^T.$$

其中:

$$\hat{x}(t) \gamma \begin{bmatrix} T_1 D_A \sin \theta & 0 & T_1 D_A \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -T_1 D_A \cos \theta & 0 & T_1 D_A \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times$$

$$\begin{bmatrix} D_A^T T_1^T \sin \theta & 0 & -D_A^T T_1^T \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_A^T T_1^T \cos \theta & 0 & D_A^T T_1^T \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} +$$

$$\frac{1}{\gamma} \begin{bmatrix} Q E_A^T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q E_A^T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_A Q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_A Q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} \eta_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} & \lambda_{14} \\ * & \lambda_{22} & \lambda_{23} & 0 \\ * & * & \eta_{11} & \lambda_{12} \\ * & * & * & \lambda_{22} \end{bmatrix} < 0.$$

又因为

$$\begin{bmatrix} F_A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F_A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F_A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T < I. \quad (28)$$

根据式(28)和引理 2 可得

$$\text{Sym} \left\{ \begin{bmatrix} T_1 D_A \sin \theta & 0 & T_1 D_A \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -T_1 D_A \cos \theta & 0 & T_1 D_A \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \right.$$

$$\left. \begin{bmatrix} F_A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F_A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_A Q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_A Q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} +$$

$$\begin{bmatrix} \eta_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} & \lambda_{14} \\ * & \lambda_{22} & \lambda_{23} & 0 \\ * & * & \eta_{11} & \lambda_{12} \\ * & * & * & \lambda_{22} \end{bmatrix} < 0. \quad (29)$$

由式(27)和式(29)可知,满足

$$\text{Sym} \left\{ \Omega \otimes \begin{bmatrix} (T_1 A_1 + T_1 D_A F_A E_A) Q - (\varepsilon - 1) Q \\ \varepsilon I \end{bmatrix} \right.$$

$$\left. - LC_a + \varepsilon I \right\} < 0.$$

由引理 5 可知,误差动态系统(25)渐近稳定,定理 1 得证.

2.3 传感器故障和量测噪声的准确估计

已经利用增广的方法构造了广义不确定分数阶系统,并设计了状态观测器.增广后广义系统的状态向量 $x_a(t)$ 可以同时表示 $x(t)$, $f_s(t)$ 和 $w(t)$. 所以传感器故障 $f_s(t)$ 和量测噪声 $w(t)$ 的准确估计可以解出来.

定理 2 考虑系统(6),传感器故障 $f_s(t)$ 和量测噪声 $w(t)$ 的准确估计为

$$f_s(t) = [I \ 0] (W_s^T W_s)^{-1} W_s^T [0 \ I] \hat{x}_a(t), \quad (30)$$

$$w(t) = [0 \ I] (W_s^T W_s)^{-1} W_s^T [0 \ I] \hat{x}_a(t). \quad (31)$$

当且仅当矩阵 $W_s = [M \ N]$ 是列满秩的.

证明 由于满足

$$\hat{x}_a(t) = \begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ \hat{x}_s(t) \end{bmatrix}.$$

初始系统状态 $\hat{x}(t)$ 和误差系统的状态 $\hat{x}_s(t)$ 都可以通过增广后的 $\hat{x}_a(t)$ 同时获得,那么可以得到

$$\hat{x}(t) = [I \ 0] \hat{x}_a(t), \quad (32)$$

$$\hat{x}_s(t) = [0 \ I] \hat{x}_a(t). \quad (33)$$

令 $W_s = [M \ N]$ 是列满秩的,则有

$$[0 \ I] \hat{x}_a(t) = W_s \begin{bmatrix} \hat{f}_s(t) \\ \hat{w}(t) \end{bmatrix}. \quad (34)$$

在等式(34)两端同时乘上 $(W_s^T W_s)^{-1} W_s^T$

可得

$$\begin{aligned} (W_s^T W_s)^{-1} W_s^T \hat{x}_s(t) &= (W_s^T W_s)^{-1} W_s^T W_s \\ &\begin{bmatrix} \hat{f}_s(t) \\ \hat{w}_s(t) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (35)$$

所以

$$(W_s^T W_s)^{-1} W_s^T [0 \quad I] x_a(t) = \begin{bmatrix} \hat{f}_s(t) \\ \hat{w}(t) \end{bmatrix}. \quad (36)$$

所以可得

$$[I \quad 0] (W_s^T W_s)^{-1} W_s^T [0 \quad I] \hat{x}_a(t) = \hat{f}_s(t), \quad (37)$$

$$[0 \quad I] (W_s^T W_s)^{-1} W_s^T [0 \quad I] \hat{x}_a(t) = \hat{w}(t). \quad (38)$$

2.4 观测器改进

因为设计的观测器中存在 $D^q y_a(t)$ 输出导数项,这使得观测器在控制系统综合中的实现变得比较困难.为了能在实际应用中得到更好的结果,将观测器改进为不带输出导数的形式就变得尤为重要.

定理3 考虑系统(16),可用矩阵 K_1, H_1, W_1 和 S 来为这个系统重新构造观测器:

$$\left. \begin{aligned} D^q \xi(t) &= K_1 \xi(t) + H_1 u(t) + W_1 y_a(t), \\ \hat{x}_a(t) &= \xi(t) + S y_a(t). \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

其中 $\xi(t)$ 是辅助变量,并且有

$$\left. \begin{aligned} K_1 &= T_1 A_a - L C_a, \\ H_1 &= T_1 B_a, \\ W_1 &= T_1 A_a T_2 - L C_a T_2 + L, \\ S &= T_2. \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

证明 对于式(25)所描述的误差动态方程,都满足 $T_1 N_a = 0$,考虑观测器系统(16),为了能够估计 $D^q y_a(t)$,可以引入一个辅助变量 $\xi(t)$,满足

$$\xi(t) = \hat{x}_a(t) - S y_a(t). \quad (41)$$

所以有

$$\begin{aligned} D^q \xi(t) &= D^q \hat{x}_a(t) - S D^q y_a(t) = \\ &(T_1 A_a - L C_a) \xi(t) + T_1 B_a u(t) + \\ &(T_1 A_a T_2 - L C_a T_2 + L) y_a(t). \end{aligned} \quad (42)$$

根据式(41)可以推出

$$\hat{x}_a(t) = \xi(t) + T_2 y_a(t). \quad (43)$$

由式(42)和式(43)可以推出如下系统表达式成立:

$$\left. \begin{aligned} D^q \xi(t) &= (T_1 A_a - L C_a) \xi(t) + T_1 B_a u(t) + \\ &(T_1 A_a T_2 - L C_a T_2 + L) y_a(t), \\ \hat{x}_a(t) &= \xi(t) + T_2 y_a(t). \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

比较式(39)和式(44)可知,可以设计观测器系统(16)参数矩阵.定理得证.

3 仿真算例

Westerlund 等^[13]通过实验测定出不同电介

质下分数阶电容的阶次.对于不同的 RLC 电网络系统,根据柯西霍夫定律,容易构造如下参数的分数阶系统的实例.

例1 考虑分数阶不确定系统(1),取 $q = \frac{3}{2}$,且有

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1.4 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} -1 & -4 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.15 \\ 0.2 & -0.1 \end{bmatrix},$$

$$F(\sigma) = \begin{bmatrix} \sin \sigma & 0 \\ 0 & \cos \sigma \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 \\ 0.2 & -0.2 \end{bmatrix},$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

那么,在系统(1)对应的增广不确定分数阶广义系统(6)中有

$$A_1 = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad E_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D_A = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.15 & 0 \\ 0.2 & -0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_A = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 & 0 \\ 0.2 & -0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$N_a = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C_a = \begin{bmatrix} -1 & -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

在这里取 $F_A(\sigma)$ 为

$$F_A = \begin{bmatrix} \sin(0.2\pi) & 0 & 0 \\ 0 & \cos(0.2\pi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

由式(23)和式(24)可知

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad T_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

现取 $\varepsilon = 20$,利用 Matlab 的 LMI 工具箱求解式(26),得到可行解为

$$Q = \begin{bmatrix} 0.9185 & -0.0992 & 0.0029 \\ -0.0992 & 0.4273 & 0.1239 \\ 0.0029 & 0.1239 & 1.0155 \end{bmatrix},$$

$$\gamma = 0.2356,$$

$$L = \begin{bmatrix} -2.0330 & -2.9545 & 2.1794 \end{bmatrix}^T.$$

误差动态系统(25)的状态响应曲线如图1所示,可以看出,系统(6)在6s左右就已趋于稳定.

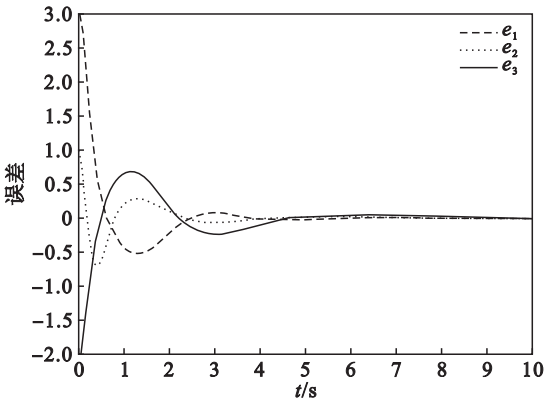


图 1 例 1 中误差动态系统的状态响应
Fig. 1 State responses of error dynamic system of example 1

4 结 语

本文设计了带有传感器故障和量测噪声的不确定分数阶系统状态观测器. 对系统状态、故障和量测噪声同时进行估计. 通过数值算例和系统仿真,验证了分数阶次为 $1 < q < 2$ 时误差动态方程渐近稳定充分性判据的可行性,使得观测器在控制系统综合中的实现更容易,对于进一步进行分数阶广义系统的研究具有启发意义. 未来的工作是将该方法应用于更复杂的系统,例如分数阶阶次为 $0 < q < 1$ 时的观测器设计问题,分数阶非线性系统或分数阶马尔科夫跳变系统的稳定性分析等.

参考文献:

[1] Podlubny I. Fractional differential equations[M]. San Diego: Academic Press,1999.

[2] Monje C A,Chen Y Q,Vinagre B M,et al. Fractional-order systems and controls[M]. Berlin:Springer,2010.

[3] Tavazoei M S,Haeri M. A note on the stability of fractional order systems [J]. *Mathematics and Computers in Simulation*,2009,79(5):1566 – 1576.

[4] Wang Z H,Shen Y,Zhang X L,et al. Observer design for discrete-time descriptor systems; an LMI approach [J]. *Systems and Control Letters*,2012(61):683 – 687.

[5] 高宪文,杜津名,齐文海. 执行器饱和的随机 Markov 切换系统的观测器设计 [J]. *东北大学学报(自然科学版)*,2016,37(1):1 – 5.
(Gao Xian-wen,Du Jin-ming,Qi Wen-hai. Observer design for stochastic Markov switching systems with actuator saturation [J]. *Journal of Northeastern University (Natural Science)*,2016,37(1):1 – 5.)

[6] Pertew A M,Marquez H J,Zhao Q. LMI-based sensor fault diagnosis for nonlinear Lipschitz systems [J]. *Automatica*,2007,43:1464 – 1469.

[7] Bottcher F,Peinke J,Kleinhans D,et al. Reconstruction of complex dynamical systems affected by strong measurement noise [J]. *Physical Review Letters*,2006,97(9):1 – 5.

[8] 张珂,姜斌. 基于故障诊断观测器的输出反馈容错控制设计 [J]. *自动化学报*,2010,36(2):274 – 281.
(Zhang Ke,Jiang Bin. Fault diagnosis observer-based output feedback fault tolerant control design [J]. *Acta Automatica Sinica*,2010,36(2):274 – 281.)

[9] Lin C,Chen B,Wang Q. Static output feedback stabilization for fractional-order systems in T-S fuzzy models [J]. *Neurocomputing*,2016(218):354 – 358.

[10] Sabtier J,Farges C,Trigeassou J C. A stability test for non-commensurate fractional order systems [J]. *Systems & Control Letters*,2013,62(9):739 – 746.

[11] Xie L. Output feedback H_{∞} control of systems with parameter uncertainty [J]. *International Journal of Control*,1996, 63: 741 – 750.

[12] 张庆灵,张雪峰,翟丁. 控制理论基础 [M]. 北京:高等教育出版社,2008.
(Zhang Qing-ling,Zhang Xue-feng,Zhai Ding. Fundamental of control basis [M]. Beijing: Higher Education Press,2008.)

[13] Westerlund S,Ekstam L. Capacitor theory [J]. *IEEE Transactions on Dielectrics and Electrical Insulation*,1994,1(5):826 – 839.