

基于有限元法的硬涂层－整体叶盘振动特性

高峰^{1,2}, 孙伟^{1,2}, 高俊男^{1,2}
(1. 东北大学 机械工程与自动化学院, 辽宁 沈阳 110819; 2. 东北大学 航空动力装备振动及控制教育部重点实验室, 辽宁 沈阳 110819)

摘 要: 基于有限元法研究了硬涂层－整体叶盘的振动特性和硬涂层的阻尼减振性能. 首先, 基于能量法、复合 Mindlin 板理论和复模量理论建立了硬涂层－整体叶盘结构的动力学方程; 其次, 求解了硬涂层－整体叶盘结构的模态特性和振动响应; 最后, 以叶片涂敷 NiCoCrAlY + YSZ 硬涂层的整体叶盘为实例, 从理论和实验两方面校验有限元模型和硬涂层对整体叶盘的影响. 结果表明, NiCoCrAlY + YSZ 硬涂层对整体叶盘固有频率的影响微弱, 但是有较强的阻尼增强效应, 能够显著抑制振动响应.

关 键 词: 整体叶盘; 阻尼减振; 硬涂层; 有限元法; 动力学分析

中图分类号: TH 113.1; TB 535 **文献标志码:** A **文章编号:** 1005-3026(2019)05-0688-06

Vibration Characteristics Study for the Hard Coating Blisk Using Finite Element Method

GAO Feng^{1,2}, SUN Wei^{1,2}, GAO Jun-nan^{1,2}
(1. School of Mechanical Engineering & Automation, Northeastern University, Shenyang 110819, China; 2. Key Laboratory of Ministry of Education on Vibration and Its Control of Aerospace Power Equipment, Northeastern University, Shenyang 110819, China. Corresponding author: SUN Wei, E-mail: weisunneu@qq.com)

Abstract: Vibration characteristics of hard coating blisk and the damped vibration reduction of hard coating were investigated using finite element method. Firstly, the equation of motion of hard coating blisk was achieved according to the energy method and the Mindlin plate theory and the complex modulus theory; then, modal characteristics and forced vibration response of hard coating blisk were solved; finally, a blisk with NiCoCrAlY + YSZ deposition hard coating on both sides of blades was taken as study case, the finite element model of hard coating blisk was validated by the theoretical analysis and experimental test. The results reveal that the NiCoCrAlY + YSZ hard coating has weak effect on natural frequencies, but a strong damping effect on the blisk, and forced responses of the blisk were suppressed remarkably by the NiCoCrAlY + YSZ hard coating.

Key words: blisk; damped vibration reduction; hard coating; finite element method; dynamic analysis

整体叶盘能够简化发动机结构,减轻整机质量,提高推重比,使其刚性好、平衡精度高^[1]. 与传统的榫连叶盘结构类似,整体叶盘结构也有模态密集的特点,在气流激励下容易发生共振,使盘片局部振动超标,从而严重威胁飞行安全^[2].

对于一体化的整体叶盘,传统的干摩擦阻尼^[3]、压电阻尼^[4]和约束层阻尼^[5]等阻尼器应用困难. 可以通过结构优化设计来实施整体叶盘的减振^[6],但是该方法的计算量庞大,灵活性较差.

近年来研究发现,硬涂层颗粒间的内部摩擦^[7]能够提高阻尼能力^[8-9],形成硬涂层阻尼减振研究的新方向. 为了有效实施整体叶盘硬涂层阻尼减振技术,需要创建硬涂层－整体叶盘结构动力学分析模型. Beck 等^[10]基于 ANSYS 软件创建了面向一个双流道的整体叶盘,采用减缩模型分析了叶盘结构的振动特性. Bhartiya 等^[11]利用 ANSYS 软件创建了两级叶盘结构的基础模型,并进行了几何失谐分析. 陆山等^[6]借助于 ANSYS

软件对整体叶盘结构进行了建模及优化设计研究. 上述研究主要借助于工程有限元软件, 虽然通用性较强, 但也存在弊端: ①在参数的设定、调整及信息的提取上操作繁琐; ②使用者不能获知有限元工程软件的底层原理与运算规则, 在叶盘结构减缩、结构优化设计等方面非常不灵活.

因此, 本文基于有限元法建立了硬涂层-整体叶盘结构的动力学模型, 并分析了硬涂层-整体叶盘结构的振动特性. 首先, 基于能量法、复合 Mindlin 板理论和复模量理论, 推导了硬涂层-整体叶盘结构的动力学方程; 其次, 求解了硬涂层-整体叶盘结构的模态特性和振动响应; 最后, 以叶片双面涂敷 NiCrAlCoY + YSZ 硬涂层的整体叶盘为实例进行研究, 通过实验校验了硬涂层-整体叶盘结构有限元模型, 并分析了硬涂层及其厚度对整体叶盘振动特性的影响.

1 硬涂层-整体叶盘有限元建模

图1 为叶片双面涂敷硬涂层的整体叶盘模

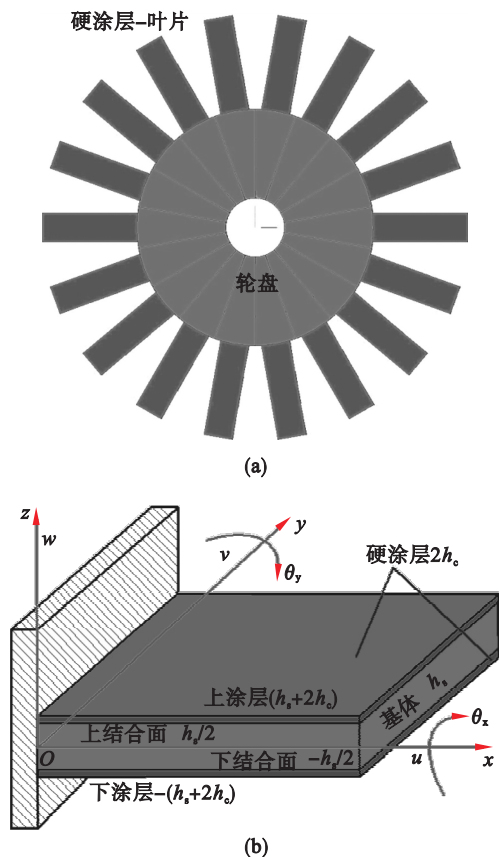


图1 硬涂层-整体叶盘和硬涂层-叶片

Fig. 1 The hard coating blisk and hard coating blade

(a) 整体; (b) 硬涂层.

型, 涂敷厚度相同, 图中 h_s 、 h_c 分别表示叶片与硬涂层的厚度. 轮盘和硬涂层-叶片结构分别应用

单层 Mindlin 板单元和复合 Mindlin 板单元建模.

根据 Mindlin 板理论可知, 硬涂层-叶片结构上的某一点 (x, y, z) 在 x, y 和 z 轴的位移分量 (u, v, w) 可以表示为

$$\left. \begin{aligned} u(x, y, z) &= z\theta_y(x, y), \\ v(x, y, z) &= -z\theta_x(x, y), \\ w(x, y, z) &= w(x, y). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中, θ_x 和 θ_y 分别表示中性面法线绕 x 轴与 y 轴转角.

那么, 硬涂层-叶片结构上任一点的平面应变 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 和横向剪切应变 $\boldsymbol{\gamma}$ 与位移的关系分别为

$$\boldsymbol{\varepsilon} = -\boldsymbol{\chi} = -z \left[-\frac{\partial \theta_y}{\partial x} \quad \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \quad \frac{\partial \theta_x}{\partial x} - \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right]^T, \quad (2)$$

$$\boldsymbol{\gamma} = [\gamma_{xz} \quad \gamma_{yz}]^T = \left[\frac{\partial w}{\partial x} + \theta_y \quad \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_x \right]^T. \quad (3)$$

硬涂层-叶片结构的能量(应变能 U 和动能 T) 分别是硬涂层和叶片的能量之和, 可以表示为

$$U = \iint_S \frac{(h_s + 2h_c)^3 - h_s^3}{24} \boldsymbol{\chi}^T \mathbf{D}_c \boldsymbol{\chi} dS + \iint_S \kappa h_c \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{D}_c^s \boldsymbol{\gamma} dS + \frac{1}{2} \left(\iint_S \frac{h_s^3}{12} \boldsymbol{\chi}^T \mathbf{D}_s \boldsymbol{\chi} dS + \iint_S \kappa h_s \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{D}_s^s \boldsymbol{\gamma} dS \right), \quad (4)$$

$$T = \iint_S \rho_c \left[h_c \dot{w}^2 + \frac{(h_s + 2h_c)^3 - h_s^3}{24} \dot{\theta}_x^2 + \frac{(h_s + 2h_c)^3 - h_s^3}{24} \dot{\theta}_y^2 \right] dS + \frac{1}{2} \iint_S \rho_s \left[h_s \dot{w}^2 + \frac{h_s^3}{12} \dot{\theta}_x^2 + \frac{h_s^3}{12} \dot{\theta}_y^2 \right] dS. \quad (5)$$

式中: κ 为剪切修正系数^[12]; ρ_s 和 ρ_c 分别为叶片和硬涂层的密度; \mathbf{D}_s 、 \mathbf{D}_s^s 和 \mathbf{D}_c 、 \mathbf{D}_c^s 分别为硬涂层和叶片的弯曲弹性与横向剪切弹性矩阵:

$$\mathbf{D}_s = \frac{E_s^*}{1 - \gamma_s^2} \begin{bmatrix} 1 & \gamma_s & 0 \\ \gamma_s & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \gamma_s)/2 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

$$\mathbf{D}_s^s = \frac{E_s^*}{2(1 + \gamma_s)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$E_s^* = E_s(1 + i\eta_s).$$

$$\mathbf{D}_c = \frac{E_c^*}{1 - \gamma_c^2} \begin{bmatrix} 1 & \gamma_c & 0 \\ \gamma_c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \gamma_c)/2 \end{bmatrix}, \quad (7)$$

$$\mathbf{D}_c^s = \frac{E_c^*}{2(1 + \gamma_c)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$E_c^* = E_c(1 + i\eta_c).$$

式中: E_s^* 、 E_s 、 η_s 和 γ_s 分别表示叶片的复弹性模量、杨氏模量、材料损耗因子和泊松比; E_c^* 、 E_c 、 η_c

和 γ_c 分别表示硬涂层的复弹性模量、杨氏模量、损耗因子和泊松比.

本文选用 4 节点等参板单元对硬涂层 - 叶片结构进行离散化处理,如图 2 所示.

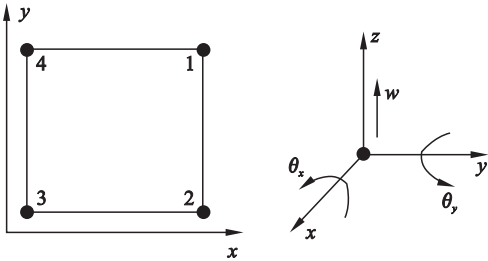


图 2 4 节点 Mindlin 等参板单元

Fig. 2 Iso-parametric Mindlin plate element with 4 nodes

单元的节点位移向量 $\delta^{(e)}$ 和节点的形函数矩阵 N 分别表示为

$$\delta^{(e)} = [w_1 \quad \theta_{x1} \quad \theta_{y1} \quad \cdots \quad w_4 \quad \theta_{x4} \quad \theta_{y4}]^T, \tag{8}$$

$$\left. \begin{aligned} N &= [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4], \\ N_k &= (1 - \xi_k \xi)(1 - \eta_k \eta)/4, (k=1, 2, 3, 4). \end{aligned} \right\} \tag{9}$$

式中, ξ_k, η_k 为节点 k 在自然坐标中的坐标值. 单元内一点的位移 δ 和速度 $\dot{\delta}$ 可用位移插值.

$$\delta = [w \quad \theta_x \quad \theta_y]^T = N \delta^{(e)}, \tag{10}$$

$$\dot{\delta} = N \dot{\delta}^{(e)}. \tag{11}$$

由式(4)与式(10)得到单元应变能为

$$\begin{aligned} U^{(e)} &= \delta^{(e)T} \left(\iint_S \frac{(h_s + 2h_c)^3}{12} B_f^T D_c B_f dS \right) \delta^{(e)} + \\ &\delta^{(e)T} \left(\iint_S \kappa (h_s + 2h_c) B_s^T D_c^{sh} B_s dS \right) \delta^{(e)} + \\ &\frac{1}{2} \delta^{(e)T} \left(\iint_S \frac{(h_s + 2h_c)^3}{12} B_f^T D_s B_f dS \right) \delta^{(e)} + \\ &\frac{1}{2} \delta^{(e)T} \left(\iint_S \kappa (h_s + 2h_c) B_s^T D_s^{sh} B_s dS \right) \delta^{(e)}. \end{aligned} \tag{12a}$$

式中, B_f 和 B_s 分别是弯曲应变矩阵和横向剪切应变矩阵,且可表示为

$$\left. \begin{aligned} B_f &= [B_{f,1} \quad B_{f,2} \quad B_{f,3} \quad B_{f,4}], \\ B_{f,k} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\partial N_k / \partial x \\ 0 & \partial N_k / \partial y & 0 \\ 0 & \partial N_k / \partial x & -\partial N_k / \partial y \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \tag{12b}$$

$$\left. \begin{aligned} B_s &= [B_{s,1} \quad B_{s,2} \quad B_{s,3} \quad B_{s,4}], \\ B_{s,k} &= \begin{bmatrix} \partial N_k / \partial x & 0 & N_k \\ \partial N_k / \partial y & -N_k & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \tag{12c}$$

由式(5)与式(11)得到单元动能为

$$\begin{aligned} T^{(e)} &= \delta^{(e)T} \left(\iint_S \rho_c N^T H_c N dS \right) \delta^{(e)} + \\ &\frac{1}{2} \delta^{(e)T} \left(\iint_S \rho_s N^T H_s N dS \right) \delta^{(e)}, \end{aligned} \tag{13a}$$

$$H_c = \text{diag} \left[h_c \frac{(h_s + 2h_c)^3 - h_s^3}{24} \frac{(h_s + 2h_c)^3 - h_s^3}{24} \right], \tag{13b}$$

$$H_s = \text{diag} \left[h_s \frac{h_s^3}{12} \frac{h_s^3}{12} \right]. \tag{13c}$$

依据哈密顿原理和式(12)式(13),最终得到硬涂层 - 叶片结构的单元复刚度矩阵和质量矩阵,分别为

$$\begin{aligned} k^{(e)} &= \iint_S \frac{h_s^3}{12} B_f^T D_s B_f dS + \iint_S \kappa h_s B_s^T D_s^{sh} B_s dS + \\ &2 \left[\iint_S \frac{(h_s + 2h_c)^3 - h_s^3}{24} B_f^T D_c B_f dS + \iint_S \kappa h_c B_s^T D_c^{sh} B_s dS \right], \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} m^{(e)} &= 2 \iint_S \rho_c N^T H_c N dS + \iint_S \rho_s N^T H_s N dS. \end{aligned} \tag{15}$$

特别地,将上述推导中与硬涂层相关的参数全部设为 0,即可得到轮盘结构的单元刚度和质量矩阵.将硬涂层 - 叶片及轮盘结构的单元刚度及质量矩阵进行组集,便可获得硬涂层 - 整体叶盘的复刚度 K^* 和质量矩阵 M ,其动力学方程表示为

$$M \ddot{\delta} + K^* \delta = F. \tag{16}$$

式中, δ 和 F 分别为位移向量和激振力向量.

2 固有特性及振动响应求解

假设 $\tilde{\lambda}$ 表示待求解复特征值,由式(16)可得硬涂层 - 整体叶盘的特征方程,表示为

$$(-\tilde{\lambda}_j M + K^*) \varphi_j = 0. \tag{17}$$

由式(17)可得硬涂层 - 整体叶盘的有阻尼固有频率 ω_j 及模态损耗因子 ζ_j ,分别表示为

$$\omega_j = \sqrt{\text{Re}(\tilde{\lambda}_j)}, \tag{18}$$

$$\zeta_j = \text{Im}(\tilde{\lambda}_j) / \text{Re}(\tilde{\lambda}_j). \tag{19}$$

随后可得硬涂层 - 整体叶盘受迫响应 δ ,表示为

$$\delta = \sum_{j=1}^{N_0} \frac{\varphi_j^T F \varphi_j}{-\omega^2 + \omega_j^2 + 2i\omega_j^2 \zeta_j}. \tag{20}$$

值得注意的是,硬涂层 - 整体叶盘结构的重频所对应的模态振型需要 Gram - Schmidt 正交化并选择适当模态数,然后代入式(20)运算便可得

到相应节点的位移频率响应.

3 实例研究

3.1 基本参数

图 3 为整体叶盘试验件及其有限元模型, NiCrAlCoY + YSZ 硬涂层均匀的涂敷在叶片两侧, 单层涂层厚度为 0. 10 mm. 轮盘的内径、外径和厚度分别为 25, 100 和 3 mm, 叶片的宽度、长度和厚度分别为 24, 80 和 3 mm.

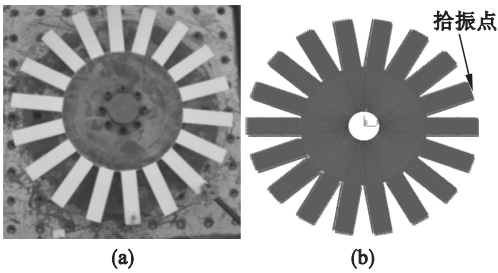


图 3 叶片涂敷硬涂层的整体叶盘

Fig. 3 Blisk with depositing hard coating on blades
(a) —试验件; (b) —有限元模型.

表 1 为硬涂层和整体叶盘的材料参数. 其中, 整体叶盘的材料参数由机械设计手册获得, 由热机械动力学分析获取了 NiCoCrAlY + YSZ 硬涂层的杨氏模量与材料损耗因子.

表 1 硬涂层－整体叶盘结构的材料参数		
Table 1 Material parameters of the hard coating blisk		
参数	整体叶盘	硬涂层
材料	Q235 - A	NiCoCrAlY + YSZ
杨氏模量/GPa	210	54. 50
密度/(kg · m ⁻³)	7 600	5 600
泊松比	0. 30	0. 3
损耗因子	0. 000 6	0. 021 2

3.2 模态特性分析与模型验证

图 4 为通过有限元分析与实验测试得到的硬涂层－整体叶盘结构的前 13 阶固有频率. 可以看到, 由有限元分析得到的固有频率与实验测试得到的固有频率是不相同的, 这是因为实验中通常受到环境因素的扰动与不完美的测试方法造成的. 但是, 它们两者的数据偏差都是比较小的, 最大误差不超过 4%, 具有较好的一致性.

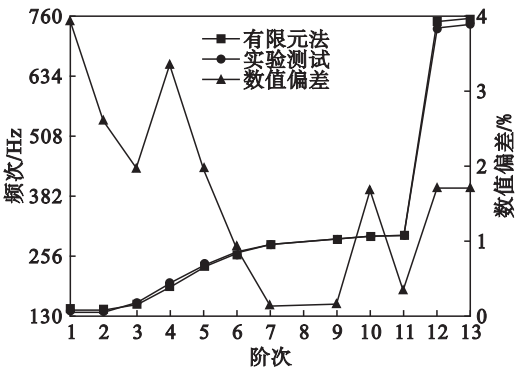


图 4 硬涂层－整体叶盘结构的固有频率

Fig. 4 Natural frequencies of the hard-coating blisk obtained by FEM and experimental test

为了准确描述有限元分析和实验测试得到的模态振型之间的相关性, 本文采用模态置信因子 (MAC) 来进行定量评价^[13]. MAC 取值范围为 [0, 1], 其值越大表示模态振型的相关性越好. 图 5 为有限元分析与实验测试的模态置信因子. 可以清晰地看到, 位于主对角线上的矩形都呈现灰色, 此时的 MAC 值均接近于 1, 表明两种方法得到的模态振型具有非常好的相关性, 有很好的一致性.

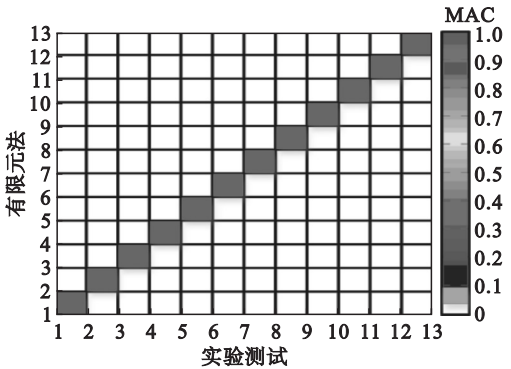


图 5 硬涂层－整体叶盘结构的模态置信因子

Fig. 5 MACs of the hard coating blisk

3.3 硬涂层对整体叶盘的影响

基于创建的硬涂层－整体叶盘有限元分析模型, 重点研究了硬涂层及其厚度对整体叶盘的固有频率、阻尼和振动响应的影响.

表 2 为硬涂层厚度为 0. 000 (A), 0. 025 (B), 0. 050 (C), 0. 100 mm (D) 的整体叶盘固有频率及固有频率的变化率 PAD. 可以发现, 叶片涂敷硬涂层后的整体叶盘固有频率普遍降低; 而且, 随着硬涂层厚度的逐渐增加, 这种数值下降趋势得到延续; 但是, 硬涂层厚度 0. 0 mm (A) 与 0. 1 mm (D) 的整体叶盘固有频率变化率普遍较小, 最大变化率没有超过 2%. 这说明硬涂层对整体叶盘

固有频率的影响是较小的。

表 2 不同涂层厚度下整体叶盘结构固有频率
Table 2 Natural frequencies of the blisk with different coating thicknesses

阶次	A/Hz	B/Hz	C/Hz	D/Hz	PAD/%
1	146.20	145.50	144.81	143.47	1.87
2	146.53	145.82	145.13	143.79	1.87
3	158.77	158.04	157.33	155.94	1.78
4	196.47	195.70	194.96	193.53	1.50
5	236.48	235.76	235.07	233.76	1.15
6	244.77	244.15	243.56	243.47	0.53
7	282.85	282.31	281.82	280.93	0.68
8	293.90	293.44	293.01	292.27	0.55
9	299.90	299.47	299.09	298.44	0.49
10	301.81	301.39	301.02	300.40	0.47
11	749.14	748.17	747.98	747.71	0.19
12	756.30	755.35	754.47	753.95	0.31
13	798.97	797.94	797.60	797.37	0.20

图 6 为硬涂层 - 整体叶盘(硬涂层厚度分别为 0.025,0.050 和 0.100 mm)模态损耗因子与整体叶盘模态损耗因子的无量纲比值.可以发现,涂敷硬涂层后的整体叶盘模态损耗因子均显著增大,大约在 1~4 倍;而且,随着硬涂层厚度的逐渐增加,整体叶盘模态损耗因子的比值也随之变大,这说明硬涂层具有较强的阻尼特性,能有效增强硬涂层 - 整体叶盘的振动阻尼。

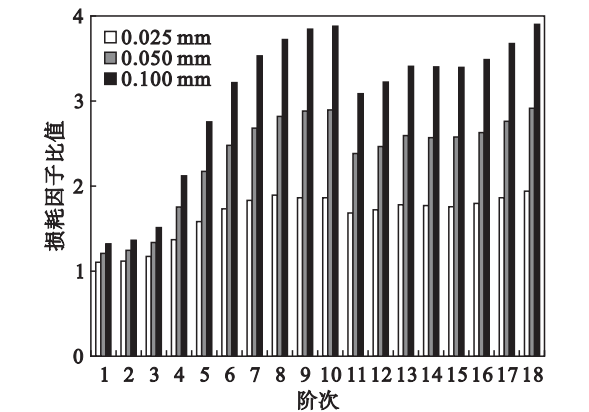


图 6 不同涂层厚度下整体叶盘的模态损耗因子比值
Fig. 6 Ratios of modal loss factors of the hard coating blisk with different coating thicknesses

图 7 为整体叶盘在不同硬涂层厚度(0,0.025,0.050 和 0.100 mm)下的受迫振动响应.可以看到,涂敷硬涂层后,整体叶盘的固有频率会发生较小的变化(同表 2),但是受迫振动响应峰值受到明显抑制(即 $P2 < P1$, $P3 < P1$, $P4 < P1$),

这说明硬涂层对整体叶盘具有较强的阻尼减振性能;而且,随着硬涂层厚度的逐渐增加,整体叶盘的受迫响应峰值也是逐渐降低的(即 $P4 < P3 < P2 < P1$).此外发现,整体叶盘受迫响应的变化趋势与模态损耗因子(同图 6)的变化趋势是相互呼应的,具有非常明显的负相关关系。

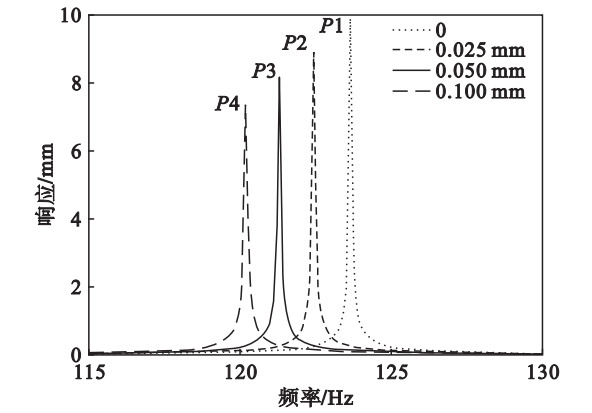


图 7 不同涂层厚度下整体叶盘的受迫响应
Fig. 7 Forced responses of the hard coating blisk with different coating thicknesses

4 结 论

- 1) 基于能量法、复合 Mindlin 板理论和复模量理论,创建了硬涂层 - 整体叶盘的有限元分析模型.经过比较发现,有限元分析和实验测试数据具有较好的一致性,证明了模型的合理性.
- 2) 涂敷 NiCrAlCoY + YSZ 硬涂层后,整体叶盘的固有频率会普遍降低,但是变化率不大;而整体叶盘的阻尼却会显著增大,表明硬涂层有很强的阻尼性能;在阶次激励作用下,整体叶盘的受迫响应峰值被明显抑制,这表明硬涂层对整体叶盘有很好的阻尼减振效果.
- 3) 硬涂层对整体叶盘的固有频率具有较小的影响,但是其阻尼能力得到显著增强.在实际工程应用中,可以通过改变硬涂层的厚度(几乎不用改变整体叶盘的原始结构),实现对整体叶盘振动响应的灵活控制.

参考文献:

[1] 张海艳,张连锋.航空发动机整体叶盘制造技术国内外发展概述[J].航空制造技术,2013,Z2:38-41.
(Zhang Hai-yan,Zhang Lian-feng. Development overview of aeroengine integral blisk and its manufacturing technology at home and abroad [J]. Aeronautical Manufacturing Technology,2013,Z2:38-41.)

[2] Klauke T, Kühhorn A, Beirow B, et al. Numerical investigations of localized vibrations of mistuned blade integrated disks (blisks) [J]. Journal of Turbo-Machinery, 2009,131(3):1-11.

[3] Sever I A, Petrov E P, Ewins D J. Experimental and numerical investigation of rotating bladed disk forced response using underplatform friction dampers[J]. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 2008, 130(4): 1 – 11.

[4] Yu H, Wang K W. Piezoelectric networks for vibration suppression of mistuned bladed disks [J]. *Journal of Vibration and Acoustics*, 2007, 129(5): 559 – 566.

[5] Balmes E, Corus M, Baumhauer S, et al. Constrained viscoelastic damping, test/analysis correlation on an aircraft engine [J]. *Structural Dynamics*, 2011, 3: 1177 – 1185.

[6] 陆山, 鲁冯杰. 基于 ANSYS 的整体叶盘结构优化设计 [J]. *航空动力学报*, 2012, 27(6): 1218 – 1220.
(Lu Shan, Lu Feng-jie. Structure optimization design for blisk based on ANSYS [J]. *Journal of Aerospace Power*, 2012, 27(6): 1218 – 1220.)

[7] Green J, Patsias S. A preliminary approach for the modeling of a hard damping coating using friction elements[C]// 7th National Turbine Engine High Cycle Fatigue Conference. Palm Beach, 2002: 1 – 7.

[8] Filippi S, Torvik P J. A methodology for predicting the response of blades with nonlinear coatings [J]. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 2011, 133(4): 1 – 7.

[9] Yen H Y. New analysis and design procedures for ensuring gas turbine blades and adhesive bonded joints structural integrity and durability [D]. Columbus: The Ohio State University, 2000.

[10] Beck J A, Brown J M, Scott-Emuakpor O E, et al. Dynamic response characteristics of dual flow-path integrally bladed rotors [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2015, 336: 150 – 163.

[11] Bhartiya Y, Sinha A. Reduced order model of a multistage bladed rotor with geometric mistuning via modal analyses of finite element sectors[J]. *Journal of Turbomachinery*, 2012, 134(4): 1 – 10.

[12] 王勖成. 有限单元法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2003.
(Wang Xu-cheng. Finite element method [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2003.)

[13] Chandrasher A, Adhikari S. Quantification of vibration localization in periodic structures [J]. *Journal of Vibration and Acoustics*, 2016, 138(2): 1 – 32.

(上接第 682 页)

参考文献：

[1] Dilhip R, Tanmoy D. A discretizing approach for evaluating reliability of complex systems under stress-strength model [J]. *IEEE Transaction on Reliability*, 2001, 50 (2): 145 – 150.

[2] Lewis E E. A load-capacity interference model for common-mode failures in 1-out-of-2: G systems [J]. *IEEE Transactions on Reliability*, 2001, 50(1): 47 – 51.

[3] Ronold K O, Larsen G C. Reliability-based design of wind-turbine rotor blades against failure in ultimate loading [J]. *Engineering Structures*, 1999, 22(6): 565 – 574.

[4] Xie L, Zhou J, Wang Y, et al. Load-strength order statistics interference models for system reliability evaluation [J]. *International Journal of Performability Engineering*, 2005, 1(1): 23 – 36.

[5] Andrieu-Renaud C, Sudret B, Lemaire M. The PHI2 method: a way to compute time-variant reliability [J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2004, 84(1): 75 – 86.

[6] 赵建印, 孙权, 周经伦. 周期性随机应力强度退化下的 SSI 可靠性模型研究 [J]. *应用科学学报*, 2006, 24 (5): 529 – 532.
(Zhao Jian-yin, Sun Quan, Zhou Jing-lun. Stress-strength interference reliability analysis considering cyclic stochastic stress and strength aging degradation [J]. *Journal of Applied Sciences*, 2006, 24(5): 529 – 532.)

[7] 孙权, 赵建印, 周经伦. 复合应力作用下强度退化的应力－强度干涉模型可靠性统计分析 [J]. *计算力学学报*, 2007, 24(3): 358 – 361.
(Sun Quan, Zhao Jian-yin, Zhou Jing-lun. Stress strength interference reliability analysis considering stochastic multi stress and strength aging degradation [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2007, 24(3): 358 – 361.)

[8] Huang W, Askin R G. A generalized SSI reliability model considering stochastic loading and strength aging degradation [J]. *IEEE Transactions on Reliability*, 2004, 53 (1): 77 – 82.

[9] Noortwijk J M V, Weide J A M V D, Kallen M J, et al. Gamma processes and peaks-over-threshold distributions for time-dependent reliability [J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2007, 92(12): 1651 – 1658.

[10] Xia B, Yu D, Liu J. Transformed perturbation stochastic finite element method for static response analysis of stochastic structures [J]. *Finite Elements in Analysis & Design*, 2014, 79(2): 9 – 21.

[11] 王新刚, 张义民, 王宝艳. 机械零部件的动态可靠性灵敏度分析 [J]. *机械工程学报*, 2010, 46(10): 188 – 193.
(Wang Xin-gang, Zhang Yi-min, Wang Bao-yan. Dynamic reliability sensitivity analysis of mechanical components [J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2010, 46 (10): 188 – 193.)

[12] Tsai C C, Tseng S T, Balakrishnan N. Optimal design for degradation tests based on gamma processes with random effects [J]. *IEEE Transactions on Reliability*, 2012, 61 (2): 604 – 613.

[13] 杨正茂, 张艳娟, 李德才, 等. 一种考虑结构强度退化的可靠性分析方法 [J]. *载人航天*, 2017, 23(3): 384 – 390.
(Yang Zheng-mao, Zhang Yan-juan, Li De-cai, et al. A reliability analysis method considering structural strength degradation [J]. *Manned Spaceflight*, 2017, 23 (3): 384 – 390.)

[14] Noortwijk J M V. A survey of the application of Gamma processes in maintenance [J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2009, 94(1): 2 – 21.