第40卷第5期 东 北 大 学 学 报 (自 然 科 学 版) Vol. 40, No. 5
2019 年 5 月 Journal of Northeastern University(Natural Science) May 2019

doi：10.12068/j.issn.1005 - 3026.2019.05.028

一种求解鞍点问题的改进 Uzawa – PSS 方法

沈海龙，李红丽，邵新慧
（东北大学 理学院，辽宁 沈阳 110819）

摘 要：主要针对非 Hermitian 鞍点问题，在已有 Uzawa – PSS 方法基础上构建了一种改进的 Uzawa – PSS 迭代法，其主要求解思想是在 Uzawa – PSS 方法的每一步迭代中需求解系数矩阵 $\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{P}$ 和 $\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{S}$ 的两个线性子系统. 第一个子系统可用 CG 方法求解，但第二个子系统求解很困难. 改进算法采用单步 PSS 迭代法逼近 x_{k+1}，然后用新方法分别求解了非奇异和奇异鞍点问题，并给出了相应的收敛性分析. 数值仿真实验验证了改进 Uzawa – PSS 迭代法在迭代步数、占用 CPU 时间和相对残差上都有明显的优势.

关 键 词：鞍点问题；收敛；半收敛；奇异；非奇异

中图分类号：O 241.6 **文献标志码**：A **文章编号**：1005 - 3026(2019)05 - 0756 - 05

An Improved Uzawa-PSS Method for to Solve Point Problems

SHEN Hai-long, *LI Hong-li*, *SHAO Xin-hui*
(School of Sciences, Northeastern University, Shenyang 110819, China. Corresponding author: SHEN Hai-long, E-mail: hailong_shen@126.com)

Abstract: Aiming at the non-Hermitian saddle point problem, an improved Uzawa-PSS iteration method is constructed based on the existing Uzawa-PSS method. The main idea of the new method is to solve two linear subsystems in each iteration step of Uzawa-PSS method, whose coefficient matrices are $\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{P}$ and $\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{S}$, respectively. The first subsystem can be solved by CG method, but the second subsystem is very difficult to solve. The improved algorithm uses the single-step PSS iteration method to approximate the problem. Then the new method is used to solve the non-singular and singular saddle point problems respectively, and the corresponding convergence analysis is given. The numerical simulation also proves that the improved Uzawa-PSS iteration method has obvious advantages in iteration steps, CPU time and relative residuals.

Key words: saddle point problem; convergence; semi-convergence; singular; nonsingular

鞍点问题在各种科学和工程中应用广泛，如计算流体动力学、约束优化、最优控制、加权最小二乘问题、计算机图形等[1-4]，从二阶椭圆问题的混合有限元离散化或一些偏微分方程的无网格离散均可得到鞍点问题[5-7].

近年来涌现出大量求解鞍点问题的方法，对于非奇异的鞍点问题，人们提出了很多行之有效的算法，除了直接法外，还有许多迭代方法. 这些迭代法一般可分为基于矩阵分裂的定常迭代法和基于 Krylov 子空间方法的非定常迭代法. 定常迭代法分为 Uzawa 类、HSS 类和 SOR 类[8-10]. 1958 年，Arrow 等[11]针对鞍点问题提出了基于矩阵分裂的 Uzawa 方法，之后为了避免逆矩阵的复杂计算，Bramble 等[12-13]提出了应用不同鞍点问题的不精确 Uzawa 方法[11-13]；Elman 等[14-15]给出了对称鞍点问题的不精确 Uzawa 方法的收敛性分析和预条件的 Uzawa 算法；Hu 等[16]提出了非线性不精确 Uzawa 方法的两种变体；Cao[17]提出了用 Uzawa 方法来解决非对称鞍点问题；Lin 等[18]提出了一种新的非线性 Uzawa 方法，且分析了该算法的收敛性；Zhou 等[19]基于 GPIU 方法求解了更复杂的鞍点问题；Shao 等[20]又基于 GPIU 方法成功解决了一类广义非对称的鞍点问题.

本文构造一种求解奇异和非奇异鞍点问题的

收稿日期：2018 - 04 - 04
基金项目：国家自然科学基金资助项目(11371081)；辽宁省自然科学基金资助项目(20170540323).
作者简介：沈海龙(1971 -)，男，吉林延吉人，东北大学讲师，博士；邵新慧(1970 -)，女，山东青岛人，东北大学教授.

改进 Uzawa－PSS 迭代法,并进行了详细的理论分析和数值仿真,通过比较表明了新方法的优势.

1　迭代格式

鞍点问题的一般形式为

$$\boldsymbol{AX}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{f}\\ -\boldsymbol{g}\end{bmatrix}\equiv \boldsymbol{c}. \tag{1}$$

其中:$\boldsymbol{A}\in \mathbf{C}^{m\times m}$ 为对称正定矩阵;$\boldsymbol{B}\in \mathbf{C}^{m\times n}$. 通常 $m>n$,向量 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{f}\in \mathbf{C}^{m}$,$\boldsymbol{y},\boldsymbol{g}\in \mathbf{C}^{n}$. 当 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{B})=n$,称式(1)为非奇异的;当 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{B})<n$,称式(1)为奇异的.

对于非奇异鞍点问题,Uzawa 解法[19]格式:

$$\begin{cases}\boldsymbol{Ax}^{(k+1)}=\boldsymbol{f}-\boldsymbol{B}^{*}\boldsymbol{y}^{(k)},\\ \boldsymbol{y}^{(k+1)}=\boldsymbol{y}^{(k)}+\omega(\boldsymbol{Bx}^{(k+1)}-\boldsymbol{g}).\end{cases}$$

其中,$\boldsymbol{A}$ 是非 Hermitian 正定矩阵. 将 $\boldsymbol{A}$ 作如下分裂:$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}+\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{P}$ 是正定矩阵, $\boldsymbol{S}$ 是 Skew－Hermitian 矩阵. 基于 ADI 方法,PSS 迭代方法为

$$\left.\begin{aligned}(\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{P})\boldsymbol{x}^{(k+\frac{1}{2})}&=(\alpha\boldsymbol{I}-\boldsymbol{S})\boldsymbol{x}^{(k)}+\boldsymbol{q}^{(k)},\\ (\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{S})\boldsymbol{x}^{(k+1)}&=(\alpha\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P})\boldsymbol{x}^{(k+\frac{1}{2})}+\boldsymbol{q}^{(k)}.\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

式中:α,ω 是给定正常数;$\boldsymbol{I}$ 是单位矩阵. 将 Uzawa 方法和 PSS 方法相结合,可得到如下 Uzawa－PSS 方法.

给定初始向量 $\boldsymbol{x}^{(0)},\boldsymbol{y}^{(0)}$,直到迭代序列 $(\boldsymbol{x}^{(k)},\boldsymbol{y}^{(k)})^{\mathrm{T}}$ 收敛,计算:

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{x}^{(k+1)}&=\boldsymbol{M}_{\alpha}\boldsymbol{x}^{(k)}+\boldsymbol{N}_{\alpha}(\boldsymbol{f}-\boldsymbol{B}^{*}\boldsymbol{y}^{(k)}),\\ \boldsymbol{y}^{(k+1)}&=\boldsymbol{y}^{(k)}+\omega\boldsymbol{Q}^{-1}(\boldsymbol{Bx}^{(k+1)}-g).\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

其中:$\boldsymbol{Q}$ 是 Hermitian 正定矩阵;$\boldsymbol{M}_{\alpha}=(\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{S})^{-1}(\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{P})^{-1}(\alpha\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P})(\alpha\boldsymbol{I}-\boldsymbol{S})$;$\boldsymbol{N}_{\alpha}=2\alpha(\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{S})^{-1}(\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{P})^{-1}$. 将 Uzawa－PSS 方法进行改进,称其为改进 Uzawa－PSS 方法. 具体格式为

给定初始向量 $\boldsymbol{x}^{(0)},\boldsymbol{y}^{(0)}\in \mathbf{C}^{m}$,直到迭代序列 $(\boldsymbol{x}^{(k)},\boldsymbol{y}^{(k)})^{\mathrm{T}}$ 收敛,计算:

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{x}^{(k+1)}&=\boldsymbol{T}(\alpha)x^{(k)}+\boldsymbol{N}(\alpha)(f-By^{(k)}),\\ \boldsymbol{y}^{(k+1)}&=\boldsymbol{y}^{(k)}+\omega\boldsymbol{Q}^{-1}(\boldsymbol{B}^{*}\boldsymbol{x}^{(k+1)}-\boldsymbol{g}).\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

其中:$\boldsymbol{T}(\alpha)=(\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{P})^{-1}(\alpha\boldsymbol{I}-\boldsymbol{S})$;$\boldsymbol{N}(\alpha)=(\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{P})^{-1}$.

将改进的 Uzawa－PSS 方法写成等价形式:

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}^{(k+1)}\\ \boldsymbol{y}^{(k+1)}\end{bmatrix}=\boldsymbol{G}(\alpha,\omega)\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}^{(k)}\\ \boldsymbol{y}^{(k)}\end{bmatrix}+\boldsymbol{M}(\alpha,\omega)\begin{bmatrix}\boldsymbol{f}\\ \boldsymbol{g}\end{bmatrix}.$$

其中,$\boldsymbol{G}(\alpha,\omega)$ 是改进 Uzawa－PSS 方法的迭代矩阵,

$$\boldsymbol{G}(\alpha,\omega)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{T}(\alpha) & -\boldsymbol{N}(\alpha)\boldsymbol{B}\\ \omega\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{B}^{*}\boldsymbol{T}(\alpha) & \boldsymbol{I}-\omega\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{B}^{*}\boldsymbol{N}(\alpha)\boldsymbol{B}\end{bmatrix}, \tag{5}$$

$$\boldsymbol{M}(\alpha,\omega)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{N}(\alpha) & 0\\ \omega\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{B}^{*}\boldsymbol{N}(\alpha) & -\omega\boldsymbol{Q}^{-1}\end{bmatrix}. \tag{6}$$

2　收敛性分析

2.1　非奇异鞍点问题

令 $\rho(\boldsymbol{G}(\alpha,\omega))$ 是 $\boldsymbol{G}(\alpha,\omega)$ 的谱半径,则改进 Uzawa－PSS 方法收敛当且仅当 $\rho(\boldsymbol{G}(\alpha,\omega))<1$. 令 λ 是 $\boldsymbol{G}(\alpha,\omega)$ 特征值,$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}$ 是对应特征向量,有

$$\left.\begin{aligned}(\alpha\boldsymbol{I}-\boldsymbol{S})\boldsymbol{x}-\boldsymbol{By}&=\lambda(\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{P})\boldsymbol{x},\\ \lambda\omega\boldsymbol{B}^{*}\boldsymbol{x}&=(\lambda-1)\boldsymbol{Qy}.\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

引理 1[20]　复一元二次方程 $\lambda^2-\phi\lambda+\varphi=0$ 两根之模均小于 1,当且仅当方程系数满足 $|\phi-\bar{\phi}\varphi|+|\varphi|^2<1$,其中 $\bar{\phi}$ 表示 ϕ 的共轭复数.

引理 2　令 $\boldsymbol{A}$ 是非 Hermitian 正定矩阵,$\boldsymbol{B}$ 是列满秩矩阵. 设 λ 是 $\boldsymbol{G}(\alpha,\omega)$ 的特征值,$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}$ 是相应特征向量,$\boldsymbol{x}\in \mathbf{C}^{n}$,$\boldsymbol{y}\in \mathbf{C}^{m}$,则 $\lambda\neq 1$ 且 $\boldsymbol{x}\neq 0$.

证明　假设 $\lambda=1$,从式(7)知

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{B}^{*} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{y}\end{bmatrix}=0. \tag{8}$$

可得 $\boldsymbol{x}=0$,$\boldsymbol{y}=0$,又 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{G}(\alpha,\omega)$ 的特征向量,矛盾,所以 $\lambda\neq 1$. 假设 $\boldsymbol{x}=0$,由式(8)可得 $\boldsymbol{By}=0$,因 $\boldsymbol{B}$ 列满秩,与 $\boldsymbol{y}=0$ 矛盾,因此 $\boldsymbol{x}\neq 0$.

定理 1　令 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}+\boldsymbol{S}$,$\boldsymbol{P}$ 是正定矩阵,$\boldsymbol{S}$ 是 Skew－Hermitian 矩阵,$\boldsymbol{B}$ 列满秩,$\boldsymbol{Q}$ 是 Hermitian 正定矩阵. 则改进 Uzawa－PSS 方法收敛当且仅当 α 和 ω 满足条件:

$$\alpha>\max\left\{\frac{c^2-a^2-b^2}{2a},0\right\},$$

$$0<\omega<\frac{2a(a^2+2\alpha a+b^2-c^2)}{d(a^2+(b-c)^2)}.$$

其中:$a+b\mathrm{i}=\dfrac{\boldsymbol{x}^{*}\boldsymbol{Px}}{\boldsymbol{x}^{*}\boldsymbol{x}}$;$c\mathrm{i}=\dfrac{\boldsymbol{x}^{*}\boldsymbol{Sx}}{\boldsymbol{x}^{*}\boldsymbol{x}}$;$d=\dfrac{\boldsymbol{x}^{*}\boldsymbol{BQ}^{-1}\boldsymbol{Bx}}{\boldsymbol{x}^{*}\boldsymbol{x}}$.

证明　由引理 2 知 $\lambda\neq 1$,$\boldsymbol{x}\neq 0$. 又因 $\boldsymbol{Q}$ 是 Hermitian 正定,则由式(8)可得

$$(\alpha\boldsymbol{I}-\boldsymbol{S})\boldsymbol{x}-\frac{\lambda\omega}{\lambda-1}\boldsymbol{BQ}^{-1}\boldsymbol{B}^{*}\boldsymbol{x}=\lambda(\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{P})\boldsymbol{x}. \tag{9}$$

将式(9)两边同时左乘 $\dfrac{\boldsymbol{x}^{*}}{\boldsymbol{x}^{*}\boldsymbol{x}}$,可得

$$\frac{\boldsymbol{x}^{*}(\alpha\boldsymbol{I}-\boldsymbol{S})\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^{*}\boldsymbol{x}}+\frac{\lambda\omega}{1-\boldsymbol{\lambda}}\frac{\boldsymbol{x}^{*}\boldsymbol{BQ}^{-1}\boldsymbol{B}^{*}\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^{*}\boldsymbol{x}}=\lambda\frac{\boldsymbol{x}^{*}(\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{P})\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^{*}\boldsymbol{x}}. \tag{10}$$

令 $a+b\mathrm{i}=\dfrac{\boldsymbol{x}^{*}\boldsymbol{Px}}{\boldsymbol{x}^{*}\boldsymbol{x}}$,$c\mathrm{i}=\dfrac{\boldsymbol{x}^{*}\boldsymbol{Sx}}{\boldsymbol{x}^{*}\boldsymbol{x}}$,$d=\dfrac{\boldsymbol{x}^{*}\boldsymbol{BQ}^{-1}\boldsymbol{Bx}}{\boldsymbol{x}^{*}\boldsymbol{x}}$,由于 $\alpha+a+b\mathrm{i}\neq 0$,将式(10)改写成

$$\lambda^2-\frac{2\alpha+a+b\mathrm{i}-c\mathrm{i}-\omega d}{\alpha+a+b\mathrm{i}}\lambda+\frac{\alpha-c\mathrm{i}}{\alpha+a+b\mathrm{i}}=0.$$

由引理 1 知 $|\lambda|<1$ 当且仅当 $|\phi-\bar{\phi}\varphi|+|\varphi|^2<1$,其中:

$$\phi=\frac{2\alpha+a+b\mathrm{i}-c\mathrm{i}-\omega d}{\alpha+a+b\mathrm{i}},\varphi=\frac{\alpha-c\mathrm{i}}{\alpha+a+b\mathrm{i}}.$$

则 $|\phi-\bar{\phi}\varphi|+|\varphi|^2<1$ 当且仅当满足:

$$\begin{cases}\alpha^2+c^2-(\alpha+a)^2-b^2<0,\\ [\alpha^2+c^2-(\alpha+a)^2-b^2]^2>[(2a+a-\omega d)a+\\ \quad b^2-c^2]^2+\omega^2d^2(b-c)^2.\end{cases}$$

结论得证.

2.2 奇异鞍点问题

引理 3 改进 Uzawa－PSS 方法半收敛当且仅当满足:

1) $\mathrm{index}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{G}(\alpha,\omega))=1$;

2) $v(\boldsymbol{G}(\alpha,\omega))=\max\{|\lambda|:\lambda\in\sigma(\boldsymbol{G}(\alpha,\omega)),\lambda\neq1\}<1$,

其中,$\sigma(\boldsymbol{G}(\alpha,\omega))$是矩阵 $\boldsymbol{G}(\alpha,\omega)$的谱集.

定理 2 令 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}+\boldsymbol{S}$,$\boldsymbol{P}$ 是正定矩阵,$\boldsymbol{S}$ 是 Skew－Hermitian 矩阵,$\boldsymbol{B}$ 是秩亏矩阵,$\boldsymbol{Q}$ 是 Hermitian 正定矩阵,$\boldsymbol{G}(\alpha,\omega)$是改进的 Uzawa－PSS 方法的迭代矩阵,则 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{G}(\alpha,\omega))^2=\mathrm{rank}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{G}(\alpha,\omega))$.

证明 由式(5),式(6)有 $\boldsymbol{G}(\alpha,\omega)=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{M}(\alpha,\omega)\boldsymbol{A}$,即

$$\mathrm{null}(\boldsymbol{M}(\alpha,\omega)\boldsymbol{A})^2=\mathrm{null}(\boldsymbol{M}(\alpha,\omega)\boldsymbol{A}).$$

令$(\boldsymbol{M}(\alpha,\omega)\boldsymbol{A})^2\hat{\boldsymbol{x}}=0$,其中 $\boldsymbol{M}(\alpha,\omega)$非奇异,则

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{y}}_1+\boldsymbol{B}\hat{\boldsymbol{y}}_2=0,\\ \boldsymbol{B}^*\hat{\boldsymbol{y}}_1=0.\end{aligned}\right\}\tag{11}$$

因 $\boldsymbol{A}$ 非奇异,由式(11)得 $\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\hat{\boldsymbol{y}}_2=0$. 即 $\hat{\boldsymbol{y}}_2^*\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\hat{\boldsymbol{y}}_2=0$ 得 $\boldsymbol{B}\hat{\boldsymbol{y}}_2=\boldsymbol{0}$. 再由式(11)得 $\hat{\boldsymbol{y}}_1=\boldsymbol{0}$. 令 $\hat{\boldsymbol{y}}=\boldsymbol{M}(\alpha,\omega)\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}$,由式(4)有

$$\left.\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{y}}_1&=\boldsymbol{N}(\alpha)\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}_1+\boldsymbol{N}(\alpha)\boldsymbol{B}\hat{\boldsymbol{x}}_2,\\ \hat{\boldsymbol{y}}_2&=-\omega\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{T}(\alpha)\hat{\boldsymbol{x}}_1+\omega\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{N}(\alpha)\boldsymbol{B}\hat{\boldsymbol{x}}_2.\end{aligned}\right\}\tag{12}$$

得 $\hat{\boldsymbol{y}}_2=0$,于是 $\boldsymbol{M}(\alpha,\omega)\boldsymbol{A}\ \hat{\boldsymbol{x}}=0$,可知

$$\mathrm{null}((\boldsymbol{M}(\alpha,\omega)\boldsymbol{A})^2)\subseteq\mathrm{null}((\boldsymbol{M}(\alpha,\omega)\boldsymbol{A})).$$

又因 $\mathrm{null}((\boldsymbol{M}(\alpha,\omega)\boldsymbol{A})^2)\supseteq\mathrm{null}((\boldsymbol{M}(\alpha,\omega)\boldsymbol{A}))$,得证.

下面验证改进 Uzawa－PSS 迭代法满足引理 3 中的第二个条件. 令 $\boldsymbol{r}=\mathrm{rank}(\boldsymbol{B})$,$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{U}[\boldsymbol{B}_{\mathrm{r}},0]\boldsymbol{V}^*$ 是 $\boldsymbol{B}$ 的奇异值分解,其中,$\boldsymbol{B}_r=[\Sigma_r,0]^{\mathrm{T}}$,$\Sigma_r=\mathrm{diag}[\sigma_1,\cdots,\sigma_r]$. $\boldsymbol{U}\in\mathbf{C}^{n\times n}$和 $\boldsymbol{V}=[\boldsymbol{V}_1,\boldsymbol{V}_2]\in\mathbf{C}^{m\times m}$是酉矩阵,其中 $\boldsymbol{V}_1\in\mathbf{C}^{m\times r}$,$\boldsymbol{V}_2\in\mathbf{C}^{m\times(m-r)}$. 定义$(n+m)\times(n+m)$阶酉矩阵:$\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{U}&0\\0&\boldsymbol{V}\end{bmatrix}$. 令 $\widetilde{\boldsymbol{G}}(\alpha,\omega)=\boldsymbol{K}^*\boldsymbol{G}(\alpha,\omega)\boldsymbol{K}$,则矩阵 $\boldsymbol{G}(\alpha,\omega)$和 $\widetilde{\boldsymbol{G}}(\alpha,\omega)$的特征值相同. 定义 $\hat{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{U}^*\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}$,$\hat{\boldsymbol{H}}=\boldsymbol{U}^*\boldsymbol{H}\boldsymbol{U}$ 和 $\hat{\boldsymbol{S}}=\boldsymbol{U}^*\boldsymbol{S}\boldsymbol{U}$,可得

$$\widetilde{\boldsymbol{G}}(\alpha,\omega)=\boldsymbol{K}^*\boldsymbol{G}(\alpha,\omega)\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{G}}(\alpha,\omega)&0\\ \hat{\boldsymbol{L}}(\alpha,\omega)&\boldsymbol{I}_{m-r}\end{bmatrix},\tag{13}$$

$$\hat{\boldsymbol{G}}(\alpha,\omega)=\begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{T}}(\alpha)&-\hat{\boldsymbol{N}}(\alpha)\boldsymbol{B}_r\\ \omega\boldsymbol{V}_2^*\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{V}_1\boldsymbol{B}_r^*\hat{\boldsymbol{T}}(\alpha)&\boldsymbol{I}_r-\omega\boldsymbol{V}_1^*\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{V}_1\boldsymbol{B}_r^*\hat{\boldsymbol{N}}(\alpha)\boldsymbol{B}_r\end{bmatrix},\tag{14}$$

式中:$\hat{\boldsymbol{L}}(\alpha,\omega)=[\omega\boldsymbol{V}_2^*\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{V}_1\boldsymbol{B}_r^*\hat{\boldsymbol{T}}(\alpha)\quad-\omega\boldsymbol{V}_2^*\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{V}_1\boldsymbol{B}_r^*\hat{\boldsymbol{N}}(\alpha)\boldsymbol{B}_r]$;$\hat{\boldsymbol{T}}(\alpha)=(\alpha\boldsymbol{I}_n+\hat{\boldsymbol{H}})^{-1}(\alpha\boldsymbol{I}_n-\hat{\boldsymbol{S}})$;$\hat{\boldsymbol{N}}(\alpha)=(\alpha\boldsymbol{I}_n+\hat{\boldsymbol{H}})^{-1}$. 由式(13)知 $\boldsymbol{v}(\widetilde{\boldsymbol{G}}(\alpha,\omega))=\rho(\hat{\boldsymbol{G}}(\alpha,\omega))$. 记 $\boldsymbol{V}_1^*\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{V}_1$ 是 Hermitian 正定矩阵,与改进 Uzawa－PSS 方法相比,$\hat{\boldsymbol{G}}(\alpha,\omega)$可看作是改进 Uzawa－PSS 方法用于解决如下非奇异问题的迭代矩阵:

$$\begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{A}}&\boldsymbol{B}_r\\ \boldsymbol{B}_r^*&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{x}}\\ \hat{\boldsymbol{y}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{f}\\ \boldsymbol{g}\end{bmatrix}.$$

$\boldsymbol{V}_1^*\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{V}_1$ 是预条件矩阵. 令 $\hat{\lambda}$ 是 $\hat{G}(\alpha,\omega)$的特征值,$[\hat{\boldsymbol{x}},\hat{\boldsymbol{y}}]^{\mathrm{T}}\in\mathbf{C}^{n+r}$ 是相应特征向量,记

$$\frac{\hat{x}^*P\hat{x}}{\hat{x}^*\hat{x}}=\hat{a}+\hat{b}\mathrm{i},\frac{\hat{\boldsymbol{x}}^*\boldsymbol{S}\hat{\boldsymbol{x}}}{\hat{\boldsymbol{x}}^*\hat{\boldsymbol{x}}}=\hat{c}\mathrm{i},\frac{\hat{\boldsymbol{x}}^*\boldsymbol{B}_r\boldsymbol{V}_1^*\hat{\boldsymbol{Q}}^{-1}\boldsymbol{V}_1\boldsymbol{B}_r^*\hat{\boldsymbol{x}}}{\hat{\boldsymbol{x}}^*\hat{\boldsymbol{x}}}=\hat{d},$$

其中 i 是虚数单位,根据定理 2,得到如下收敛定量.

定理 3 令 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}+\boldsymbol{S}$,$\boldsymbol{P}$ 是正定矩阵,$\boldsymbol{S}$ 是 Skew－Hermitian 矩阵,$\boldsymbol{B}$ 是秩亏矩阵,$\boldsymbol{Q}$ 是 Hermitian 正定矩阵,改进 Uzawa－PSS 方法收敛当且仅当参数 α 和 ω 满足:

$$\alpha>\max\left\{\frac{\hat{c}^2-\hat{a}^2-\hat{b}^2}{2\hat{a}},0\right\},$$

$$0<\omega<\frac{2\hat{a}(\hat{a}^2+2\alpha\hat{a}+\hat{b}^2-\hat{c}^2)}{\hat{d}(\hat{a}^2+(\hat{b}-\hat{c})^2)}.$$

3 数值算例

取零向量作为初始向量,当 $\boldsymbol{x}_k$ 满足

$$\mathrm{RES}=\sqrt{\frac{\|\boldsymbol{f}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}_k\|_2^2+\|\boldsymbol{g}-\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{x}_k\|_2^2}{\|\boldsymbol{f}\|_2^2+\|\boldsymbol{g}\|_2^2}}$$

$<10^{-6}$时停止,所有的实验都在软件 Matlab 上实现,迭代主机参数为 Intel(R)Pentium(R)CPU P6200 @ 2.13 GHz 和 2.00 GB 内存.

为验证改进 Uzawa－PSS 方法的有效性,选

取迭代步数(IT)、占用 CPU 时间(CPU)和相对残差(RES)作为比较指标. 选取 Uzawa－HSS 方法和 Uzawa－PSS 方法与本文所提方法进行比较，为使迭代步数最少，经过多次实验选取最优参数 α 和 ω. 在实际的计算过程中，选取右边向量 $[\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}]^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^{3l^2}$ 使式(3)为非奇异问题，$[\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}]^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^{3l^2+2}$ 使式(3)为奇异问题，且方程组的精确解均是所有元素为 1 的向量.

例 1　考虑非奇异鞍点问题(3)，系数矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_l\otimes\boldsymbol{T}+\boldsymbol{T}\otimes\boldsymbol{I}_l & 0\\ 0 & \boldsymbol{I}_l\otimes\boldsymbol{T}+\boldsymbol{T}\otimes\boldsymbol{I}_l\end{bmatrix}\in\mathbf{R}^{2l^2+2l^2},$$

$$B=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_l\otimes\boldsymbol{F}\\ \boldsymbol{F}\otimes\boldsymbol{I}_l\end{bmatrix}\in\mathbf{R}^{2l^2\times 2l^2}.$$

其中：$\boldsymbol{T}=\frac{1}{h^2}\mathrm{tridiag}(-1,2,1)+\frac{1}{2h}\mathrm{tridiag}(-1,0,1)\in\mathbf{R}^{l\times l}$；

$\boldsymbol{F}=\frac{1}{h}\mathrm{tridiag}(-1,1,0)\in\mathbf{R}^{l\times l}$. $\otimes$表示克罗内克积，$h=\frac{1}{l+1}$是步长.

例 2　考虑奇异鞍点问题(3)，系数矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_l\otimes\boldsymbol{T}+\boldsymbol{T}\otimes\boldsymbol{I}_l & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_l\otimes\boldsymbol{T}+\boldsymbol{T}\otimes\boldsymbol{I}_l\end{bmatrix}\in\mathbf{R}^{2l^2+2l^2},$$

$$\boldsymbol{B}=[\hat{\boldsymbol{B}},\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2]\in\mathbf{R}^{2l^2\times(l^2+2)}.$$

其中：$\hat{\boldsymbol{B}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_l\otimes\boldsymbol{F}\\ \boldsymbol{F}\otimes\boldsymbol{I}_l\end{bmatrix}\in\mathbf{R}^{2l^2\times l^2}$；$\boldsymbol{b}_1=\hat{\boldsymbol{B}}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$；

$\boldsymbol{b}_2=\hat{\boldsymbol{B}}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$；$\boldsymbol{1}=[1,1,\cdots,1]^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^{\frac{l^2}{2}}$.

图 1、图 2 为例 1、例 2 中 $\boldsymbol{A}$ 的特征值分布. 图 1 和图 2 表明，在控制最优参数的条件下，改进 Uzawa－PSS 法的特征值分布接近于零，随着系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的阶数不断增大，特征值聚集趋势逐渐减弱，但是大部分特征值仍然保持在区间 $[-0.1,0.1]$内.

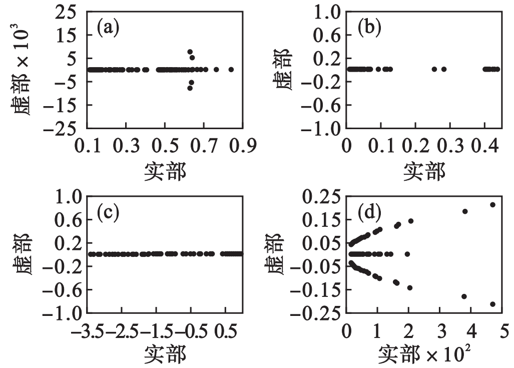

图 1　例 1 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值分布

Fig. 1　Dstributions of the eigenvalues of matrix $\boldsymbol{A}$ examples 1

(a)—$l=8$；(b)—$l=16$；(c)—$l=24$；(d)—$l=32$.

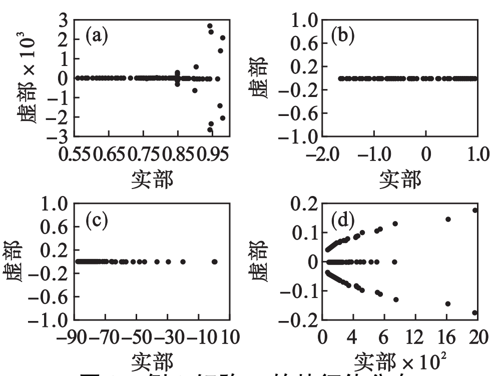

图 2　例 2 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值分布

Fig. 2　Distributions of the eigenvalues of matrix $\boldsymbol{A}$ of examples 2

(a)—$l=8$；(b)—$l=16$；(c)—$l=24$；(d)—$l=32$.

表 1　非奇异、奇异鞍点问题的三种迭代方法的数值结果比较

Table 1　Numerical comparison of three iteration methods for nonsingular and singular saddle point problems

l	方法	非奇异					奇异				
		α	ω	IT/次	CPU/s	RES×10^7	α	ω	IT/次	CPU/s	RES×10^7
8	New Uzawa－PSS	800	0.6	97	0.039 5	8.69	700	0.8	51	0.026 2	7.53
	Uzawa－PSS	450	1.2	158	0.065 4	8.97	450	0.4	104	0.324 5	8.97
	Uzawa－HSS	750	0.55	177	0.073 8	9.44	550	0.5	123	0.578 6	9.26
16	New Uzawa－PSS	500	1.2	104	1.068 3	8.90	500	1.2	61	0.508 3	8.46
	Uzawa－PSS	850	1.85	212	2.298 2	9.11	750	0.7	135	1.876 3	9.29
	Uzawa－HSS	650	0.5	227	2.943 3	9.56	700	1.35	157	2.348 2	9.33
24	New Uzawa－PSS	740	0.55	112	7.249 9	9.01	650	0.85	76	4.784 2	8.87
	Uzawa－PSS	500	0.8	235	17.952 5	9.35	550	0.65	168	8.349 6	9.47
	Uzawa－HSS	600	0.65	278	24.119 2	9.76	820	1.0	183	10.563 7	9.55
32	New Uzawa－PSS	550	1.5	135	40.506 8	9.24	750	1.0	101	32.333 8	9.13
	Uzawa－PSS	700	1.0	254	66.633 2	9.67	400	0.55	207	40.349 3	9.66
	Uzawa－HSS	800	0.75	280	80.674 4	9.95	450	1.25	234	53.242 9	9.78

表 1 为非奇异、奇异鞍点问题的三种迭代方法的数值结果比较，选取 $\boldsymbol{Q}=\mathrm{tridiag}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{B})$，其中 $\boldsymbol{D}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的对角矩阵. 可以看出，在选择最优参数时，三种方法在有限迭代步数内都能达到指

定的精度,且都能收敛到各自对应问题的近似解. 但当 $\boldsymbol{A}$ 阶数较大时,Uzawa – HSS 和 Uzawa – PSS 方法收敛非常缓慢,新 Uzawa – PSS 方法更有效,且它的迭代次数和占 CPU 的时间最少.

4 结 语

本文提出了一种改进的 Uzawa – PSS 迭代法,可以用于求解奇异鞍点问题和非奇异鞍点问题,并对所提方法的非奇异鞍点问题收敛性及奇异鞍点问题半收敛性做了详细分析. 数值算例表明在时间花费和迭代次数上新改进 Uzawa – PSS 迭代法有很大优势.

参考文献:

[1] Benzi M, Golub G H, Liesen J. Numerical solution of saddle point problems[J]. *Acta Numerica*, 2005, 14(1): 1 – 137.

[2] Bai Z Z, Parlett B N, Wang Z Q. On generalized successive over relaxation methods for augmented linear systems[J]. *Numerische Mathematik*, 2005, 102(1): 1 – 38.

[3] Santos C H, Silva B P B, Yuan J Y. Block SOR methods for rank-deficient least-squares problems [J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 1998, 100: 1 – 9.

[4] Golub G H, Wathen A J. An iteration for indefinite systems and its application to the Navier-Stokes equations[J]. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 1998, 19: 530 – 539.

[5] Brezzi F, Fortin M. Mixed and hybrid finite elements methods [M]. New York: Springer-Verlag, 1991.

[6] Cao Y, Yao L Q, Jiang M Q, et al. A relaxed HSS preconditioner for saddle point problems from meshfree discretization[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2013, 21(4): 398 – 421.

[7] Leem K H, Oliveira S, Stewart D E. Algebraic multigrid (AMG) for saddle point systems from meshfree discretizations [J]. *Numerical Linear Algebra with Applications*, 2004, 11: 293 – 308.

[8] Elman H C, Silvester D J, Wathen A J. Finite elements and fast iterative solvers: with application in incompressible fluid dynamics[M]. Oxford: Oxford University Press, 1988.

[9] Varge R S. Matrix iterative analysis [M]. New York: Springer, 2000.

[10] Bai Z Z, Golub G H, Ng M K. Hermitian and skew-Hermitian splitting methods for non-Hermitian positive definite linear systems [J]. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 2003, 24(3): 603 – 626.

[11] Arrow K, Hurwicz L, Uzawa H. A studies in linear and nonlinear programming[M]. Palo Alto: Stanford University Press, 1958.

[12] Bramble J H, Pasciak J E, Vassilev A T. Analysis of the inexact Uzawa algorithm for saddle point problems[J]. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 1997, 34: 1072 – 1092.

[13] Bramble J H, Pasciak J E, Vassilev A T. Uzawa type algorithms for non-symmetric saddle point problems [J]. *Mathematics Computation*, 2000, 69: 667 – 689.

[14] Elman H C, Golub G H. Inexact and preconditioned Uzawa algorithms for saddle point problems[J]. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 1994, 31(6): 1645 – 1661.

[15] Elman H C, Silvester D J. Fast nonsymmetric iterations and preconditioning for Navier-Stokes equations [J]. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 1996, 17: 33 – 46.

[16] Hu Q, Zou J. Two new variants of nonlinear inexact Uzawa algorithms for saddle point problems [J]. *Numerische Mathematik*, 2002, 93: 333 – 359.

[17] Cao Z H. Fast Uzawa algorithm for sloving non-symmetric stabilized saddle point problems [J]. *Numerical Linear Algebra with Applications*, 2004, 11(1): 1 – 24.

[18] Lin Y Q, Cao Y H. A new nonlinear Uzawa algorithm for generalized saddle point problems[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2006, 175: 1432 – 1454.

[19] Zhou Y Y, Zhang G F. A generalization of parameterized inexact Uzawa method for generalized saddle point problems [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2009, 215(2): 599 – 607.

[20] Shao X H, Li C. A generalization of preconditioned parameterized inexact Uzawa method for indefinite saddle point problems[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2015, 269(115): 691 – 698.