

# 非线性切换奇异系统的自适应状态反馈控制

杨冬梅, 陈金莹

(东北大学 理学院, 辽宁 沈阳 110819)

**摘 要:** 研究了一类满足 Lipschitz 条件的非线性奇异切换系统的自适应状态反馈控制的设计问题. 首先, 研究单输入非线性奇异切换系统的基本自适应控制的设计, 控制器旨在稳定系统; 然后, 以单输入非线性奇异切换系统所呈现的具有自适应增益和基于 Lyapunov 稳定性定理调整增益的机制为基础, 将其扩展为多输入奇异切换系统的跟踪问题, 设计了自适应控制方法; 最后, 采用 Matlab 方法做了数值仿真来说明所提出的控制方法的有效性. 所提出的控制器具有非常简单的结构, 并且在实践中很容易应用.

**关 键 词:** Lipschitz 条件; 自适应控制; 非线性切换奇异系统; 稳定性; 追踪误差

**中图分类号:** O 1      **文献标志码:** A      **文章编号:** 1005-3026(2019)06-0761-05

## Adaptive State Feedback Control of Nonlinear Switched Singular Systems

YANG Dong-mei, CHEN Jin-ying

(School of Sciences, Northeastern University, Shenyang 110819, China. Corresponding author: CHEN Jin-ying, E-mail: 2360925907@qq.com)

**Abstract:** The design of adaptive control for a class of nonlinear singular switched systems satisfying the Lipschitz condition was studied. First, the design of the basic adaptive control of a single input nonlinear singular switching system was studied. The controller was designed to stabilize the system. Then, the adaptive gain and the gain adjustment based on the Lyapunov stability theorem presented by the single input nonlinear singular switching system were used to expand the tracking problem of multi-input singular switching systems and an adaptive control method was designed. Finally, a numerical simulation was performed using Matlab to illustrate the effectiveness of the proposed control method. The proposed controller has a very simple structure and is easy to be applied in practice.

**Key words:** Lipschitz condition; adaptive control; nonlinear switched singular system; stability; tracking error

切换系统是一种混合动力系统. 其包含若干子系统, 且存在切换策略, 使其能够在子系统之间进行切换<sup>[1]</sup>. 同一般系统相比, 切换系统有着非常特别的性质. 切换奇异系统是控制领域近年来新兴研究方向之一, 同一般切换系统相比其结构复杂, 研究更加困难. 目前大多数是对一般切换系统的研究, 对于子系统均是奇异系统的切换系统, 研究成果不多. 与正常切换系统相比较, 其分析与设计更困难. 切换系统具有非常广泛的应用. 实际工程中存在着大量的复杂系统, 环境变化或人为

控制导致这些系统出现不同模态, 例如: 切换的网络控制系统、飞行器控制、计算机磁盘驱动器和化工过程控制等<sup>[2-5]</sup>. 文献[6]对任意切换下具有两个子系统的切换非线性系统的镇定问题进行了研究; 文献[7]对任意切换下一类切换非线性系统的鲁棒  $H_{\infty}$  控制问题进行了研究; 文献[8]研究线性切换系统所具有的能控能达性; 文献[9]研究严格反馈下的一类切换非线性系统的镇定问题, 并采用 Backstepping 方法和控制 Lyapunov 函数方法考虑了任意切换下的形式, 给出了构造稳

定反馈律的通用公式. 更高指数奇异系统的控制设计更加困难. 线性和非线性系统的奇异系统的稳定性已在文献[10]中讨论过. 目前研究的奇异系统的大多数控制方法都属于最优控制和鲁棒控制领域. 输出和状态反馈控制和智能控制方法也被扩展用于单一系统. 但很少有论文讨论适应性和模型奇异切换系统的参考控制. 然而, 自适应控制是实践中最有用的方法之一, 自适应控制过程中的自适应机制可以调整具有未知结构和参数的系统的控制器, 以提高系统性能. 所以有必要开发奇异切换系统的自适应方法. 由于这类系统的复杂性导致了控制策略的许多困难, 迄今为止设计的大部分控制方法都是针对线性系统的. 奇异切换非线性控制系统仍是一个开放的研究领域.

本文主要研究一类非线性切换奇异系统的自适应状态反馈控制的设计问题, 基于 Lyapunov 方法, 设计出合适的自适应律, 并选取恰当的切换策略, 使得系统达到渐近稳定, 参数也达到渐近收敛.

## 1 问题描述

考虑如下切换奇异系统

$$E\dot{x} = A_\sigma x + f_\sigma(x) + B_\sigma u_\sigma. \quad (1)$$

其中:  $\sigma(t) \in \{1, 2, \dots, N\} \rightarrow \Lambda$  为切换策略,  $i \in \Lambda$ ,  $x \in \mathbf{R}^n$  为系统的状态变量,  $u_i \in \mathbf{R}^l$  为对应每个子系统的输入变量,  $x, u_i$  均为与时间  $t$  有关的变量,  $E \in \mathbf{R}^{n \times n}$  ( $\text{rank}(E) < n$ ),  $A_i \in \mathbf{R}^{n \times n}$  是线性的函数矩阵,  $B_i \in \mathbf{R}^{n \times l}$ ,  $f_i(x) \in \mathbf{R}^{n \times l}$  为非线性函数矩阵. 其中  $f_i(x)$ ,  $A_i$  是未知的,  $f_i(x)$  满足如下 Lipschitz 条件.

$$\|f_i(x_1) - f_i(x_2)\| \leq L \|x_1 - x_2\|. \quad (2)$$

其中,  $L$  是未知的, 假设  $f(0) = 0$ , 则条件(2)可写为

$$\|f_i(x)\| \leq L \|x\|. \quad (3)$$

对系统(1)提出如下假设:

假设 1 存在矩阵  $P$  满足

$$E^T P = P^T E \geq 0. \quad (4)$$

假设 2 对于矩阵  $P$ , 假设存在满足以下等式的矩阵  $\theta_i^* \in \mathbf{R}^{l \times n}$ .

$$P^T(A_i + LI + B_i \theta_i^*) + (A_i + LI + B_i \theta_i^*)^T P = Q_i. \quad (5)$$

其中:  $Q_i$  是正定的,  $\theta_i^*$  是未知的.

假设 3 选取参考轨迹向量  $x_d$  是可微的, 使得  $E\dot{x}_d$  存在.

假设 4 对于确定的参考向量, 存在满足以下等式的矩阵  $K_i^* \in \mathbf{R}^{l \times n}$ .

$$B_i K_i^* x_d = -(A_i + LI)x_d + E\dot{x}_d. \quad (6)$$

其中:  $K_i^*$  是未知的.

## 2 主要结论

### 2.1 自适应控制设计

基于 Lyapunov 稳定性理论对单输入的非线性奇异系统设计了一个控制策略. 目标是找到一个自适应状态反馈控制器

$$u = \theta_i x, \quad (7)$$

使如下闭环系统是稳定的:

$$E\dot{x} = (A_i + B_i \theta_i)x + f_i(x). \quad (8)$$

即使  $\theta_i$  趋近于  $\theta_i^*$ .

定义自适应率

$$\dot{\theta}_i^T = \begin{cases} -\gamma_i x x^T P^T B_i, & \sigma = i; \\ 0, & \sigma \neq i. \end{cases} \quad (9)$$

式中:  $\gamma_i$  是自适应参数,  $P$  满足式(4).

**定理 1** 非线性奇异切换系统(1)在控制器(7)和自适应率(9)的条件下, 对任意初始条件和切换信号  $\sigma$ , 能够保证闭环系统稳定, 且  $\theta_i$  趋近于  $\theta_i^*$ .

证明

考虑闭环系统

$$E\dot{x} = (A_i + B_i \theta_i)x + f_i(x).$$

则有

$$E\dot{x} = (A_i + B_i \theta_i^*)x + f_i(x) + B_i(\theta_i - \theta_i^*)x. \quad (10)$$

构造 Lyapunov 函数

$$V_i = \frac{1}{2} x^T E^T P x + \frac{1}{2\gamma_i} (\theta_i - \theta_i^*) (\theta_i - \theta_i^*)^T. \quad (11)$$

其中  $P$  满足式(4), 则  $V$  对时间  $t$  求导, 得

$$\dot{V}_i = \frac{1}{2} (x^T E^T P x + x^T P^T E \dot{x}) + \frac{1}{\gamma_i} (\theta_i - \theta_i^*) \dot{\theta}_i^T. \quad (12)$$

将式(10)代入则有

$$\dot{V}_i = x^T P^T (A_i + B_i \theta_i^*) x + x^T P^T B_i (\theta_i - \theta_i^*) x + x^T P^T f_i(x) + \frac{1}{\gamma_i} (\theta_i - \theta_i^*) \dot{\theta}_i^T. \quad (13)$$

根据 Lipschitz 条件(3)有

$$\dot{V}_i \leq x^T P^T (A_i + B_i \theta_i^*) x + x^T P^T B_i (\theta_i - \theta_i^*) x + x^T P^T L x + \frac{1}{\gamma_i} (\theta_i - \theta_i^*) \dot{\theta}_i^T. \quad (14)$$

则有

$$\begin{aligned} \dot{V}_i \leq & \frac{1}{2} [\mathbf{x}^T \mathbf{P}^T (\mathbf{A}_i + \mathbf{B}_i \boldsymbol{\theta}_i^* \mathbf{L}) \mathbf{x} + \\ & \mathbf{x}^T (\mathbf{A}_i + \mathbf{B}_i \boldsymbol{\theta}_i^* \mathbf{L})^T \mathbf{P} \mathbf{x}] + \\ & (\boldsymbol{\theta}_i - \boldsymbol{\theta}_i^*) [\mathbf{x} \mathbf{x}^T \mathbf{P}^T \mathbf{B} + \frac{1}{\gamma_i} \dot{\boldsymbol{\theta}}^T]. \end{aligned} \quad (15)$$

由式(5),(9)可得

$$\dot{V}_i \leq -\frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{Q}_i \mathbf{x}. \quad (16)$$

令

$$V = \sum V_i, \mathbf{Q} = \sum \mathbf{Q}_i,$$

则

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}.$$

由 Lyapunov 稳定性定理可知闭环系统稳定,  $\boldsymbol{\theta}_i$  趋近于  $\boldsymbol{\theta}_i^*$ .

所提出控制器的优点之一是控制律和自适应律非常简单, 便于应用, 因此在实际应用中, 所提出的控制器更方便适用.

可以得到如下推论:

推论 1 对非线性切换奇异系统

$$\mathbf{E} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_\sigma \mathbf{x} + \mathbf{f}_\sigma(\mathbf{x}) + \mathbf{g}_\sigma(\mathbf{x}) u_\sigma. \quad (17)$$

这里  $\mathbf{g}_\sigma(\mathbf{x})$  取决于  $\mathbf{x}$ , 且非常数矩阵. 如果对任意的  $\mathbf{x}$  均有

$$\|\mathbf{g}_i(\mathbf{x})\| \leq \|\mathbf{B}_i\|. \quad (18)$$

可将定理 1 扩展到系统(17), 与定理 1 证明相似, 用  $\mathbf{g}_\sigma(\mathbf{x})$  替换  $\mathbf{B}_\sigma$ , 式(13)可写为

$$\begin{aligned} \dot{V}_i = & \mathbf{x}^T \mathbf{P}^T (\mathbf{A}_i + \mathbf{g}_i(\mathbf{x}) \boldsymbol{\theta}_i^*) \mathbf{x} + \\ & \mathbf{x}^T \mathbf{P}^T \mathbf{g}_i(\mathbf{x}) (\boldsymbol{\theta}_i - \boldsymbol{\theta}_i^*) \mathbf{x} + \\ & \mathbf{x}^T \mathbf{P}^T \mathbf{f}_i(\mathbf{x}) + \frac{1}{\gamma_i} (\boldsymbol{\theta}_i - \boldsymbol{\theta}_i^*) \dot{\boldsymbol{\theta}}^T. \end{aligned} \quad (19)$$

因为  $\mathbf{x}^T \mathbf{P}^T \mathbf{g}_\sigma(\mathbf{x}) \boldsymbol{\theta}_\sigma^* \mathbf{x}$  为标量, 且

$$\mathbf{x}^T \mathbf{P}^T \mathbf{g}_\sigma(\mathbf{x}) \boldsymbol{\theta}_\sigma^* \mathbf{x} \leq \mathbf{x}^T \mathbf{P}^T \mathbf{B}_\sigma \boldsymbol{\theta}_\sigma^* \mathbf{x},$$

式(19)可写为

$$\begin{aligned} \dot{V}_i \leq & \mathbf{x}^T \mathbf{P}^T (\mathbf{A}_i + \mathbf{B}_i \boldsymbol{\theta}_i^*) \mathbf{x} + \\ & \mathbf{x}^T \mathbf{P}^T \mathbf{g}_i(\mathbf{x}) (\boldsymbol{\theta}_i - \boldsymbol{\theta}_i^*) \mathbf{x} + \\ & \mathbf{x}^T \mathbf{P}^T \mathbf{L} \mathbf{x} + \frac{1}{\gamma_i} (\boldsymbol{\theta}_i - \boldsymbol{\theta}_i^*) \dot{\boldsymbol{\theta}}^T. \end{aligned} \quad (20)$$

定理 1 的自适应规则变更为

$$\dot{\boldsymbol{\theta}}_i^T = \begin{cases} -\gamma_i \mathbf{x} \mathbf{x}^T \mathbf{P}^T \mathbf{g}_i(\mathbf{x}), & \sigma = i; \\ 0, & \sigma \neq i. \end{cases} \quad (21)$$

因此, 对于此类非线性切换奇异系统, 定理 1 将被保留.

下面提出的基本自适应控制器扩展为多输入非线性切换奇异系统的跟踪问题.

## 2.2 多输入非线性切换奇异系统的自适应跟踪问题

目标是非线性切换奇异系统(1)对任意初始条件和切换信号  $\sigma$ , 能够保证闭环信号的有界性且状态反馈渐近跟踪, 即

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{e}(t) = 0. \quad (22)$$

这里定义追踪误差

$$\mathbf{e} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_d. \quad (23)$$

引理 1 (Barbalat) 若  $f(t)$  为一直连续函数, 并且  $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t |f(\tau)| d\tau < \infty$  (有界), 则有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0.$$

选取控制器

$$u_i = \boldsymbol{\theta}_i \mathbf{e} + \mathbf{K}_i \mathbf{x}_d. \quad (24)$$

自适应律设计为

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\theta}}_i \begin{cases} \text{vec}(\dot{\boldsymbol{\theta}}_i)^T = -\gamma_i (\mathbf{e}^T \otimes \mathbf{e}^T \mathbf{P}^T \mathbf{B}_i), & \sigma = i; \\ 0, & \sigma \neq i. \end{cases} \\ \dot{\mathbf{K}}_i \begin{cases} \text{vec}(\dot{\mathbf{K}}_i)^T = -\varphi_i (\mathbf{x}_d^T \otimes \mathbf{e}^T \mathbf{P}^T \mathbf{B}_i), & \sigma = i; \\ 0, & \sigma \neq i. \end{cases} \end{aligned} \quad (25)$$

注意, 符号  $\otimes$  表示 Kronecker, 而  $\text{vec}(\mathbf{A})$  意味着向量化  $\mathbf{A}$ , 这是通过将矩阵  $\mathbf{A}$  的列彼此堆叠而获得的, 它是将矩阵转换为列向量的线性变换.

得出以下主要结论.

定理 2 将控制器(24)和自适应律(25)应用于非线性切换奇异系统(1), 对任意初始条件和切换信号  $\sigma$ , 能够保证闭环系统稳定且状态反馈渐近跟踪.

证明 由式(23), 有

$$\mathbf{x} = \mathbf{e} + \mathbf{x}_d. \quad (26)$$

将式(26)代入式(1)中, 可写为

$$\mathbf{E} \dot{\mathbf{e}} + \mathbf{E} \dot{\mathbf{x}}_d = \mathbf{A}_i \mathbf{e} + \mathbf{A}_i \mathbf{x}_d + \mathbf{f}_i(\mathbf{e} + \mathbf{x}_d) + \mathbf{B}_i u_i. \quad (27)$$

定义

$$\mathbf{F}_i(\mathbf{e}) = \mathbf{f}_i(\mathbf{e} + \mathbf{x}_d) - \mathbf{f}_i(\mathbf{x}_d). \quad (28)$$

由式(2)知  $\mathbf{F}_i(\mathbf{e})$  满足 Lipschitz 条件, 将式(28)代入式(27), 有

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \dot{\mathbf{e}} = & \mathbf{A}_i \mathbf{e} + \mathbf{F}_i(\mathbf{e}) + \mathbf{B}_i \boldsymbol{\theta}_i \mathbf{e} + \mathbf{A}_i \mathbf{x}_d + \\ & \mathbf{f}_i(\mathbf{x}_d) - \mathbf{E} \dot{\mathbf{x}}_d + \mathbf{B}_i \mathbf{K}_i \mathbf{x}_d. \end{aligned} \quad (29)$$

整理有

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \dot{\mathbf{e}} = & (\mathbf{A}_i + \mathbf{B}_i \boldsymbol{\theta}_i^*) \mathbf{e} + \mathbf{F}_i(\mathbf{e}) + \\ & \mathbf{B}_i (\boldsymbol{\theta}_i - \boldsymbol{\theta}_i^*) \mathbf{e} + \mathbf{A}_i \mathbf{x}_d + \mathbf{f}_i(\mathbf{x}_d) - \\ & \mathbf{E} \dot{\mathbf{x}}_d + \mathbf{B}_i \mathbf{K}_i^* \mathbf{x}_d + \mathbf{B}_i (\mathbf{K}_i - \mathbf{K}_i^*) \mathbf{x}_d. \end{aligned} \quad (30)$$

构造 Lyapunov 函数

$$V_i = \frac{1}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{E}^T \mathbf{P} \mathbf{e} + \frac{1}{2\gamma_i} \text{vec}(\boldsymbol{\theta}_i - \boldsymbol{\theta}_i^*)^T \text{vec}(\boldsymbol{\theta}_i - \boldsymbol{\theta}_i^*) i +$$

$$\frac{1}{2\varphi_i} \text{vec}(\mathbf{K}_i - \mathbf{K}_i^*)^T \text{vec}(\mathbf{K}_i - \mathbf{K}_i^*). \quad (31)$$

其中,  $\mathbf{P}$  满足(4), 利用  $\text{vec}(\mathbf{A})$  和 Kronecker, 上式重写为

$$\begin{aligned} \dot{V}_i = & \mathbf{e}^T \mathbf{P}^T (\mathbf{A}_i + \mathbf{B}_i \boldsymbol{\theta}_i^*) \mathbf{e} + \mathbf{e}^T \mathbf{P}^T \mathbf{F}_i(\mathbf{e}) + \\ & \mathbf{e}^T \mathbf{P}^T \mathbf{B}_i (\boldsymbol{\theta}_i - \boldsymbol{\theta}_i^*) \mathbf{e} + \mathbf{e}^T \mathbf{P}^T \mathbf{B}_i (\mathbf{K}_i - \mathbf{K}_i^*) \mathbf{x}_d + \\ & \mathbf{e}^T \mathbf{P}^T \mathbf{f}_i(\mathbf{x}_d) + \mathbf{e}^T \mathbf{P}^T (\mathbf{B}_i \mathbf{K}_i^* \mathbf{x}_d + \mathbf{A}_i \mathbf{x}_d - \mathbf{E} \dot{\mathbf{x}}_d) + \\ & \frac{1}{\gamma_i} \text{vec}(\boldsymbol{\theta}_i - \boldsymbol{\theta}_i^*)^T \text{vec}(\boldsymbol{\theta}_i - \boldsymbol{\theta}_i^*) + \\ & \frac{1}{\varphi_i} \text{vec}(\mathbf{K}_i - \mathbf{K}_i^*)^T \text{vec}(\mathbf{K}_i - \mathbf{K}_i^*). \end{aligned} \quad (32)$$

利用 Lipschitz 条件

$$\begin{aligned} \dot{V}_i \leq & \mathbf{e}^T \mathbf{P}^T (\mathbf{A}_i + \mathbf{B}_i \boldsymbol{\theta}_i^* + \mathbf{L}\mathbf{I}) \mathbf{e} + \\ & \mathbf{e}^T \mathbf{P}^T \mathbf{B}_i (\boldsymbol{\theta}_i - \boldsymbol{\theta}_i^*) \mathbf{e} + \mathbf{e}^T \mathbf{P}^T \mathbf{B}_i (\mathbf{K}_i - \mathbf{K}_i^*) \mathbf{x}_d + \\ & \mathbf{e}^T \mathbf{P}^T (\mathbf{B}_i \mathbf{K}_i^* \mathbf{x}_d + \mathbf{A}_i \mathbf{x}_d - \mathbf{E} \dot{\mathbf{x}}_d + \mathbf{L}\mathbf{I} \mathbf{x}_d) + \\ & \frac{1}{\gamma_i} \text{vec}(\dot{\boldsymbol{\theta}}_i)^T \text{vec}(\boldsymbol{\theta}_i - \boldsymbol{\theta}_i^*) + \\ & \frac{1}{\varphi_i} \text{vec}(\dot{\mathbf{K}}_i)^T \text{vec}(\mathbf{K}_i - \mathbf{K}_i^*). \end{aligned} \quad (33)$$

由式(6)知, 上式第三项为 0, 又因  $\mathbf{e}^T \mathbf{P}^T \mathbf{B}_i (\boldsymbol{\theta}_i - \boldsymbol{\theta}_i^*) \mathbf{e}$ ,  $\mathbf{e}^T \mathbf{P}^T \mathbf{B}_i (\mathbf{K}_i - \mathbf{K}_i^*) \mathbf{x}_d$  均为标量, 有

$$\mathbf{e}^T \mathbf{P}^T \mathbf{B}_i (\boldsymbol{\theta}_i - \boldsymbol{\theta}_i^*) \mathbf{e} = \text{vec}(\mathbf{e}^T \mathbf{P}^T \mathbf{B}_i (\boldsymbol{\theta}_i - \boldsymbol{\theta}_i^*) \mathbf{e}). \quad (34)$$

$$\mathbf{e}^T \mathbf{P}^T \mathbf{B}_i (\mathbf{K}_i - \mathbf{K}_i^*) \mathbf{x}_d = \text{vec}(\mathbf{e}^T \mathbf{P}^T \mathbf{B}_i (\mathbf{K}_i - \mathbf{K}_i^*) \mathbf{x}_d). \quad (35)$$

由 Kronecker 规则, 有

$$\begin{aligned} \text{vec}(\mathbf{e}^T \mathbf{P}^T \mathbf{B}_i (\boldsymbol{\theta}_i - \boldsymbol{\theta}_i^*) \mathbf{e}) = \\ (\mathbf{e}^T \otimes \mathbf{e}^T \mathbf{P}^T \mathbf{B}_i) \text{vec}(\boldsymbol{\theta}_i - \boldsymbol{\theta}_i^*). \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \text{vec}(\mathbf{e}^T \mathbf{P}^T \mathbf{B}_i (\mathbf{K}_i - \mathbf{K}_i^*) \mathbf{x}_d) = \\ (\mathbf{x}_d^T \otimes \mathbf{e}^T \mathbf{P}^T \mathbf{B}_i) \text{vec}(\mathbf{K}_i - \mathbf{K}_i^*). \end{aligned} \quad (37)$$

将式(36), (37)代入式(33)中, 可以得到

$$\begin{aligned} \dot{V}_i \leq & \frac{1}{2} \mathbf{e}^T [\mathbf{P}^T (\mathbf{A}_i + \mathbf{B}_i \boldsymbol{\theta}_i^* + \mathbf{L}\mathbf{I}) + \\ & (\mathbf{A}_i + \mathbf{B}_i \boldsymbol{\theta}_i^* + \mathbf{L}\mathbf{I})^T \mathbf{P}] \mathbf{e} + [(\mathbf{e}^T \otimes \mathbf{e}^T \mathbf{P}^T \mathbf{B}_i) + \\ & \frac{1}{\gamma_i} \text{vec}(\dot{\boldsymbol{\theta}}_i)^T] \text{vec}(\boldsymbol{\theta}_i - \boldsymbol{\theta}_i^*) + [(\mathbf{x}_d^T \otimes \mathbf{e}^T \mathbf{P}^T \mathbf{B}_i) + \\ & \frac{1}{\varphi_i} \text{vec}(\dot{\mathbf{K}}_i)^T] \text{vec}(\mathbf{K}_i - \mathbf{K}_i^*). \end{aligned} \quad (38)$$

由式(25), (5)可得

$$V = \sum \dot{V}_i \leq \sum -\frac{1}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{Q}_i \mathbf{e} \leq -\frac{1}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{Q} \mathbf{e}. \quad (39)$$

由式(39)知, 式(15)中全部子系统有共同的 Lyapunov 函数. 说明, 对任意切换信号  $\sigma$ ,  $\mathbf{e} \in L_2 \cap L_\infty$ , 由引理 1, 可得  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{e}(t) = 0$ , 亦即状态渐近跟踪.

可以看出, 控制律和适应机制非常简单, 易于应用于奇异系统的跟踪问题. 类似于推论 1, 可以得到类似的结果如下.

推论 2 类似于推论 1, 如果存在矩阵  $\mathbf{B}_i$ , 对任意  $\mathbf{x}$  存在  $\|\mathbf{g}_i(\mathbf{x})\| \leq \|\mathbf{B}_i\|$ , 则选取自适应律

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\theta}}_i^T = -\gamma_i (\mathbf{e}^T \otimes \mathbf{e}^T \mathbf{P}^T \mathbf{g}_i(\mathbf{x})), & \sigma = i; \\ 0, & \sigma \neq i. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{K}}_i^T = -\varphi_i (\mathbf{x}_d^T \otimes \mathbf{e}^T \mathbf{P}^T \mathbf{g}_i(\mathbf{x})), & \sigma = i; \\ 0, & \sigma \neq i. \end{cases}$$

定理 2 同样适用.

### 3 数值仿真

设控制对象状态方程为

$$\mathbf{E} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_i \mathbf{x} + \mathbf{B}_i \mathbf{u}_i + \mathbf{f}_i(\mathbf{x}).$$

其中:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} -0.1 & 0 \\ 0 & 0.075 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 30 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} -0.25 & 0 \\ 0 & 0.125 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 25 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\text{取 } \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}, \gamma_1 = 0.0065,$$

$$\gamma_2 = 0.0085, \varphi_1 = 0.0075, \varphi_2 = 0.0095.$$

自适应律为

$$\text{vec}(\dot{\boldsymbol{\theta}}_i)^T = -\gamma_i (\mathbf{e}^T \otimes \mathbf{e}^T \mathbf{P}^T \mathbf{B}_i),$$

$$\text{vec}(\dot{\mathbf{K}}_i)^T = -\varphi_i (\mathbf{x}_d^T \otimes \mathbf{e}^T \mathbf{P}^T \mathbf{B}_i), \quad i = \{1, 2\}.$$

取输入信号

$$y_1(t) = 4\sin(0.125t + 0.5),$$

$$y_2(t) = 4\cos(0.125t).$$

仿真结果如图 1 ~ 图 4 所示.

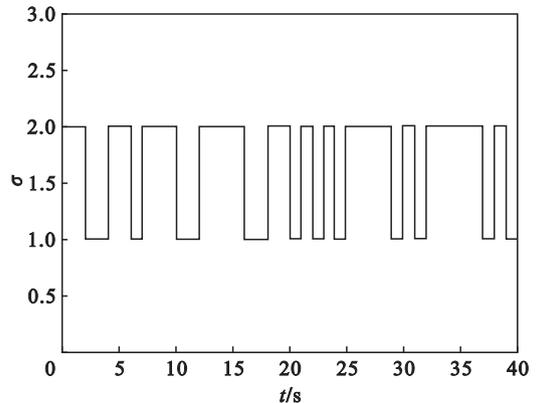


图 1 切换信号  
Fig. 1 Switching signal

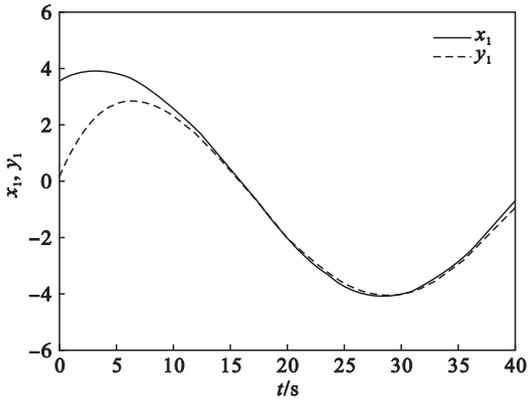
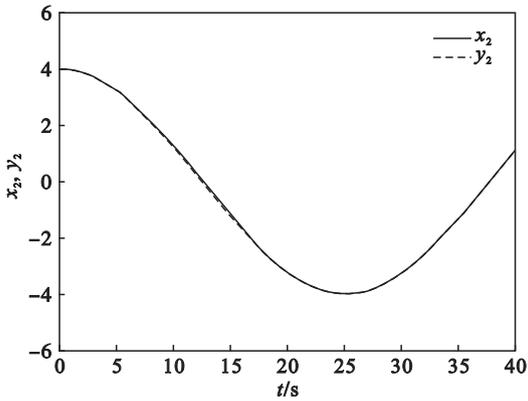
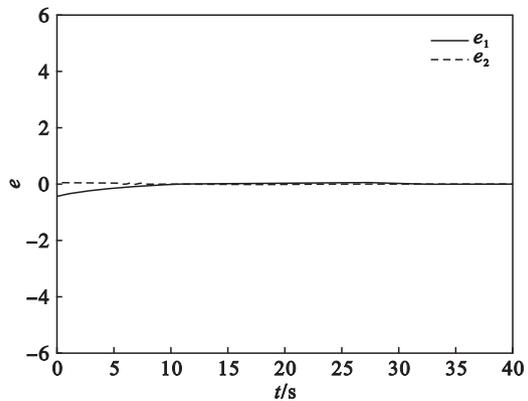
图2 跟踪位置状态  $x_1$  的性能Fig. 2 Tracking performance for position state  $x_1$ 图3 跟踪位置状态  $x_2$  的性能Fig. 3 Tracking performance for position state  $x_2$ 

图4 追踪误差

Fig. 4 Tracking error

## 4 结 语

本文对一类满足 Lipschitz 条件的非线性奇异切换系统的自适应控制进行了研究. 以单输入非线性奇异切换系统所呈现的具有自适应增益和基于 Lyapunov 稳定性定理调整增益的机制为基础, 将其扩展为多输入奇异切换系统的跟踪问题, 设计了自适应控制方法. 采用 Matlab 方法作了数值仿真, 仿真结果证明所设计方法有效.

## 参考文献:

- [1] Antsaklis P J, Nerode A. Hybrid control systems; an introductory discussion to the special issue [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1998, 43(4): 457-460.
- [2] 张乐, 杨红, 井元伟. 一类不确定切换模糊系统的自适应鲁棒跟踪控制[J]. *东北大学学报(自然科学版)*, 2008, 29(8): 1073-1076.  
(Zhang Le, Yang Hong, Jing Yuan-wei. Adaptive robust tracking control for a class of uncertain switched fuzzy systems [J]. *Journal of Northeastern University (Natural Science)*, 2008, 29(8): 1073-1076.)
- [3] Narendra K S, Balakrishnan J. Adaptive control using multiple modes [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1997, 42(2): 171-187.
- [4] Zhao J, Spong M W. Hybrid control for global stabilization of the cart-pendulum system [J]. *Automatica*, 2001, 37(12): 1941-1951.
- [5] Wang Q, Hou Y Z, Dong C Y. Model reference robust adaptive control for a class of uncertain switched linear systems [J]. *International Journal of Robust and Nonlinear*, 2012, 22(9): 1019-1035.
- [6] Wu J L. Stabilizing controllers design for switched nonlinear systems in strict-feedback form [J]. *Automatica*, 2009, 45(5): 1092-1096.
- [7] Wang Z P, Ge S S, Lee T H. Robust adaptive neural network control of uncertain nonholonomic systems with strong nonlinear drifts [J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 2004, 34(5): 2048-2059.
- [8] Zhang Y, Zheng Y, Zhao F. Dynamical analysis in a stochastic bioeconomic model with stage-structuring [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2016, 84(2): 1113-1121.
- [9] Efimov D V. Switching adaptive control of affine nonlinear system [C]// *European Control Conference*. Linz, 2015: 1513-1518.
- [10] Hu Q, Fei Q, Ma H B, et al. Switching control system based on robust model reference adaptive control [J]. *Journal of Systems Science*, 2016, 29(4): 1-36.