

doi: 10.12068/j.issn.1005-3026.2019.08.013

滚动轴承非线性因素对转子系统振动特性的影响

罗忠^{1,2}, 周逸夫^{1,2}, 边子方^{1,2}, 王菲^{1,2}
(1. 东北大学 机械工程与自动化学院, 辽宁 沈阳 110819; 2. 东北大学 航空动力装备振动及控制教育部重点实验室, 辽宁 沈阳 110819)

摘要: 针对滚动轴承支承下的转子系统在运行过程中存在的滞后突跳问题,利用嵌入同伦弧长延拓的HB-AFT方法,可以快速计算在滚动轴承支承下转子系统的滞后突跳区间;利用Floquet理论进行稳定性判定,分析轴承等效刚度、轴承游隙与线性阻尼系数对转子系统滞后突跳的影响.结果表明:轴承游隙与轴承等效刚度在一定范围内变化会影响转子系统的滞后突跳区间,而阻尼系数只在转子系统临界转速附近影响系统振动的幅值.研究结果可为轴承-转子系统参数的选取提供理论参考.

关键词: 滚动轴承;非线性;转子系统;振动特性;滞后突跳

中图分类号: V 214.1 **文献标志码:** A **文章编号:** 1005-3026(2019)08-1131-08

Influence of Nonlinearity Factors of Rolling Bearings on Vibration Characteristics of Rotor System

LUO Zhong^{1,2}, ZHOU Yi-fu^{1,2}, BIAN Zi-fang^{1,2}, WANG Fei^{1,2}
(1. School of Mechanical Engineering & Automation, Northeastern University, Shenyang 110819, China; 2. Key Laboratory of Vibration and Control of Aero-Propulsion System, Ministry of Education, Northeastern University, Shenyang 110819, China. Corresponding author: LUO Zhong, E-mail: zhluo@mail.neu.edu.cn)

Abstract: Aiming at the hysteresis jump of a rotor system supported by rolling bearings during operation, by using the HB-AFT method embedded in the homotopy arc extension, the interval of the hysteresis jump of the rotor system supported by rolling bearings can be quickly calculated. The Floquent theory is used to determine the stability, and the effects of bearing equivalent stiffness, bearing clearance and linear damping coefficient on the hysteresis jump of the rotor system are analyzed. The results show that the variation of bearing clearance and bearing equivalent stiffness within a certain range will affect the hysteresis jump range of the rotor system, and the damping coefficient only affects the system's vibration amplitude near the critical speed of the rotor system. The results of the study provide a theoretical reference for setting the bearing-rotor system parameters.

Key words: rolling bearing; nonlinearity; rotor system; vibration characteristics; hysteresis jump

转子系统的滞后突跳行为是指在非线性因素的激励下,转子系统在水平或竖直方向上出现与Duffing软硬特性曲线类似的现象,即共振峰值发生移动导致转子系统在不同于临界转速的位置发生大幅振动从而引发的突跳行为.滚动轴承-转子系统中作为主要支承构件的滚动轴承具有诸多非线性因素,由此导致转子系统在运行过程中存在较强的非线性特性,这对于转子系统运行的稳定性和安全性具有极大的影响.滚动轴承的非线性因素包括轴承赫兹接触刚度、轴承游隙等,这些非线性因素引起转子系统诸多复杂的运动行为.因此,国内外学者针对滚动轴承-转子系统开展了大量的研究工作.

Yamamoto等^[1]通过建立球轴承-转子系统动力学模型,针对滚动轴承间隙的非线性影响进行研究. Tiwari等^[2]研究了轴承球体径向内部间

隙对转子平衡动力学的影响. Villa 等^[3]针对复杂柔性转子轴承系统进行了稳定性分析. Peletan 等^[4]针对转子系统的稳态与动态特性提出准周期谐波平衡法(HBM)与伪弧长延拓法相结合的算法. Sun 等^[5]研究了具有摩擦冲击的双转子系统的稳态响应,其研究结果表明了质量、偏心率、轴间刚度和转速比等参数对双转子系统动态特性的影响. Sundararajan 等^[6]用弧长延伸法求得了转子系统的动态特性. Ganesan^[7]分析了转轴及轴承相关参数对转子系统振动特性的影响. Wang 等^[8]研究不同轴承配置对转子系统稳定性的影响,并提出一种精确识别系统阻尼比的方法. 张智勇^[9]构建两自由度深沟球轴承模型,以 HB-AFT 为手段对轴承转子系统进行追踪. 白长青等^[10]研究了轴承-转子系统在不同轴承间隙、不同转速下的稳定性,其研究表明,轴承间隙是影响转子系统稳定性的一个重要因素. Ma 等^[11]建立了转子叶片系统的新动力学模型并利用有限元法和实验验证了该模型的正确性. Han 等^[12]研究了柔性转子-轴承系统在时间周期基角运动下的参数不稳定性并推导了时变基角运动下转子系统的精确有限元模型.

本文旨在利用同伦弧长延拓的 HB-AFT 法并结合 Floquent 稳定性理论,计算转子系统滞后突跳区间,分析滚动轴承的非线性特性对转子系统滞后区间的影响.

1 滚动轴承-转子模型

为研究轴承非线性特性对转子系统振动特性的影响,如图 1 所示建立滚动轴承-转子系统动力学模型,并作如下假设:①轴承外圈固结于轴承座,且轴承座始终处于静止状态;②转盘在转轴的正中位置,两端轴承呈对称分布,整个转子系统呈刚性;③滚动轴承内圈与转轴整体建模,滚动体等效为具有刚度和阻尼的弹簧,并保留轴承的游隙、赫兹接触、变柔度这三个主要非线性因素.

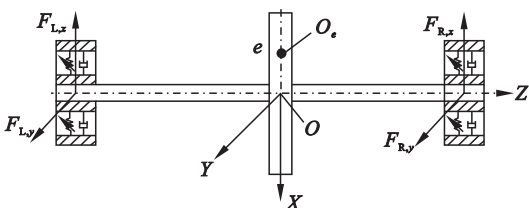


图 1 滚动轴承-转子系统动力学模型

Fig. 1 Dynamic model of the rolling bearing rotor system

图 1 中,转盘几何中心 O 为坐标轴 $Oxyz$ 原

点; O_e 为质心, e 为偏心距; $F_{L,x}, F_{L,y}, F_{R,x}, F_{R,y}$ 为左、右轴承产生的非线性支反力. 转子系统振动微分方程为

$$M \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} + C \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix} = M e \omega^2 \begin{bmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_r \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

式中: $M = \begin{bmatrix} 2m & \\ & 2m \end{bmatrix}$, $m = (1/2)m_r$, m_r 为转子质量; $C = \begin{bmatrix} 2c & \\ & 2c \end{bmatrix}$, c 为轴承阻尼; $G_r = m_r g$ 为转子重力; ω 为系统转动角速度; t 为时间.

由于在建立滚动轴承-转子系统时将滚动轴承内圈与转轴进行整体建模,且转子系统为刚性轴,故系统振动响应同时反映了转子部分振动特性及滚动轴承振动特性.

2 计算转子系统的滞后突跳区间

由于滚动轴承赫兹接触与轴承间隙的存在,转子系统在运行过程中会出现有线性恢复力与无线性恢复力的情况,因此,转子系统的动力学微分方程属于分段非线性方程,普通的谐波平衡法不适用于本文建立的转子系统非线性微分方程. 针对此类问题, Yamauchi 提出了一种半数值半解析的隐式谐波平衡法^[13],其主要思想是将系统响应及非线性部分分别设成周期响应解,并对其进行离散化处理,即将 1 个周期 T 分为 N 份,每段时间 $\Delta t = T/N$,根据系统方程分别在每个离散点处进行频域时域转换,建立谐波系数之间的关系,并进行迭代求解,从而得到相应条件下的系统响应. 此方法称为频时域转换谐波平衡法(简称 HB-AFT),其优点在于避免了求解过程中复杂的积分处理,对于复杂非线性系统求解具有较高的实用性.

2.1 HB-AFT 的一般形式

转子系统动力学方程写成矩阵形式

$$M\ddot{X} + D\dot{X} + KX = F_{NL}(\dot{X}, X, \Omega, t) + G_g. \quad (2)$$

式中: M 表示转子系统质量矩阵; D 表示转子系统阻尼矩阵; K 表示系统刚度矩阵; X 为动力学方程的解; $F_{NL}(\dot{X}, X, \Omega, t)$ 为转子系统受到的非线性作用力, G_g 表示转子系统重力.

设动力学方程的解 X 与非线性作用力 F_{NL} 为傅里叶级数形式:

$$X(t) = A_0 + \sum_{k=1}^K [A_k \cos(k\omega t) + B_k \sin(k\omega t)], \quad (3)$$

$$F_{NL}(t) = C_0 + \sum_{k=1}^K [C_k \cos(k\omega t) + S_k \sin(k\omega t)] . \tag{4}$$

式中： K 为谐波项数； $A_0, C_0, A_k, B_k, C_k, S_k$ 为谐波系数。

对式(3)求取一阶、二阶导数可得

$$\left. \begin{aligned} \dot{X}(t) &= \sum_{k=1}^K [-k\omega A_k \sin(k\omega t) + k\omega B_k \cos(k\omega t)] , \\ \ddot{X}(t) &= \sum_{k=1}^K [-(k\omega)^2 A_k \cos(k\omega t) - (k\omega)^2 B_k \sin(k\omega t)] . \end{aligned} \right\} \tag{5}$$

将式(3)~式(5)代入式(2),使等式两端对应的常数项及三角函数项系数分别相等,常数部分为

$$KA_0 = C_0 + G_g . \tag{6}$$

第 k 次谐波项结果为

$$(K - (k\omega)^2 M)A_k + (k\omega)DB_k = C_k , \tag{7}$$

$$(K - (k\omega)^2 M)B_k - (k\omega)DA_k = S_k . \tag{8}$$

将所有谐波项用对角矩阵表示,可得 $(2K + 1)r$ 维矩阵:

$$\begin{bmatrix} K & & & \\ & R_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & R_k & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & R_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0 \\ P_1 \\ \vdots \\ P_k \\ \vdots \\ P_r \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C_0 \\ Q_1 \\ \vdots \\ Q_k \\ \vdots \\ Q_r \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} G_g \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = 0 , \tag{9}$$

式(9)中 $P_k = \begin{bmatrix} A_k \\ B_k \end{bmatrix}, Q_k = \begin{bmatrix} C_k \\ S_k \end{bmatrix}$,

$$R_k = \begin{bmatrix} K - (k\omega)^2 M & (k\omega)D \\ -(k\omega)D & K - (k\omega)^2 M \end{bmatrix} . \tag{10}$$

式中 r 为转子系统自由度数目。

F_{NL} 为关于包含位移的非线性项的隐函数的傅里叶表达式,因此,式(9)可以写成如下形式:

$$H(P, Q) = RP - Q - G_L = 0 . \tag{11}$$

P, Q 系数均为未知数时,该系统方程含有 $(4K + 2)r$ 个未知数,而式(9)中仅包含 $(2K + 1)r$ 个代数方程组,无法直接对 P, Q 进行求解,因此需要建立非线性力与位移的隐函数关系,即令 Q 中的未知数用 P 中未知数表示。

$F_{NL}(\dot{X}, X, \Omega, t)$ 是由 \dot{X}, X 构成的表达式,通过傅里叶逆变换得到 F_{NL} 中未知数:

$$\left. \begin{aligned} C_0 &= \frac{2}{T} \int_0^T F_{NL} dt , \\ C_k &= \frac{2}{T} \int_0^T F_{NL} \cos(k\omega t) dt , \\ S_k &= \frac{2}{T} \int_0^T F_{NL} \sin(k\omega t) dt . \end{aligned} \right\} \tag{12}$$

Q 由 C_0, C_k, S_k 组成, F_{NL} 与 P 中元素相关,通过式(12)建立 Q 与 P 的关系,得 $(2K + 1)r$ 个未知数和 $(2K + 1)r$ 个方程组. 给定 P 一组初始值,利用 Newton-Raphson 方法迭代得到 P , 具体迭代格式如下:

$$J^{(i-1)}(P^{(i+1)} - P^{(i)}) - H^{(i)} = 0 , \tag{13}$$

$$J = \partial H / \partial P + \partial H / \partial Q \cdot dQ / dP . \tag{14}$$

式(14)中的 $\partial H / \partial P, \partial H / \partial Q$ 可通过式(9)、式(10)得到, dQ / dP 可通过式(12)求导得到. 为避免积分过程,采用 IDFT 方法将时域信息离散为以下形式^[9]:

$$X(n, P) = A_0 + \sum_{k=1}^K [A_k \cos(2\pi kn/N) + B_k \sin(2\pi kn/N)] . \tag{15}$$

式中, $n = 0, 1, 2, \dots, N - 1$. 这里 $X(n, P)$ 表示由位移谐波系数 P 表示的时域位移响应 $X(\tau)$ 在离散时间点 $n \cdot \Delta T$ 处的值,这里 $\Delta T = T_\omega / N, T_\omega$ 为 ω 对应的周期, N 为时域离散点数. 则非线性力 F_{NL} 时域离散信息为

$$F_{NL}(n, P) = C_0 + \sum_{k=1}^K [C_k \cos(2\pi kn/N) + S_k \sin(2\pi kn/N)] . \tag{16}$$

经 DFT 变换,式(16)可表示为

$$C_0(n, P) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} F_{NL}(n, P) , \tag{17}$$

$$C_k(n, P) = \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} F_{NL}(n, P) \cos(2\pi kn/N) , \tag{18}$$

$$S_k(n, P) = \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} F_{NL}(n, P) \sin(2\pi kn/N) . \tag{19}$$

式中, $k = 1, 2, 3, \dots, K$. 通过式(17)~式(19),建立了由时域信息和频域信息转换得来的 Q 与 P 的代数关系式,得到式(14)中的 dQ / dP ,进而可通过 Newton-Raphson 迭代过程求解未知向量 P .

迭代求解不动点 P 的 HB-ATF 过程如下:

- ①设置迭代初值 $P^{(0)}$ 及各项初始参数;
- ②采用 AFT 过程给出迭代 Jacobian 矩阵 $J^{(0)}$;
- ③根据式(14)中的 Newton-Raphson 方法进行迭代,求得 $P^{(1)}$;

④将 $\mathbf{P}^{(1)}$ 值赋予 $\mathbf{P}^{(0)}$, 循环步骤②和③, 直到 m 次迭代后 $\mathbf{P}^{(m)} - \mathbf{P}^{(m-1)}$ 的范数小于指定精度 ε , 也可通过判定 \mathbf{H} 范数小于 ε 来得到最优解. 具体流程如图 2 所示.

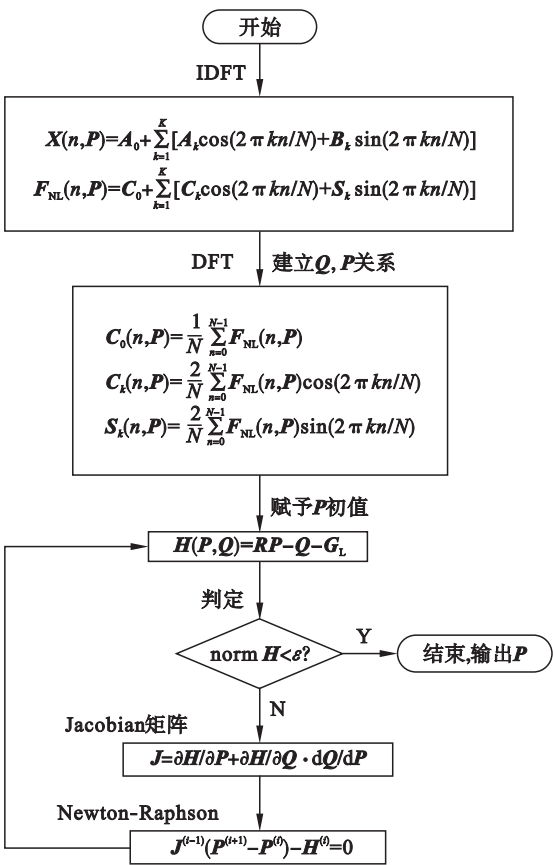


图 2 AFT 计算方法流程图
Fig. 2 Flow chart of AFT calculation method

由以上求解过程可见, 非线性部分被设置为谐波解形式后, 只要非线性部分与系统位移响应函数关系确定且存在导数关系, 则非线性部分的复杂程度并不影响离散 HB-AFT 方法的使用. 如式 (16) 所示, 复杂的非线性力都是由未知自变量的代数关系式确定的, 那么就可以根据式 (13) ~ 式 (19) 求得 Newton-Raphson 迭代计算所需的 Jacobian 矩阵 \mathbf{J} . 因此, 即使对于包含分段函数、间隙和分数指数的非线性参激系统, HB-AFT 方法求解依然有效.

2.2 利用 HB-AFT 结合同伦弧长延拓对系统解进行追踪

为采用 HB-AFT 方法追踪系统的全局周期轨线, 进而研究系统的滞后突跳行为, 需要将 HB-AFT 过程中的 Newton-Raphson 迭代过程与弧长延拓法相结合. 为此将 HB-AFT 方法求解变柔度振动周期响应的谐波平衡方程 $\mathbf{H}(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = 0$ 的问题转化为

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\mathbf{H}}{d\mathbf{P}} \frac{d\mathbf{P}}{ds} + \frac{d\mathbf{g}}{d\lambda} \frac{d\lambda}{ds} &= 0, \\ \frac{d\mathbf{P}}{ds} \frac{d\mathbf{P}^T}{ds} + \left(\frac{d\lambda}{ds} \right)^2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

采用 HB-AFT 法, 结合弧长延拓法, 并采用 Newton-Raphson 迭代校正方法追踪系统的过程如下^[9]:

- ①利用 HB-AFT 方法得到相应转速对应的精确解 \mathbf{P} , 给定系统一组初始解 $(\lambda, \mathbf{P})_0$;
- ②根据延拓方向 ν_0 , 设定一个较小的迭代步长 δ (本文初始迭代步长 $\delta = 0.5\delta$), 得到初始预估解 $(\lambda, \mathbf{P})_1$;
- ③对 $(\lambda, \mathbf{P})_1$ 通过 Newton-Raphson 进行迭代, 直至收敛至容许误差范围 ε 内, 得到新的精确解 $(\lambda, \mathbf{P})_*$;
- ④计算 $(\lambda, \mathbf{P})_1$ 与 $(\lambda, \mathbf{P})_*$ 形成的切向量角度 a_ν , 若 $a_\nu < 6^\circ$, 则取步长 $\delta = 2\delta$, 以 $(\lambda, \mathbf{P})_*$ 为初值, 利用预估-校正方法继续进行下一步计算; 若 $a_\nu > 18^\circ$, 则放弃 $(\lambda, \mathbf{P})_*$, 取步长 $\delta = 0.5\delta$, 重新进行计算.
- ⑤重复步骤②、③和④, 直至 λ 达到设定值, 得到解 $(\lambda, \mathbf{P})^*$, 输出 \mathbf{P}^* .

对于 HB-AFT 结合同伦弧长延拓法并采用 Newton-Raphson 迭代校正方法追踪系统分支过程如图 3 所示.

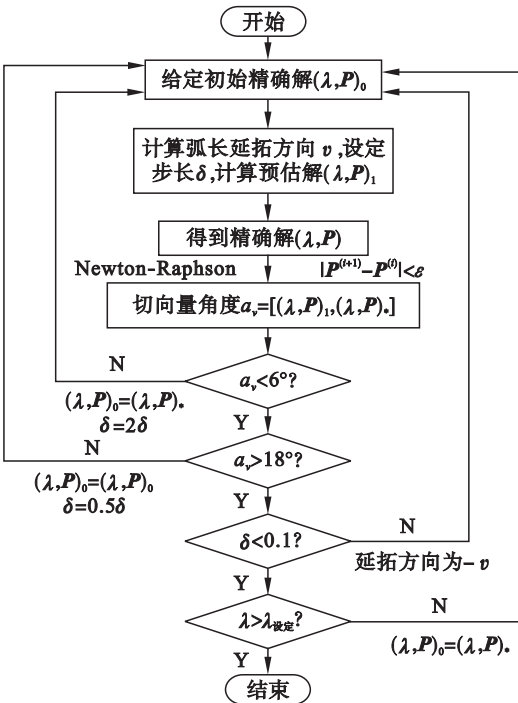


图 3 预估-校正追踪系统解的过程
Fig. 3 Process of tracking system solution with predictor and corrector

2.3 球轴承载荷分析

假设球轴承有 j 个滚动体,第 j 个滚动体的位置角为 θ_j ,则

$$\theta_j = \frac{2\pi}{N_b}(j-1) + \omega_c t + \theta_0, j = 1, 2, 3, \dots \quad (21)$$

式中: $0 \leq \theta_0 < \frac{\pi}{2}$; N_b 为滚动体个数; ω_c 为保持架中心角速度; t 为时间.

第 j 个滚动体与滚道的接触变形量为

$$\delta_j = x \cos \theta_j + y \sin \theta_j - \delta_0. \quad (22)$$

式中: x, y 分别为轴承在 X, Y 两个方向的位移量; δ_0 为轴承游隙.

滚道上产生的非线性接触变形载荷为

$$F = \sum_{n=1}^{N_b} K_b \delta_{j+}^{3/2}. \quad (23)$$

式中“+”表示:当 $\delta_j > 0$ 时,滚道上的非线性接触变形为 δ_j ;当 $\delta_j \leq 0$ 时,滚道上的非线性接触变形为 0,即滚动体与环道不接触,没有接触变形载荷. K_b 为滚动体与滚道的接触变形系数,则

$$K_b = \left(1 / \left(\frac{1}{K_i} \right)^{2/3} + \left(\frac{1}{K_o} \right)^{2/3} \right)^{3/2}. \quad (24)$$

式中 K_i, K_o 分别为滚动体与内、外圈滚道之间接触点的刚度.

所以,球轴承产生的轴承载荷为

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix} = K_b \sum_{j=1}^{N_b} (x \cos \theta_j + y \sin \theta_j - \delta_0)^{3/2} \begin{bmatrix} \cos \theta_j \\ \sin \theta_j \end{bmatrix}. \quad (25)$$

2.4 数值算例

2.4.1 谐波次数与离散点的选取

在 HB-AFT 计算过程中要求对谐波项数 K 进行选取,如果项数太少,将导致计算结果不准确;如果项数过多,计算效率就会大幅降低.图 4 为 AFT 算法与数值算法的对比示意图.

如图 4 所示,虚线代表 AFT 算法,实线代表数值算法.图 4d 为谐波项数 $K = 18$ 时,AFT 方法与数值计算方法结果的比较,可以发现,相对图 4a,吻合度大幅提高.

如图 4b 所示,在选取离散点数 N 值时,如果 N 取得过小,在 DFT 过程中将会发生频率混叠现象,计算结果将严重失真;选取过大将增大计算量.通过对比图 4a,4b,4c 和 4d,本算例取谐波项数 $K = 18$,时域离散点数 $N = 150$.

2.4.2 计算滞后突跳区间

滚动轴承-转子系统相关参数如表 1 所示.

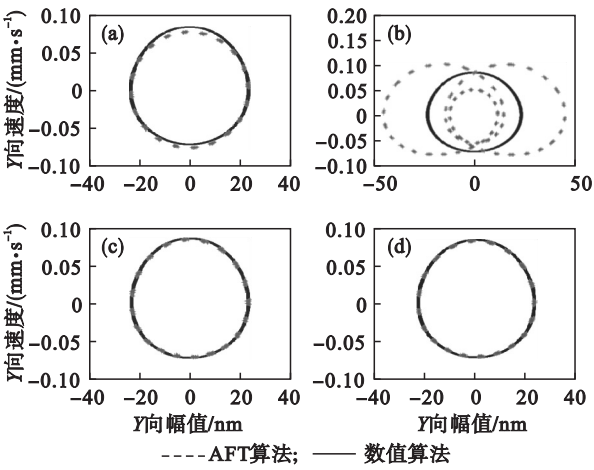


图 4 谐波项数与离散点的选取对比图
Fig. 4 Comparison of harmonic frequency and discrete point selection

(a)— $K = 9, N = 150$; (b)— $K = 9, N = 30$;
(c)— $K = 18, N = 80$; (d)— $K = 18, N = 150$.

表 1 滚动轴承-转子系统参数
Table 1 Parameters of the rolling bearing rotor system

参数	数值	参数	数值
滚珠数量	9	等效刚度 $K_b / (\text{GN} \cdot \text{m}^{-2/3})$	12.5
径向间隙 $\delta_0 / \mu\text{m}$	1	滚动轴承内阻 $c / (\text{N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1})$	200
转子质量/kg	25	转子重力/N	245

以保持架转速 Ω 为控制参数,采用嵌入弧长延拓的 HB-AFT 方法追踪轴承-转子系统的幅频响应曲线, X 方向代表转子系统的竖直方向, Y 方向代表转子系统的水平方向,计算结果如图 5 所示.

图 5 中,虚线部分代表不稳定区间段转子系统在 X, Y 方向可能存在双稳态特性.系统在 X 方向的 $239.2 \sim 264.7 \text{ rad/s}$ 区间出现了向左偏移的共振峰值,即表现为软的滞后特性.可能由于 X 方向受重力影响导致只在该方向上具有滞后特性.

系统在 Y 方向的 $198.8 \sim 210 \text{ rad/s}$ 区间出现了交叉结构,即系统在 Y 方向上具有软、硬滞后特性.在 X, Y 方向 $378 \sim 422 \text{ rad/s}$ 区间表现为不稳定的幅频响应曲线.如图 5a 所示,伴随着控制参数 Ω 的变化,系统 X 方向上的幅频响应曲线从 A 点跳跃到 A' 上,此时的振幅相较原来大幅提升,称点 A 是系统的一个分岔点.随着控制参数 Ω 的减小,在转接点 B 处产生的亚谐振动使 C 点向下跳到 C' 点,此时振幅相较原来大幅下降.

综上,系统在 X 方向上的参数激励接触共振频率区间产生了软的滞后突跳现象,在 Y 方向上

产生了软硬共存的滞后突跳现象. 滞后分岔的双稳态乃至多稳态行为, 会给系统带来突跳冲击作用, 冲击作用是裂纹产生的主要因素, 而裂纹衍生是产生严重断裂故障的重要机制^[14], 这对于转子系统来说是不希望发生的.

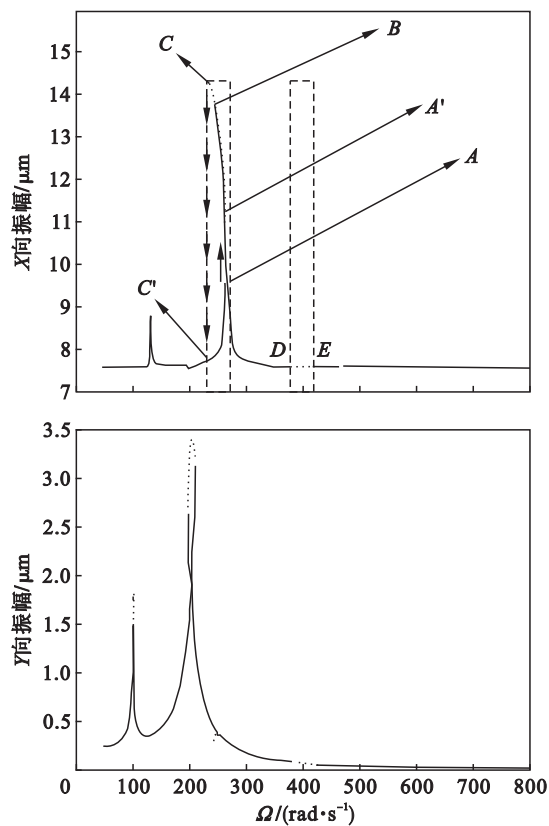


图 5 幅频响应曲线
Fig. 5 Frequency response curve

2. 4. 3 利用 Floquet 理论进行稳定性判定

Floquet 理论可用于分析非线性动力学周期响应的局部稳定性, 当系统设计参数集发生改变时, 根据 Floquet 特征乘子模可判断非线性动力系统是否失稳以及周期解的分岔形式. 本文采用 Hsu^[15] 方法求得 Floquet 特征矩阵的全部特征值, 并且取最大值作为 Floquet 乘子. 利用 Floquet 乘子判断稳定性: 当 Floquet 乘子模的最大值小于 1 时稳定; 大于 1 不稳定; 等于 1 临界稳定. 可根据模最大的 Floquet 乘子穿出复平面上单位圆时的情况将失稳分岔方式分类^[14].

如表 2 所示, 当转子系统的解逆时针绕过点 A 时, 发现特征矩阵的 Floquet 乘子 λ 在 $\Omega = 264.73 \text{ rad/s}$ 处从实部 +1 处穿出单位圆, 即转子系统发生鞍节型分岔进入了非稳定区间.

表 2 分岔点 A 附近的 Floquet 乘子 λ
Table 2 Floquet multipliers λ around the branch point A

$\Omega/(\text{rad}\cdot\text{s}^{-1})$			
264.55	264.71	264.73	264.74
0.75 + 0.48i	0.86 + 0.22i	0.87 + 0.13i	0.74 + 0.48i
0.75 - 0.48i	0.86 - 0.22i	0.87 - 0.13i	0.75 - 0.48i
1.01	0.79 + 0.41i	0.77 + 0.45i	1.01
0.78	0.79 - 0.41i	0.77 - 0.45i	0.718

3 轴承参数对滞后突跳行为的影响

3. 1 轴承赫兹接触刚度对滞后突跳行为的影响

将上述算例中转子系统的质量设为 20 kg, 阻尼系数设为 $200 \text{ N}\cdot\text{s/m}$, 轴承游隙为 $10 \text{ }\mu\text{m}$, 计算滚动轴承赫兹接触刚度分别为 $7.5 \times 10^9, 1 \times 10^{10}, 1.25 \times 10^{10}$ 和 $1.5 \times 10^{10} \text{ N/m}$ 时整个转子系统的幅频响应曲线. 为更直观地观察系统滞后特性曲线, 选取 X, Y 方向上滞后特性比较明显的 $170 \sim 250 \text{ rad/s}$ 响应区间进行研究.

如图 6 所示, 当轴承赫兹接触刚度由 $7.5 \times 10^9 \text{ N/m}$ 变化到 $1 \times 10^{10} \text{ N/m}$ 时, X 方向上的滞后突跳区间由 $208 \sim 223 \text{ rad/s}$ 变化到 $225 \sim 243 \text{ rad/s}$,

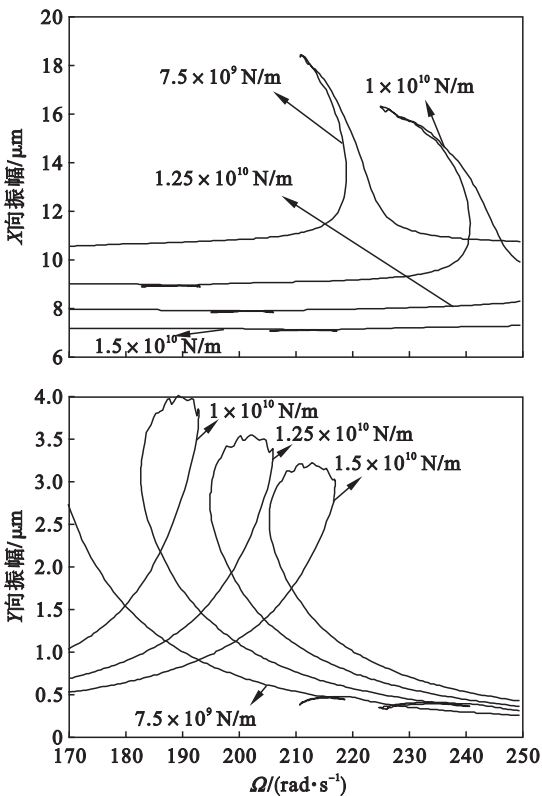


图 6 不同赫兹接触刚度的幅频响应曲线
Fig. 6 Frequency response curves with different Herz contact stiffness

且伴随着滞后区间的增大;当轴承赫兹接触刚度增加到 $1.25 \times 10^{10} \text{ N/m}$ 时,滞后特性消失. 当轴承赫兹接触刚度增加到 $1.5 \times 10^{10} \text{ N/m}$ 时同样没有发现滞后现象的发生. 当轴承赫兹接触刚度为 $7.5 \times 10^9 \text{ N/m}$ 时 Y 方向上没有滞后突跳现象发生,当轴承赫兹接触刚度增加到 $1 \times 10^{10} \text{ N/m}$ 时开始发生滞后突跳且滞后突跳区间逐渐右移,振幅随之逐渐减小. 研究整个变化过程得出结论:随着轴承赫兹接触刚度的增加,转子系统的滞后区间呈现右移的趋势;在 X 方向上随刚度增大滞后区间逐渐减小直至消失,在 Y 方向上刚度增加到一定程度会产生滞后突跳现象.

3.2 阻尼系数对滞后突跳行为的影响

计算阻尼系数分别为 200, 800, 1 200, 2 500 $\text{N}\cdot\text{s/m}$ 时转子系统的幅频响应曲线. 在研究轴承-转子系统的振动特性受阻尼系数的影响时,保持其他参数不变.

如图 7 所示,阻尼系数在 200 $\text{N}\cdot\text{s/m}$ 经由 800, 1 200 $\text{N}\cdot\text{s/m}$ 变化到 2 500 $\text{N}\cdot\text{s/m}$ 的过程中,阻尼系数主要影响转子系统滞后突跳区间的幅值,转子系统在 X, Y 方向上的振幅随着阻尼系数的增加而减小,且当阻尼系数大于某一数值时,转子系统在 X, Y 方向的滞后效应将会消失.

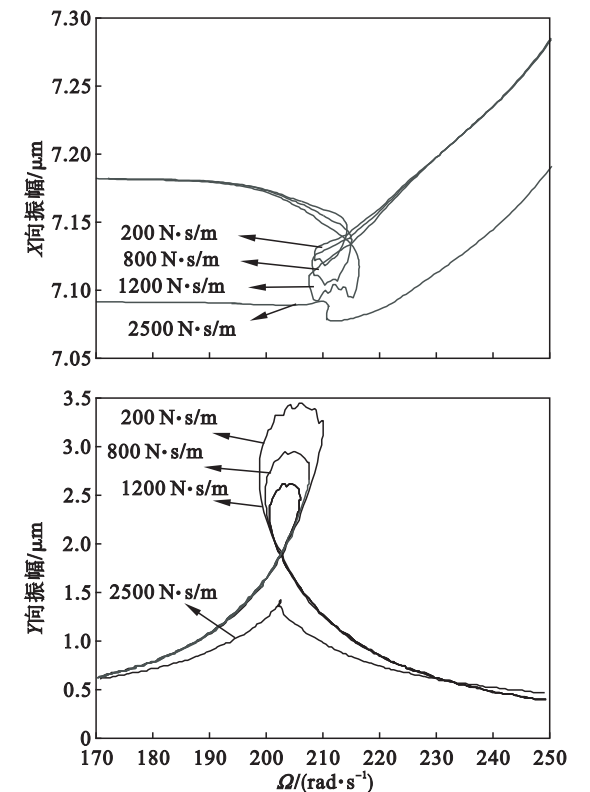


图 7 不同阻尼系数的幅频响应曲线

Fig. 7 Frequency response curves with different damping coefficients

3.3 轴承游隙对滞后突跳行为的影响

计算轴承游隙分别为 10, 20, 30, 50, 60 μm 时转子系统的幅频响应曲线,在研究轴承游隙对系统滞后特性的影响时,保持其他参数不变.

图 8 为轴承游隙分别为 10, 20, 30, 50, 60 μm 时转子系统在 X, Y 方向上的幅频响应曲线,其中断点部分为失稳区间,连续曲线部分为稳定运行区间. 从 Y 方向的幅频响应曲线可观察到轴承游隙对整个转子系统滞后突跳区间的影响. 转子系统 Y 方向的幅频响应曲线出现了交叉结构,一般意味着系统此时伴随着软硬滞后特性并存的现象^[16]. 同时,随着轴承游隙的增加,转子系统的滞后运动区间明显右移且滞后区间也逐渐变大,并且滞后区间的幅值明显增大,对系统的冲击作用更大. 当游隙减小到一定程度时滞后特性将会消失,转子系统的振幅将会减小.

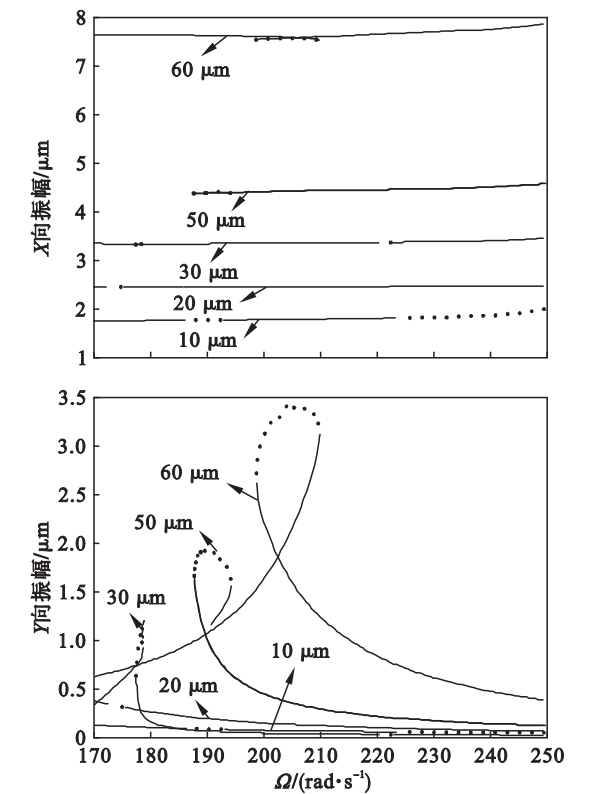


图 8 不同轴承游隙的幅频响应曲线

Fig. 8 Frequency response curves with different bearing clearance

4 结 论

- 1) 受滚动轴承非线性因素的影响,转子系统可能会呈现滞后突跳的特性.
- 2) 滚动轴承的游隙与等效刚度会影响转子系统滞后突跳区间的范围,同时也会影响滞后突

跳区间的振幅,所以轴承游隙与轴承等效刚度对转子系统的滞后突跳的特性具有重要的影响。

3) 支承阻尼系数相对于轴承游隙、轴承等效刚度而言对转子系统滞后突跳行为的影响较小。在系统临界转速附近区域,阻尼系数几乎不影响转子系统滞后突跳区间的范围,但会降低滞后突跳区间的振幅,故在转子系统的参数设计时,适当增加阻尼系数对转子系统有一定的积极作用。

参考文献:

- [1] Yamamoto T, Ishida Y, Ikeda T, et al. Nonstationary vibration of a rotating shaft with nonlinear spring characteristics during acceleration through a critical speed [J]. *Nonlinear Dynamics*, 1990, 1(5): 341–358.
- [2] Tiwari M, Gupta K, Prakash O. Effect of radial internal clearance of a ball bearing on the dynamics of a balanced horizontal rotor [J]. *Journal of Sound & Vibration*, 2000, 238(5): 723–756.
- [3] Villa C, Sinou J J, Thouverez F. Stability and vibration analysis of a complex flexible rotor bearing system [J]. *Communications in Nonlinear Science & Numerical Simulation*, 2008, 13(4): 804–821.
- [4] Peletan L, Baguet S, Richardet G J, et al. Use and limitations of the harmonic balance method for rub-impact phenomena in rotor-stator dynamics [C]// ASME Turbo Expo 2012: Turbine Technical Conference and Exposition. [S. l.], 2012: 647–655.
- [5] Sun C, Chen Y, Hou L. Steady-state response characteristics of a dual-rotor system induced by rub-impact [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2016, 86(1): 1–15.
- [6] Sundararajan P, Noah S T. Dynamics of forced nonlinear systems using shooting/arc-length continuation method—application to rotor systems [J]. *Journal of Vibration and Acoustics*, 1997, 119(1): 9–20.
- [7] Ganesan R. Effects of bearing and shaft asymmetries on the

instability of rotors operating at near-critical speeds [J]. *Mechanism & Machine Theory*, 2000, 35(5): 737–752.

- [8] Wang W M, Li Q H, Gao J J, et al. An identification method for damping ratio in rotor systems [J]. *Mechanical Systems & Signal Processing*, 2016, 68/69: 536–554.
- [9] 张智勇. 球轴承-转子系统变柔度振动的分岔与滞后行为 [D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2015.
(Zhang Zhi-yong. Bifurcations and hysteresis of varying compliance vibrations of a ball bearing-rotor system [D]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2015.)
- [10] 白长青, 许庆余, 张小龙. 考虑径向内间隙的滚动轴承平衡转子系统的非线性动力稳定性 [J]. *应用数学和力学*, 2006, 27(2): 159–169.
(Bai Chang-qing, Xu Qing-yu, Zhang Xiao-long. Nonlinear stability of balanced rotor due to the effect of ball bearing internal clearance [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2006, 27(2): 159–169.)
- [11] Ma H, Lu Y, Wu Z, et al. A new dynamic model of rotor-blade systems [J]. *Journal of Sound & Vibration*, 2015, 357: 168–194.
- [12] Han Q, Chu F. Parametric instability of flexible rotor-bearing system under time-periodic base angular motions [J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2015, 39(15): 4511–4522.
- [13] Yamauchi S. The nonlinear vibration of flexible rotors, 1st report, development of a new analysis technique [J]. *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers C*, 1983, 49(446): 1862–1868.
- [14] Nayfeh A H, Balachandran B. *Applied nonlinear dynamics* [M]. Weinheim: Wiley-VCH, 2004: 187–207, 300–331, 449–450.
- [15] Hsu C S. On approximating a general linear periodic system [J]. *Journal of Mathematical Analysis & Applications*, 1974, 45(1): 234–251.
- [16] Yao M H, Zhang W. Using the extended Melnikov method to study multi-pulse chaotic motions of a rectangular thin plate [J]. *International Journal of Dynamics and Control*, 2014, 2(3): 365–385.

(上接第 1130 页)

- [6] Sasahara H, Kikuma T, Koyasu R, et al. Surface grinding of carbon fiber reinforced plastic (CFRP) with an internal coolant supplied through grinding wheel [J]. *Precision Engineering*, 2014, 38(4): 775–782.
- [7] Wang H, Ning F D, Hu Y B, et al. Surface grinding of CFRP composites using rotary ultrasonic machining: a comparison of workpiece machining orientations [J]. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 2018, 95(5/6/7/8): 2917–2930.
- [8] Hu N S, Zhang L C. A study on the grindability of multidirectional carbon fibre-reinforced plastics [J]. *Journal*

of Materials Processing Technology, 2003, 140(1/2/3): 152–156.

- [9] Zhang Y B, Li C H, Jia D Z, et al. Experimental study on the effect of nanoparticle concentration on the lubricating property of nanofluids for MQL grinding of Ni-based alloy [J]. *Journal of Materials Processing Technology*, 2016, 232: 100–115.
- [10] Wu H X, Li X, He X L, et al. An investigation on the lubrication mechanism of MoS₂ nanoparticles in unidirectional and reciprocating sliding point contact: the flow pattern effect around contact area [J]. *Tribology International*, 2018, 122: 38–45.