

二阶系统的复特征根对其鲁棒 H_∞ 控制性能的影响

王占山¹, 王继东^{1,2}, 刘秀舛¹, 孙 鉴¹

(1. 东北大学 信息科学与工程学院, 辽宁 沈阳 110819; 2. 华北水利水电大学 电力学院, 河南 郑州 450045)

摘 要: 针对具有复特征根的二阶线性系统的鲁棒 H_∞ 控制性能进行了研究, 特别是探讨了虚部特征根对 H_∞ 性能的作用, 揭示了当特征根的实部固定不变的情况下, 特征根的虚部增加到一定程度就会对 H_∞ 性能不起作用, 进而针对给定的系统矩阵, 在 H_∞ 性能的框架下分析了特征根实部和虚部之间的比例关系. 同时, 比照经典二阶系统的部分成果, 探讨了经典二阶系统的阻尼比系数选取范围与 H_∞ 性能框架下复特征根参数之间的对照关系, 进而从时域的角度给出了阻尼比参数选取的一种合理解释, 并形成时频交互综合分析, 为极点配置控制理论中的期望极点的选取提供一种理论参考.

关 键 词: H_∞ 范数; H_∞ 性能; H_∞ 控制; 干扰; 阻尼比; 时频交互综合分析

中图分类号: TP 273 **文献标志码:** A **文章编号:** 1005-3026(2019)09-1217-06

Impact of Complex Eigenvalues on Their Robust H_∞ Control Performance in Second-Order Systems

WANG Zhan-shan¹, WANG Ji-dong^{1,2}, LIU Xiu-chong¹, SUN Jian¹

(1. School of Information Science & Engineering, Northeastern University, Shenyang 110819, China; 2. School of Electrical Engineering, North China University of Water Resources and Electric Power, Zhengzhou 450045, China. Corresponding author: WANG Zhan-shan, E-mail: wangzhanshan@ise.neu.edu.cn)

Abstract: Robust H_∞ performance is studied for a class of second-order linear systems with complex eigenvalues, especially the impact of imaginary part of complex eigenvalues on the H_∞ performance is studied. It is found that when the real part of the complex eigenvalues is fixed, the impact of the imaginary part of the complex eigenvalues on the H_∞ performance becomes little when the value of the imaginary part exceeds a threshold. Based on this observation, a fixed proportional relation between the imaginary part and the real part of the complex eigenvalues is found for a given system matrix under the framework of H_∞ performance. Referring to the classical control theory of second-order systems in frequency domain, the relationship between the selection ranges of damping ratio and the complex eigenvalue is further discussed in the framework of H_∞ performance, in which a reasonable explanation on the selection ranges of damping ratio is presented. This analysis procedure forms the time-frequency domain interaction synthesis method, which provides a theoretical guidance for the selection and determination of the desired closed-loop poles in the control theory based on the pole placement method.

Key words: H_∞ norm; H_∞ performance; H_∞ control; disturbance; damping ratio; time-frequency domain interaction synthesis method

H_∞ 控制理论主要是用来解决系统存在干扰和不确定情况下的优化控制问题, 进而实现系统外界干扰或不确定性对系统的期望输出的影响达

到最小. H_∞ 方法最初是从频域入手进行的研究, 并在 1989 年转换到时域, 进而开启了基于状态空间方程描述的受控系统的鲁棒 H_∞ 控制研

究^[1-6]. H_∞ 控制实现的是静态向量或矩阵的 H_∞ 范数的动态化,并能确保动态系统对干扰具有一定的抑制性能. 围绕如何设计 H_∞ 控制器及其相关优化求解方法成为控制界研究的重点内容之一^[7-9]. 实际上,从不同分析观点来看, H_∞ 控制既属于鲁棒控制,也属于优化控制范畴. 不论属于哪类控制模式,最终影响系统性态的还是闭环系统的特征根的分布. 这样,实现 H_∞ 性能的控制器的设计是满足一定性能指标的集合,而特征值也将一定的域内变动. H_∞ 控制器的设计方法,大体上可以分为基于极点配置的控制方法和基于有界实引理的优化方法^[5-6]. 基于极点配置方法是 H_∞ 控制早期的主要工作,它是从系统结构配置上解决系统抗扰性问题,但这类研究只是针对期望的给定极点进行的控制器设计,并没有具体考虑期望极点如何选取以及期望极点的实部和虚部对 H_∞ 性能的作用^[10-11]. 另一种是根据干扰到期望输出的 H_∞ 范数最小的设计原则,基于有界实引理方法实现 H_∞ 控制器的设计^[12-14]. 这类控制器的设计是基于优化原理进行的,并由此得到控制器存在的充分条件. 这类方法的特点是直接对闭环系统的系统矩阵进行分析,并求得满足期望性能的一组控制器,但没有考虑 H_∞ 控制器作用后是怎样改变闭环系统的特征值分布的,以及系统矩阵的特征值、特别是复特征值的实部和虚部对 H_∞ 性能的影响如何. 作为研究系统特性最基本的特征值法,应该在 H_∞ 控制中体现特征值不同分量的作用,进而为 H_∞ 控制器的设计,特别是低能耗、低阶控制器的设计提供评价和设计标准.

一般来讲,系统的实部和虚部都很大的话,从能量角度来看,都需要很大的投入. 控制器装置作为能量系统的一部分,相应也会消耗大量的能量,进而在达到控制效果的前提下,不论减少实部还是虚部的大小都将是有益的^[15-16]. 具体减少哪部分作用,这首先需要由理论科技工作者给出解答,并再由工程技术人员结合具体的问题进行具体运用.

二阶系统是控制系统中应用最广泛、最具代表性的系统之一. 许多高阶系统在一定的条件下(如在工作点附件采用的线性化分析方法)常常近似地作为二阶系统来研究,二阶系统的分析方法也是分析高阶系统的基础^[17]. 同时鉴于在频域内对二阶系统已经有着成熟的研究结果,如何实现频域和时域分析方法相对照相补充并形成时频交互综合分析,特别是在鲁棒干扰抑制方面的认识进行统一,这方面的研究还不多见. 进而,本文

针对一类线性二阶系统,首次从系统特征根的实部和虚部角度来研究 H_∞ 控制是通过怎样的系统特征值的配置来达到干扰抑制的目的,并由此建立与经典频域下的二阶系统理论部分成果之间的相互联系.

本文一是揭示了 H_∞ 性能下的实部与虚部之间的比例关系,说明了在实部固定情况下,过大增加虚部值对系统性能提升没有任何作用;二是探究了 H_∞ 性能下的二阶系统的阻尼比问题,验证了经典控制理论中阻尼比选在 0.4 ~ 0.8 的合理性,并由此为基于极点配置的控制理论中如何确定期望闭环极点提供了基于 H_∞ 性能的时频交互综合分析方法.

1 H_∞ 控制基础

H_∞ 控制理论是 20 世纪 80 年代开始兴起的一门“新”的现代控制理论,主要研究抑制干扰和不确定性问题,也就是针对一个给定的性能指标,使得期望输出对干扰的 H_∞ 范数小于一个极小值,进而抑制干扰对期望输出的影响^[1-6]. H_∞ 控制问题的基本结构如图 1 所示.

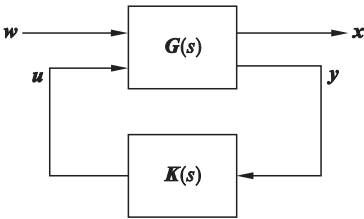


图 1 H_∞ 控制基本框图
Fig. 1 Basic block diagram of H_∞ control

其中: w 是干扰; y 是系统输出; u 是控制输入; x 是系统期望输出; $G(s)$ 是系统结构矩阵或者是传递函数矩阵; $K(s)$ 是反馈控制增益. 控制问题就是设计适当的控制器,使得干扰 w 对期望输出 x 的影响最小.

H_∞ 控制的理论基础是 H_∞ 范数. 向量的 H_∞ 范数是指向量诸元素中最大的那个元素,传递函数的 H_∞ 范数是指输入到输出传递函数的波特图中增益的最大值,反映了输出信号与输入信号能量之比的最大值. 如果输入是外界干扰,显然希望能够通过加入 H_∞ 控制器使得输出对输入的放大倍数(传递函数的 H_∞ 范数)越小越好^[1-6]. 传递函数的 H_∞ 范数刻画了输入到期望输出影响的一种量度,称之为 H_∞ 性能,它是矩阵 H_∞ 范数概念在控制系统理论中的一种延拓. 静态向量或矩阵

的 H_∞ 范数与动态系统的 H_∞ 性能具有异曲同工之处,进而静态 H_∞ 范数的动态化是 H_∞ 控制的实现基础.由于难以精确求解 H_∞ 范数,进而逼近论方法被提出来,并结合近似寻优思想,在干扰抑制方面界实原理被提出来^[12-14],并将频域空间解析求解 H_∞ 问题转化为时域状态空间的约束优化问题,即将求解频域 H_∞ 范数的问题转化为求解时域内某期望输出满足 $\|x(t)\|_2 \leq \gamma \|w(t)\|_2$ 条件下的界实引理的数值优化问题,并由此求得最小正标量 γ ,即 H_∞ 范数.

在图1中,如果将传递函数 $G(s)$ 看作是一个孤立的系统,则 w 是外部干扰, u 是外部控制输入, $K(s)$ 是反馈增益矩阵.如果将传递函数 $G(s)$ 和反馈增益矩阵 $K(s)$ 看作是一个整体,则 w 是内部干扰, u 是内部调节输入.不论是内部反馈控制还是外部反馈控制,最终的表征都是改变系统的自身结构特征,即特征值的分布特性.状态空间方法更能够反映系统结构特性,特别是特征根的实部和虚部分布问题.这样,为简明起见,上述 H_∞ 控制问题可以用如下的线性状态空间来近似描述:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= Ax + w, \\ y &= x. \end{aligned} \right\} \tag{1}$$

即在干扰 w 的作用下,如何求取系统输出或状态向量 x 的最大幅值问题.此时的 A 是指包含了内外控制作用后的系统矩阵,是具有负实部的稳定矩阵.需说明的是,此时的系统(1)尽管在形式上与开环系统的表示相似,但在系统矩阵 A 中包含的信息还是不同的,如何设计控制器增益 $K(s)$ 不是本文的重点,相关内容可参见 H_∞ 控制经典教材^[5-6].本文旨在针对设计好的控制器作用下,研究系统矩阵 A 的特征值的实部和虚部与 H_∞ 性能之间的相互关系,特别是虚部值的大小对 H_∞ 范数的影响,以及 H_∞ 性能与传统控制理论中的阻尼比等参数的关系.

2 问题描述

考虑二阶系统(1),现重写如下:

$$\dot{x} = Ax + w. \tag{2}$$

其中: A 是稳定矩阵, $A \in \mathbf{R}^{2 \times 2}$,并且其特征值是复数; x 是系统状态; $w \in \mathbf{R}^2$ 是干扰输入,并且 $\|w\| \leq \delta$, δ 是一个给定常数, $\|\cdot\|$ 为欧几里德范数.

所考虑的问题是,在干扰 w 的作用下,如何获得状态 x 的最大暂态上界.在数学意义上,这一

问题等价于具有状态输出的系统(1)的 H_∞ 性能估计问题^[12-13].

为了凸显系统特征值对于 H_∞ 性能估计的作用,考虑到系统矩阵具有复特征值,则依据矩阵理论,存在可逆矩阵 H ,使得 $D = -HAH^{-1}$,其中

$$D = \begin{bmatrix} \lambda & v \\ -v & \lambda \end{bmatrix}.$$

$\lambda + vj$ 和 $\lambda - vj$ 分别是系统矩阵 A 的两个复特征值, $\lambda > 0, v > 0$.鉴于 $H = \gamma \text{diag}(h_1, h_2) \Gamma$,其中 γ 和 Γ 是正交矩阵, h_1 和 h_2 是 H 的奇异值,并且满足 $h_2 \geq h_1 > 0$,则系统(1)可以写为

$$\left. \begin{aligned} \dot{\eta} &= - \begin{bmatrix} \lambda & \alpha v \\ -\frac{1}{\alpha} v & \lambda \end{bmatrix} \eta + \Delta = B\eta + \Delta, \\ y &= \Gamma^{-1} \eta. \end{aligned} \right\} \tag{3}$$

其中, $\alpha = h_2/h_1 \geq 1, \Delta = \Gamma w, \|\Delta\| \leq \delta$.系统(1)和(3)的 H_∞ 范数相等.这样,将系统(1)转化成用系统特征值表示的等价系统(3),进而特征值的实部和虚部对 H_∞ 范数的影响,可通过线性时不变系统的界实引理来进行计算^[5-6,12-13]:

$$\begin{bmatrix} PB + B^T P & P & I \\ P & -\gamma^2 I & 0 \\ I & 0 & -I \end{bmatrix} < 0, \tag{4}$$

则可以求得式(4)中 γ 的最小值 γ_{\min} ,即得到 H_∞ 范数或 H_∞ 性能.之后通过具体的例子来说明系统矩阵 A 的特征值实部和虚部对 H_∞ 性能的影响情况.

需说明的是,系统矩阵 A 的特征值是与参数 α 值一一对应的,尽管 γ 和 Γ 正交矩阵的选取不同,但是不会改变系统矩阵 A 的表示形式,进而不会影响系统的 H_∞ 性能.相反,选取不同的参数 α 值,具有相同特征值的系统矩阵 A 存在多种表示形式,但此时的系统 H_∞ 性能可能会不一样.因此,针对给定的系统矩阵 A ,本文这里的变换不会影响系统的 H_∞ 性能.

3 仿真算例

下面针对系统(3),利用界实引理(4)来分析不同情况下的系统特征根的实部和虚部对 H_∞ 性能的影响.针对系统特征根的实部 λ 固定,虚部 v 从0逐渐增大的情况,系统的 H_∞ 性能以及稳态值如表1,表2所示.当 α 选取不同值时的 H_∞ 性能及其阻尼比,见表3.

针对稳定系统矩阵 A 具有复特征根的情况,根据自动控制理论^[16-17]可知,实部和虚部的作用

各不相同,实部增大,稳定裕度增大;虚部增大,则振荡环节作用增强,进而调节时间相应增加.实部和虚部的适当配合可实现快速稳定的动态响应,不能仅仅强调系统的稳定性能.从表 1,表 2 可见,当 α 和实部都给定的情况下,系统的 H_∞ 性能随着虚部不断变化.但是当实部和虚部的比值达到某个界限时, H_∞ 性能就保持不变了.这给控制理论研究提供如下启示:

1) 鲁棒控制器的介入能保证系统稳定的同时,也能满足一定的鲁棒性能,这一鲁棒性能是通过改变系统特征值的分布来实现的.适当的虚部值可以对鲁棒性能起到改善作用,过大的虚部值将对 H_∞ 性能没有任何贡献.

2) 随着实部的增大, H_∞ 性能或者 H_∞ 范数逐渐减小,进而对干扰的抑制能力越来越强.这是与系统的稳定裕度增大相适应的,越稳定的系统抗扰性越强.

3) 将受控系统当作发电系统,从平均功率理论来看,虚部往往代表的是无功出力,进而增大虚部作用,意味着无功功率增加,系统进相深度增加,不利于系统性能提升.将受控系统当作用电系统,对于恒定的视在功率,增加虚部无功的作用意味着用电系统的功率因素将降低,不利于系统的节能降耗.因此,从消耗能量角度来看,鲁棒 H_∞ 控制器作用后的闭环系统的特征根的虚部值不宜过大.

4) 在频域的极点配置中,期望性能极点的选取可参照时域 H_∞ 性能下的复特征根的分布情况,形成时频交互综合分析,进而为极点配置理论提供借鉴和补充作用.即针对给定的极点实部先分析其 H_∞ 性能指标,由此来确定虚部的位置,并考虑到抗扰性或阻尼比的权衡,进一步确定虚部值,并由此确定期望的闭环极点位置.这一时频交互综合分析,将对传统控制理论中的期望极点的选取给出了一种合理解释,而不是简单的一句依赖专家经验进行选择,进而为经典的极点配置控制方法的有效运用提供更加有力的检验依据.

5) 从抗扰性的角度来看,表 1~表 2 中的阻尼比选择在 0.5~0.9 就可满足 H_∞ 性能要求.对照经典控制理论中无干扰时的控制器设计通常将阻尼比限制在 0.4~0.8^[16-17],显然具有一定的合理性.尽管此时的 H_∞ 性能在阻尼比大于 0.8 时就已实现,但无干扰时的阻尼比选择在 0.4~0.8 已经具备足够的抗扰性了.由此可见经典控制理论中的二阶系统的设计已经考虑了外界干扰的潜在影响并具有足够的鲁棒性,体现了系统内部结构特性以及外部专家经验的综衡问题.与传

统的基于幅频裕度角度来解释传统二阶控制系统具有鲁棒性的特点不同,本文是基于时域 H_∞ 性能的角度通过对比相应的阻尼比的选取范围来验证其鲁棒性的.再结合表 3 可见,对应 H_∞ 性能的闭环系统的最优阻尼比都是大于 0.707 的,因此,在干扰抑制控制系统设计中,如果采用极点配置方法的话,可将阻尼比相应提高一些.

表 1 H_∞ 范数估计 ($\alpha=2, \lambda=2$)
Table 1 Estimation of H_∞ norm ($\alpha=2, \lambda=2$)

ν	H_∞ 范数 γ	$\ A^{-1}\ \cdot\gamma$	阻尼比	固有频率
6	0.626	0.099	0.316	6.329
4	0.626	0.140	0.447	4.474
3	0.626	0.174	0.555	3.604
2	0.626	0.221	0.707	2.829
1.2	0.626	0.268	0.857	2.334
1	0.622	0.278	0.894	2.237
0	0.501	0.251	1	2

注:黑体代表最优值.

表 2 H_∞ 范数估计 ($\alpha=2, \lambda=4$)
Table 2 Estimation of H_∞ norm ($\alpha=2, \lambda=4$)

ν	H_∞ 范数 γ	$\ A^{-1}\ \cdot\gamma$	阻尼比	固有频率
6	0.313	0.043	0.554	7.22
4	0.313	0.055	0.707	5.658
3	0.313	0.063	0.8	5
2.2	0.313	0.069	0.876	4.566
2	0.311	0.070	0.894	4.474
1	0.291	0.071	0.97	4.124
0	0.251	0.063	1	4

注:黑体代表最优值.

表 3 实部固定时 H_∞ 范数对应的虚部实部之最优比例值及相应的阻尼比
Table 3 Optimal proportion value and damping ratio of the imaginary part and the real part corresponding to H_∞ norm when the real part is fixed

α	H_∞ 性能下的复特征根的虚实部比例值	阻尼比
1	0.55	0.876 2
2	0.6	0.857 4
4	0.75	0.8
6	0.84	0.765 7
10	0.86	0.758 2
20	0.96	0.721 4
100	0.99	0.710 7

6) 由表 3 可知,即使系统矩阵具有相同的特征根实部,但是不同的 α 对应不同的系统矩阵表示形式,进而具有不同的 H_∞ 性能以及不同的虚

实部比值,相应的阻尼比也不同.进而,在追求控制系统卓越品质和友好交互的前提下,精细设计好每一个环节,如复特征根的实虚部值以及相应的变换矩阵,最终实现系统矩阵的约简以及控制器的设计,都是非常有意义的.

7) 从表 3 可见,复特征根的虚实部的比值最大为 1.当比值趋近于 1 时,所对应的阻尼比将是 0.707.可见,在 H_∞ 控制中,对应 H_∞ 性能的闭环系统的最优阻尼比都是大于 0.707 的,这是有干扰作用和无干扰作用下的控制效果的区别.

当特征根的虚部 ν 固定,则实部 λ 逐渐增大的仿真结果如表 4,表 5 所示.从表 4,表 5 可见,随着实部的增加, H_∞ 范数呈现减小趋势,亦即说明,随着系统的稳定裕度增大,系统的抗扰能力逐渐增强,以致当系统达到深度稳定时,干扰将对系统没有什么影响.

表 4 H_∞ 范数估计 ($\alpha=2, \nu=2$)

Table 4 Estimation of H_∞ norm ($\alpha=2, \nu=2$)

λ	H_∞ 范数 γ	$\ A^{-1}\ \cdot \gamma$
0.1	12.51	6.247
1	1.251	0.560
2	0.626	0.221
3	0.417	0.116
5	0.245	0.046
10	0.114	0.011
20	0.054	0.003

表 5 H_∞ 范数估计 ($\alpha=2, \nu=4$)

Table 5 Estimation of H_∞ norm ($\alpha=2, \nu=4$)

λ	H_∞ 范数 γ	$\ A^{-1}\ \cdot \gamma$
0.1	12.51	3.127
1	1.251	0.303
2	0.626	0.140
3	0.417	0.083
5	0.251	0.039
10	0.123	0.011
20	0.057	0.003

4 结 论

针对时域二阶系统的 H_∞ 性能问题,采用系统变换的方法,探究了系统复特征根对于 H_∞ 性能的作用,特别是研究了系统的虚部对于系统 H_∞ 性能的作用.由此得出,在系统的 H_∞ 动态性能中,系统的实部起着重要的作用,系统的虚部不能超越实部的幅值,进而保证系统的稳定特性和收敛特性,这是系统对于外界干扰具有抑制作用

的根本.虚部可以起到系统调节性能,比如增加快速性等暂态性能,是对系统品质的一种补充.与经典频域二阶系统理论进行了比较研究,发现了阻尼比与 H_∞ 性能之间的某些关系,并对于经典控制理论中阻尼比的参数选取范围进行了讨论,从时域的 H_∞ 性能角度给出了一些启示,进而对经典教材中的阻尼比在 0.4 ~ 0.8 之间的取值给出了解释.此外,对于二阶系统的基于极点配置的控制设计,可以采用时域的 H_∞ 性能分析方法来确定期望闭环极点,并形成时频交互综合分析实现控制器综合设计及性能验证.

参考文献:

[1] Zames G. Feedback and optimal sensitivity: model reference transformations, multiplicative seminorms, and approximate inverses[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1981, 26(2):301-320.

[2] Francis B, Zames G. On H_∞ -optimal sensitivity theory for SISO feedback systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1984, 29(1):9-16.

[3] Doyle J C, Glover K. State-space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1989, 34(8):831-847.

[4] Gahinet P. Explicit controller formulas for LMI-based H_∞ synthesis [J]. *Automatica*, 1996, 32(7):1007-1014.

[5] 解学书,钟宜生. H_∞ 控制理论[M]. 北京:清华大学出版社,1994.
(Xie Xue-shu, Zhong Yi-sheng. H_∞ control theory [M]. Beijing:Tsinghua University Press,1994.)

[6] 黄琳. 稳定性与鲁棒性理论基础[M]. 北京:科学出版社,2003.
(Huang Lin. Fundamentals of stability and robustness theory [M]. Beijing:Science Press,2003.)

[7] Yang R N, Wang Y Z. Finite-time stability analysis and H_∞ control for a class of nonlinear time-delay Hamiltonian systems[J]. *Automatica*, 2013, 49(2):390-401.

[8] Ma Y C, Lim C C, Li S N, et al. H-infinity control in coherent wind measurement lidar signal processing [J]. *Circuits Systems and Signal Processing*, 2018, 37(7):2824-2836.

[9] 邢双云,张庆灵,朱宝彦. 随机奇异 T-S 模糊系统的限时时间鲁棒 H_∞ 控制[J]. 东北大学学报(自然科学版), 2014, 35(11):1521-1524.
(Xing Shuang-yun, Zhang Qing-ling, Zhu Bao-yan. Robust finite-time H_∞ control for stochastic singular T-S fuzzy systems [J]. *Journal of Northeastern University (Natural Science)*, 2014, 35(11):1521-1524.)

[10] Chilali M, Gahinet P. H-infinity with pole placement constraints: an LMI approach [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1996, 41(3):358-367.

[11] Sarjas A, Svecko R, Chowdhury A. An H_∞ modified robust disturbance observer design for mechanical positioning systems [J]. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 2015, 13(3):575-586.

[12] Iwasaki T, Skelton R E. All controllers for the general H_∞ control problem: LMI existence conditions and state space formulas[J]. *Automatica*, 1994, 30(8):1307-1317.