

# 区间多目标粒子群优化算法及其应用

关守平, 邹立夫, 张菁菁

(东北大学 信息科学与工程学院, 辽宁 沈阳 110819)

**摘 要:** 提出了一种区间多目标粒子群优化(IMOPSO)算法,用于解决多目标下区间变量的优化问题。基于区间可信度定义两个区间解的占优关系,通过归一化方法和区间拥挤度距离对 Pareto 最优解排序,并设立归档机制,利用外部存储器保存 Pareto 最优解集。针对有界误差系统的建模问题,提出了基于 IMOPSO 算法训练区间神经网络(INN)模型参数的建模方法,解决了误差界已知和误差界未知两种情况下的有界误差系统建模问题。最后,以一阶不确定系统为例,利用所提算法进行了建模仿真,验证了建模方法的有效性。

**关 键 词:** 区间多目标优化;区间粒子群优化;区间神经网络;未知但有界(UBB);一阶不确定系统

中图分类号: TP 273

文献标志码: A

文章编号: 1005-3026(2019)11-1521-06

## Interval Multi-objective Particle Swarm Optimization Algorithm and Its Application

GUAN Shou-ping, ZOU Li-fu, ZHANG Jing-jing

(School of Information Science & Engineering, Northeastern University, Shenyang 110819, China. Corresponding author: GUAN Shou-ping, E-mail: guanshouping@ise.neu.edu.cn)

**Abstract:** An interval multi-objective particle swarm optimization (IMOPSO) algorithm was proposed to solve the optimization problem of interval variables under multi-objectives. A dominant relationship between two intervals was defined based on interval credibility. Normalization method and interval crowding distance were used to sort the Pareto-optimal solutions. And an archiving mechanism was set up to save the Pareto optimal set in the external memory. Then, an interval neural network(INN) employing the IMOPSO to train was proposed for the unknown-but-bounded (UBB) errors modeling problem, which can be suited for the two situations of the error bounds that is either known or unknown. The first-order uncertain system was taken as an example to verify the proposed method, and the simulation results validated the effectiveness.

**Key words:** interval multi-objective optimization; interval particle swarm optimization; interval neural network; unknown but bounded(UBB); first-order uncertain system

在文献[1]中对区间单目标粒子群优化(interval particle swarm optimization, IPSO)算法如何优化区间神经网络(interval neural network, INN)参数的问题进行了研究,但是在对许多复杂区间控制系统的建模与优化中,IPSO 算法无法满足实际需求。近年来,多目标优化算法受到了广泛关注,其中群体智能算法最为著名。群体智能算法是通过模拟自然生物群落的智能行为而产生的算法,并在区间多目标优化问题中得到了一定程度的应用<sup>[2-3]</sup>。目前对于区间多目标优化的研究主

要是针对目标函数中包含区间参数的多目标问题,而本文针对以决策变量为区间数的多目标优化问题,提出了一种区间多目标粒子群优化算法(interval multi-objective particle swarm optimization, IMOPSO)。其中关键问题是如何定义基于区间的 Pareto 占优关系比较不同进化个体的性能。为此,本文给出了区间可信度、区间拥挤度距离等相关定义,利用外部存储器对 Pareto 最优解进行存储和排序。通过选取的多个测试函数,验证了本算法的有效性。

未知但有界(unknown but bounded, UBB)误差建模问题<sup>[4]</sup>一直是控制领域研究的重要方向. UBB 误差建模问题存在两种情况:第一种是误差界未知(用 UBB - U 表示),系统的实际输出为在一定范围内波动的点值,没有明确的界限;第二种是误差界已知(用 UBB - N 表示),系统的实际输出为区间值. 现有的 UBB 求解方法都是针对 UBB - N 情况,对于 UBB - U 的相关研究较少. 求解 UBB - N 问题的方法目前有凸多面体法<sup>[5]</sup>、最小二乘法<sup>[6]</sup>、区间分析集逆算法<sup>[7]</sup>(如 SIVIA)等,上述方法的一个共性问题是需要已知系统的模型结构,但在实际工程中,往往只能得到不确定系统的输入输出数据,而很难确定其结构,对于非线性系统更是如此. 针对该问题,本文提出了基于 INN 的 UBB 问题建模方法. 由于神经网络一直以来在复杂系统建模方面表现出优良的性能<sup>[8]</sup>,因此利用由区间理论与神经网络结合成的 INN<sup>[9-10]</sup>模型能有效解决不确定信息的建模问题.

现有的神经网络大都是基于梯度下降法进行学习的,这种方法常常会陷入局部最优<sup>[11]</sup>,该问题同样存在于 INN 中. 故本文针对 UBB - U 和 UBB - N 两种情况,定义了相应的多目标函数,采用 IMOPSO 算法对 INN 模型参数进行训练,从而得到不确定性系统的 INN 模型,用于预报、控制和优化等应用.

1 预备知识

1.1 区间分析

1966 年,美国数学家 Moore 第一次系统提出了区间分析理论<sup>[12]</sup>,从此开启了区间分析的研究热潮. 有区间数如  $A = [\underline{a}, \bar{a}]$ , 其中  $\underline{a}, \bar{a} \in \mathbf{R}$ , 且  $\underline{a} \leq \bar{a}$ . 当  $\underline{a} = \bar{a}$  时,  $A$  退化为点,成为退化区间,所以点可以认为是区间数的一种特例. 在本文中,小写的字母如  $a, b$  表示实数,大写的字母如  $A, B$  表示区间数,小写字母加粗如  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  表示实数向量或矩阵,加粗的大写字母如  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  代表区间向量或矩阵. 本文的区间关系按照文献<sup>[13]</sup>中的区间运算法则计算.

1.2 IPSO 算法

粒子群优化 (particle swarm optimization, PSO) 算法是 Kennedy 等<sup>[14]</sup>提出的一种智能优化算法. IPSO<sup>[1]</sup>与常规 PSO 的区别主要在优劣粒子的比较方法和迭代公式的计算方法.

1) 优劣粒子的比较. IPSO 算法在评价粒子优劣时使用的是区间适应度,此时简单地通过点

值来判断粒子优劣的方法将不再适用. 因此,给出区间可信度定义:

**定义 1** 考虑区间  $A = [\underline{a}, \bar{a}]$  和  $B = [\underline{b}, \bar{b}]$ ,  $C$  是  $A$  和  $B$  的极大区间,  $C = [\underline{c}, \bar{c}]$ , 其中  $\bar{c} = \max\{\bar{a}, \bar{b}\}$ ,  $\underline{c} = \max\{\underline{a}, \underline{b}, \bar{a}, \bar{b} \setminus \bar{c}\}$  表示除去  $\bar{c}$  以外的从  $\{\underline{a}, \underline{b}, \bar{a}, \bar{b}\}$  选择最大值. 则区间  $A$  大于等于区间  $B$  的可信度  $P(A \geq B)$  为

$$P(A \geq B) = \frac{d(B, C)}{d(A, C) + d(B, C)}. \tag{1}$$

其中,  $d(A, C) = \max\{|\underline{a} - \underline{c}|, |\bar{a} - \bar{c}|\}$ , 代表区间  $A$  和区间  $C$  的距离.

2) 迭代公式. 严格采用区间减法更新粒子位置信息时,会破坏粒子的跟踪性,文献<sup>[15]</sup>提出了一种趋势减法,保证了粒子的趋向性,其定义为

**定义 2** 对于区间  $A = [\underline{a}, \bar{a}]$ ,  $B = [\underline{b}, \bar{b}]$ , 有

$$A - - B = [\underline{a} - \underline{b}, \bar{a} - \bar{b}]. \tag{2}$$

则称上述运算为趋势减法,用符号“ $- -$ ”表示.

综上,区间粒子的速度及位置更新公式为

$$\mathbf{X}_{id}^{k+1} = \mathbf{X}_{id}^k + \mathbf{V}_{id}^{k+1}, \tag{3}$$

$$\mathbf{V}_{id}^{k+1} = w\mathbf{V}_{id}^k + c_1\xi(\mathbf{P}_{id}^k - - \mathbf{X}_{id}^k) + c_2\eta(\mathbf{P}_{gd}^k - - \mathbf{X}_{id}^k). \tag{4}$$

式中:  $\mathbf{X}_{id}^{k+1}$  表示粒子群在第  $k$  次迭代过程中第  $i$  个粒子的位置,  $k = 1, 2, \dots, G$ ,  $G$  为最大迭代次数,  $i = 2, 3, \dots, m$ ,  $m$  为种群规模;  $\mathbf{V}_{id}^{k+1}$  为粒子群在第  $k$  次迭代过程中第  $i$  个粒子的速度;  $\mathbf{P}_{id}^k$  表示在第  $k$  次迭代过程中第  $i$  个粒子的历史最优位置;  $\mathbf{P}_{gd}^k$  表示当前种群在第  $k$  次迭代中的全局最优位置. 粒子群算法的惯性系数为  $w$ , 学习因子  $c_1, c_2$ ,  $\xi$  和  $\eta$  为  $[0, 1]$  范围内的均匀随机数.

2 区间多目标粒子群优化算法

区间多目标优化问题的数学模型为

$$\min F(\mathbf{X}, \mathbf{C}) = (F_1(\mathbf{X}, \mathbf{C}), F_2(\mathbf{X}, \mathbf{C}), \dots, F_q(\mathbf{X}, \mathbf{C}))^T, \tag{5}$$

s. t.  $\mathbf{X} \in S \subset IR^n$ .

其中:  $F_i(\mathbf{X}, \mathbf{C})$  ( $i = 1, 2, \dots, q$ ) 为第  $i$  个目标函数,该函数值也是一个区间数,  $F_i = [\underline{f}_i, \bar{f}_i]$ ;  $\mathbf{X}$  为决策变量,  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T$ ,  $X_j = [\underline{x}_j, \bar{x}_j]$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ ,  $n$  表示决策变量维度;  $\mathbf{C}$  为参数向量,  $\mathbf{C} = (C_1, C_2, \dots, C_l)^T$ ,  $C_k = [\underline{c}_k, \bar{c}_k]$ ,  $k = 1, 2, \dots, l$ ;  $S$  为决策变量可行域;当区间向量  $\mathbf{X}$  和参数  $\mathbf{C}$  都退化为点值时,则式(5)就退化为点值多目标数学模型.

2.1 IMOPSO 算法基础

1) 区间拥挤度距离. 若存在进化个体  $X_1$  和  $X_2$ , 它们第  $i$  个目标函数值分别为  $F_i(X_1)$  和

$$F_i(X_2), i=1,2,\cdots,m, \text{则进化个体 } X_1 \text{ 和 } X_2 \text{ 距离为}$$

$$D(X_1,X_2)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^m|F_i(X_2)-F_i(X_1)|. \quad (6)$$

假设与  $X_1$  距离最近的两个进化个体分别为  $X_2, X_3$ , 则  $X_1$  的拥挤距离为

$$C(X_1)=\frac{1}{2}[D(X_1,X_2)+D(X_1,X_3)]. \quad (7)$$

2) Pareto 最优解的选择. 在得到区间可信度定义的基础上, Pareto 最优解集的选择方法为: 在初始化各个区间粒子  $X_i(i=1,2,\cdots,N)$  之后, 默认其为当前粒子的个体历史最优位置, 计算其区间目标函数值  $F_m(X_i), m=1,2,\cdots,M$ , 其中  $M$  为目标函数个数. 如果  $\exists i$ , 对于  $\forall j, j=1,2,\cdots,N$ , 且  $j \neq i, X_i > X_j$  总成立, 则将其保留至外部存储器 FLJ 中,  $FLJ = \{FLJ, \{F_1(X_i), F_2(X_i), \cdots, F_M(X_i), X_i\}\}$ .

3) Pareto 最优解的排序. 由于不同的目标函数值的量化范围不同, 因此本算法先将各个目标函数值进行归一化处理后再排序, 具体步骤如下:

步骤 1 将  $F_i(X_j) = [\underline{f}_i(X_j), \bar{f}_i(X_j)]$  归一化之后, 可得  $q_i(j) = \underline{f}_i(X_j) / \sum_{i=1}^M \underline{f}_i(X_j)$ ;

步骤 2 将  $X_j$  在各个目标函数进行归一化后的值  $q_i(j)$  相加, 即  $r(j) = \sum_{i=1}^M q_i(j)$ ;

步骤 3 将各粒子对应的  $r$  进行排序  $\text{sort}(r)$ ;

步骤 4 计算粒子的拥挤度距离  $C(X_i)$ , 其中  $i=2,3,\cdots,s-1$ , 并设置  $X_1$  和  $X_s$  的拥挤度距离为  $C(X_1) = C(X_s) = \max(C(X_2), C(X_3), \cdots, C(X_{s-1})) + 1$ ;

步骤 5 将所有 Pareto 最优解基于拥挤度距离进行降序排列存入到外部存储器中.

## 2.2 IMOPSO 算法

IMOPSO 算法的详细步骤如下:

步骤 1 初始化区间粒子群算法的相关参数, 包括学习因子  $C_1$  和  $C_2$ 、惯性系数  $W$ 、种群规模  $m$ 、最大迭代次数  $G$ 、搜索范围  $R_d$ 、区间粒子宽度  $b_d$ 、外部存储器 Pareto 最优解最大个数  $N$ ;

步骤 2 初始化粒子群中粒子在各个维度上的位置和速度, 并设其为个体历史最优位置;

步骤 3 计算区间粒子在各个目标函数上的值  $F_m(X_i)$ , 基于区间可信度选择 Pareto 最优解并存入外部存储器中;

步骤 4 归一化外部存储器中的各个 Pareto 最优解的所有目标函数值  $q_i(j) = \underline{f}_i(X_j) / \sum_{i=1}^M \underline{f}_i(X_j)$ , 并求和  $r(j) = \sum_{i=1}^M q_i(j)$ , 按照降序排

列 Pareto 最优解;

步骤 5 计算外部存储器中各个 Pareto 最优解的拥挤度距离并降序排序, 基于轮盘赌选择法从 Pareto 最优解集中选择全局最优位置  $P_{gd}$ ;

步骤 6 根据式(3)、式(4)更新区间粒子的速度  $V_{id}^{k+1}$  和位置  $X_{id}^{k+1}$ ;

步骤 7 基于占优关系选择个体历史最优位置  $P_{id}$ ;

步骤 8 基于区间关系更新外部存储器;

步骤 9 判断 Pareto 最优解个数是否大于  $N$ , 若大于则继续下一步; 若不大于则转至步骤 11;

步骤 10 基于区间拥挤度选取前  $N$  个 Pareto 最优解;

步骤 11 判断当前迭代次数  $k > K$ , 若满足则继续下一步, 若不满足则转至步骤 5;

步骤 12 输出 Pareto 最优解集.

## 2.3 算法仿真算例

本文选择两个多目标测试函数进行测试, 测试函数表达式如下:

函数 1 Binh and Korn 函数:

$$\text{Minimize} = \begin{cases} F_1(X) = 4X_1^2 + 4X_2^2, \\ F_2(X) = (X_1 - 5)^2 + (X_2 - 5)^2. \end{cases} \quad (8)$$

算法中  $R_d = [0, 3] \times [0, 5], b_d = 0.3$ .

函数 2 Quaglia - rella 函数:

$$\text{Minimize} = \begin{cases} F_1(X) = \sqrt{\frac{A_1}{n}}, \\ F_2(X) = \sqrt{\frac{A_2}{n}}. \end{cases} \quad (9)$$

其中:  $A_1 = \sum_{i=1}^n [(X_i)^2 - 10\cos[2\pi(X_i)] + 10]$ ;

$A_2 = \sum_{i=1}^n [(X_i - 1.5)^2 - 10\cos[2\pi(X_i - 1.5)] + 10]$ ; 算法中  $R_d = [-5.12, 5.12]^n, b_d = 0.03$ .

图 1 和图 2 为仿真结果, 表示所得的 Pareto 最优前沿, 其中每个矩形区域对应问题的一个解. 从图中可以看出, 得到的矩形区域与真实的 Pareto 前沿的轨迹基本一致, 证明了 IMOPSO 算法的有效性.

## 3 有界误差建模

UBB 条件下的区间系统建模<sup>[4]</sup>一般称之为有界误差建模问题, 可以描述为非线性模型  $y = f(x, p) + e$ , 其中  $p$  为待辨识模型参数向量. 已知输入输出的实际观测数据对  $(x_i, y_i)$  和误差  $e_i$ , 其

中  $e_i \in E = [\underline{e}_i, \bar{e}_i]$ . 当误差界已知时, 可以写成区间模型为  $\hat{Y} = [y - \bar{e}, y - \underline{e}] = F(\mathbf{x}, \mathbf{P})$ , 其中  $\mathbf{P}$  为不确定参数集,  $\mathbf{p} \in \mathbf{P}$ ,  $F(\cdot)$  为  $f(\cdot)$  的区间扩张函数. 于是可以用 INN 模型逼近区间函数  $F(\cdot)$ , 即  $\hat{Y} = F(\mathbf{x}, \mathbf{P}) = \text{INN}(\mathbf{x}, \mathbf{W}, \boldsymbol{\Theta})$ , 其中  $\mathbf{W}$  和  $\boldsymbol{\Theta}$  为网络参数. 根据区间和点值的关系, 误差界未知的情况可以看作误差界已知情况的特例处理.

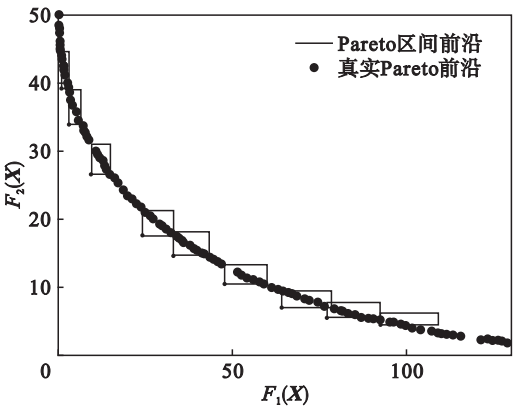


图 1 函数 1 仿真结果

Fig. 1 Function 1 simulation results

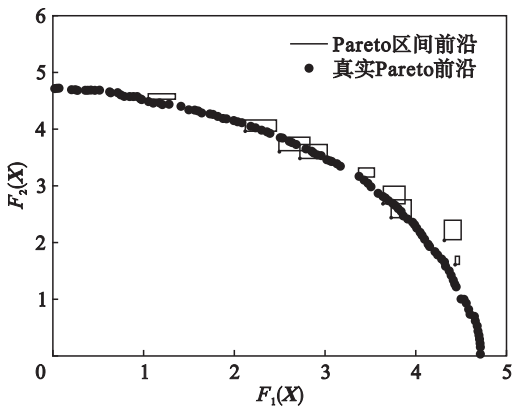


图 2 函数 2 仿真结果

Fig. 2 Function 2 simulation results

### 3.1 区间神经网络

将区间分析与神经网络相结合构成的 INN 拥有和传统神经网络一样的结构, 目前常见的 INN 为前馈区间神经网络 (feed for ward interval neural network, FINN)<sup>[1,9-10]</sup>. 本文采用与文献 [1] 相同的 FINN 进行建模, 其三层  $i-j-k$  结构如图 3 所示.

图 3 中,  $x_i$  表示网络的输入 (点值),  $W_{ij}$  和  $W_{jk}$  分别表示隐含层和输出层的权值 (区间),  $B_j$  和  $B_k$  分别表示隐含层和输出层的阈值 (区间), 由此可以得到点值输入/区间值输出的函数关系.

输入层:

$$o_i = x_i. \quad (10)$$

隐含层:

$$\text{Net}_j = \sum (W_{ij} o_i + B_j), \quad (11)$$

$$O_j = f(\text{Net}_j). \quad (12)$$

输出层:

$$\text{Net}_k = \sum (W_{jk} o_j + B_k), \quad (13)$$

$$O_k = f(\text{Net}_k). \quad (14)$$

式中:  $o_i$  表示输入层的输出值;  $\text{Net}_j$  表示隐含层的节点关系;  $O_j$  表示隐含层的输出值;  $\text{Net}_k$  表示输出层的节点关系;  $O_k$  表示输出层的输出值;  $f(x)$  为激励函数, 一般选取 sigmoid 函数.

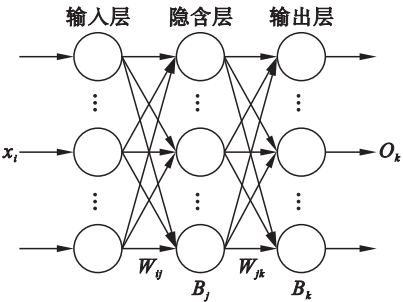


图 3 三层 FINN 结构图

Fig. 3 Structure of a three-layer FINN

### 3.2 目标函数的选择

首先选取两个指标  $\sigma_1$  和  $\sigma_2$  作为建模准确度的评价指标, 定义如下:

在 UBB - U 条件下,

$$\sigma_1 = \frac{1}{n_p} \sum_{i=1}^{n_p} b_i. \quad (15)$$

其中:  $n_p$  为训练样本的总数量;  $b_i = \begin{cases} 1, & y_i \in \hat{Y}_i; \\ 0, & y_i \notin \hat{Y}_i. \end{cases}$

$y_i$  为目标输出点值;  $\hat{Y}_i = [\hat{y}_i, \bar{\hat{y}}_i]$  为 INN 预测输出区间值.

$$\sigma_2 = \frac{1}{n_p} \frac{\sum_{i=1}^{n_p} (\bar{\hat{y}}_i - \hat{y}_i)}{y_{\max} - y_{\min}}. \quad (16)$$

其中:  $y_{\max} = \max(y_1, y_2, \dots, y_{n_p})$ ;  $y_{\min} = \min(y_1, y_2, \dots, y_{n_p})$ .

在 UBB - N 条件下,

$$\sigma_1 = \frac{1}{n_p} \sum_{i=1}^{n_p} a_i. \quad (17)$$

其中:

$$a_i = \begin{cases} 1, & Y_i \subseteq \hat{Y}_i; \\ \frac{\text{diam}(Y_i \cap \hat{Y}_i)}{\text{diam}(Y_i)}, & (Y_i \not\subseteq \hat{Y}_i) \wedge (Y_i \cap \hat{Y}_i \neq \emptyset); \\ 0, & Y_i \cap \hat{Y}_i = \emptyset. \end{cases}$$

$Y_i = [\underline{y}_i, \bar{y}_i]$  为目标输出区间值.

$$\sigma_2 = \frac{1}{n_p} \frac{\sum_{i=1}^{n_p} (\bar{\hat{y}}_i - \hat{y}_i)}{y_{\max} - y_{\min}}. \quad (18)$$



其中： $\bar{y}_{\max} = \max(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \cdots, \bar{y}_{n_p})$ ； $\underline{y}_{\min} = \min(\underline{y}_1, \underline{y}_2, \cdots, \underline{y}_{n_p})$ 。

分析式(15)~式(18)易知,  $\sigma_1$  值越大且  $\sigma_2$  值越小, 建模准确度越高。

基于  $\sigma_1$  和  $\sigma_2$ , 选择两个优化目标函数如下:

目标函数 1:

$$f_1 = \min(1 - \sigma_1) . \tag{19}$$

目标函数 2:

$$f_2 = \min(\sigma_2) . \tag{20}$$

3.3 一阶不确定系统建模

一阶离散不确定系统的数学模型可以表示为

$$y(k) = ay(k-1) + bu(k) + v(k) . \tag{21}$$

其中,  $y(k)$  和  $u(k)$  是在  $k$  时刻可以得到的系统输出和输入数据. 设输入  $u(k)$  为单位阶跃信号,  $v(k)$  为不确定但有界噪声序列,  $v(k) \in V = [-0.2, 0.2]$ ,  $a = 0.5, b = 0.5, y(0) = 0, u(0) = 0$ .

在 UBB-U 情况下, 系统输出为随机波动的点值, 则其噪声为随机点值序列  $\text{rand}(V)$ ; 在 UBB-N 情况下, 系统的输出为区间值, 则其噪声为随机区间序列  $\text{RND}(V)$ , 因输入须是点值, 则对  $Y(k-1)$  取中点得  $\text{Mid}(Y(k-1))$ , 因此式(21)可以分别表示为

$$y(k) = ay(k-1) + bu(k) + \text{rand}(V) , \tag{22}$$

$$Y(k) = a\text{Mid}(Y(k-1)) + bu(k) + \text{RND}(V) . \tag{23}$$

其中:  $\text{rand}(\cdot)$  为点值随机函数;  $\text{RND}(\cdot)$  为区间值随机函数;  $\text{Mid}(\cdot) = \frac{1}{2}(\bar{y} + \underline{y})$ .

对该系统进行多目标下的 INN 建模, INN 的拓扑结构为 2-5-1, 选取 1 000 组系统阶跃响应时间序列作为训练数据. IMOPSO 算法中, 选取参数为  $c_1 = c_2 = 1.25$ ,  $\omega = 0.5$ ,  $m = 60$ ,  $G = 500$ ,  $N = 10$ ,  $R_d = [-10, 10]$ ,  $b_d = 0.1$ .

在 UBB-U 和 UBB-N 情况下, 利用 IMOPSO 算法对该区间神经网络训练得到的 Pareto 前沿如图 4、图 5 所示.

由 3.2 节可知,  $\sigma_1$  值越大且  $\sigma_2$  值越小, 建模准确度越高, 取  $\sigma = \sigma_1 + (1 - \sigma_2)$ , 将每个 Pareto 最优解在各个评价指标下的数值按照  $\sigma$  降序排列, 并记录于表 1 中.

据此选取最优解(序列号为 1 的评价指标对应的解)作为 INN 的权值和阈值, 选取 100 组输入输出测试数据对该一阶不确定系统模型进行测试, 输出测试数据作为目标输出区间, INN 的输出数据为预测输出区间, 仿真结果如图 6、图 7 所示. 从图中可以看出, 对于选取的 100 个测试数

据, 其中 98% 以上都在预测输出区间内, 因此该仿真结果证明了本文所提建模方法的有效性.

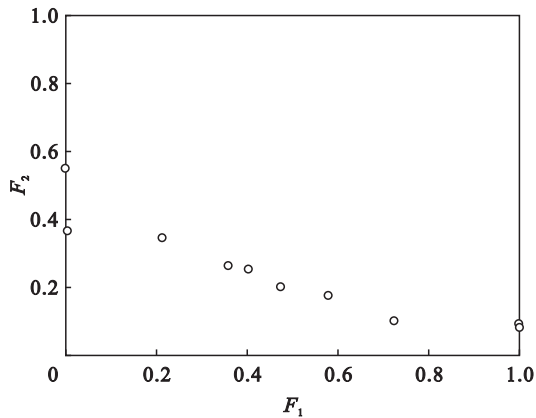


图 4 Pareto 前沿 (UBB-U)  
Fig. 4 Pareto front (UBB-U)

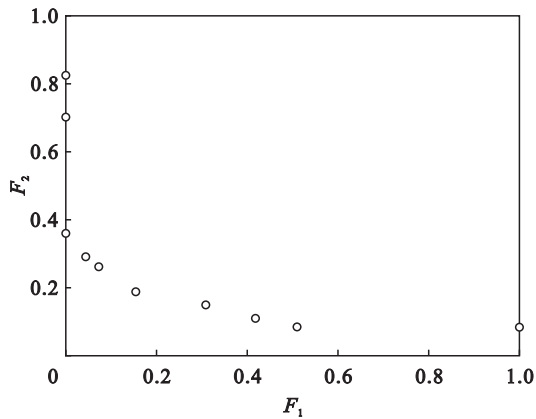


图 5 Pareto 前沿 (UBB-N)  
Fig. 5 Pareto front (UBB-N)

表 1 评价指标数值表  
Table 1 Evaluating indicators

序号	UBB-U		UBB-N	
	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\sigma_1$	$\sigma_2$
1	0.980 0	0.388 5	0.988 1	0.358 1
2	0.980 0	0.589 3	0.989 4	0.698 4
3	0.820 0	0.367 1	0.990 0	0.824 6
4	0.630 0	0.220 9	0.895 0	0.288 1
5	0.670 0	0.267 5	0.916 1	0.261 4
6	0.330 0	0.104 5	0.829 6	0.196 0
7	0.570 0	0.280 4	0.660 3	0.150 1
8	0.310 0	0.187 8	0.564 5	0.109 6
9	0	0.090 0	0.467 7	0.083 5
10	0.010 0	0.096 6	0	0.083 4

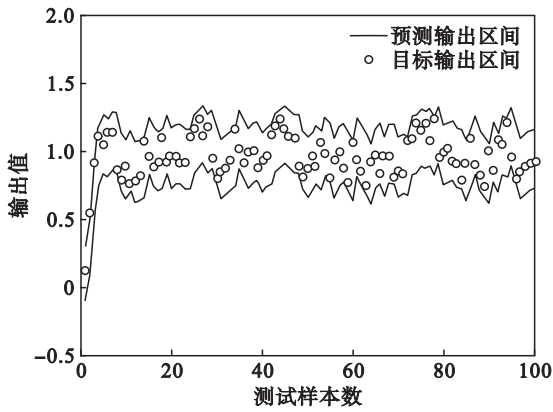


图 6 目标输出点值与预测输出区间值对比图 (UBB-U)  
Fig. 6 Comparison between target point and prediction interval for UBB-U

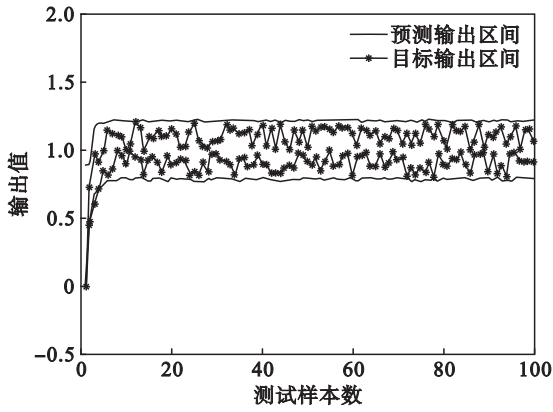


图 7 目标输出区间值与预测输出区间值对比图 (UBB-N)  
Fig. 7 Comparison between target interval and prediction interval for UBB-N

4 结 语

本文提出了一种区间多目标粒子群优化算法,给出了基于区间的 Pareto 占优关系,选择了两种测试函数证明了 IMOPSO 算法的可行性. 在 UBB-U 和 UBB-N 情况下,基于 INN 对一阶不确定线性系统进行建模,并采用所提的 IMOPSO 算法训练 INN,证明了本文所提建模方法的有效性. 本文将区间分析理论、智能算法中的进化思想以及神经网络相结合,为有界误差建模提供了一条有效的途径.

参考文献:

[ 1 ] Guan S P,Zhang J J,Zou L F. An interval particle swarm optimization algorithm for evolving interval neural networks [ C ]// 2018 Chinese Control and Decision Conference (CCDC). Shenyang,2018;1615 – 1619.

[ 2 ] Zhang J,Wang S,Zhang K. Cooperative artificial bee colony algorithm with multiple populations for interval multi-objective optimization problems [ J ]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*,2019,27(5):1052 – 1065.

[ 3 ] Hsu C,Chang S,Yu C. Tolerance design of robust controllers for uncertain interval systems based on evolutionary algorithms [ J ]. *IET Control Theory & Applications*,2007,1(1):244 – 252.

[ 4 ] 杨卫封,曾芳玲. 区间分析在非线性系统模型参数估计中的应用 [ J ]. *仪器仪表学报*,2008,29(4):244 – 252.  
(Yang Wei-feng,Zeng Fang-ling. Application of interval analysis for parameter estimational nonlinear system model [ J ]. *Chinese Journal of Scientific Instrument*,2008,29(4):244 – 252. )

[ 5 ] Liu Y,Zhao Y,Wu F. Ellipsoidal state-bounding-based set-membership estimation for linear system with unknown-but-bounded disturbances [ J ]. *IET Control Theory & Applications*,2016,10(4):431 – 442.

[ 6 ] Bontayeb M. Identification of nonlinear systems in the presence of unknown but bounded disturbances [ J ]. *IEEE Transactions on Automatic Control*,2000,45(8):1503 – 1507.

[ 7 ] Jaulin L,Walter E. Guaranteed nonlinear parameter estimation via interval computations [ J ]. *Interval Computation*,1993,35(2):61 – 75.

[ 8 ] Khosravi A,Nahavandi S,Creighton D,et al. Comprehensive review of neural network-based prediction intervals and new advances [ J ]. *IEEE Transactions on Neural Networks*,2011,22(9):1341 – 1356.

[ 9 ] Song M,Pedrycz W. Granular neural networks: concepts and development schemes [ J ]. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning System*,2013,24(4):542 – 553.

[ 10 ] Guan S P,Liang R Y. Study of full interval feed-forward neural network [ C ]// 2016 Chinese Control and Decision Conference( CCDC). Yinchuan,2016;2652 – 2655.

[ 11 ] De Weerd E,Chu Q P,Mulder J A. Neural network output optimization using interval analysis [ J ]. *IEEE Transactions on Neural Networks*,2009,20(4):638 – 653.

[ 12 ] Moore R E. Interval analysis [ M ]. Englewood: Prentice-Hall,1966.

[ 13 ] Moore R E,Kearfott R B,Cloud M J. Introduction to interval analysis [ M ]. Philadelphia: SIAM Press,2009.

[ 14 ] Kennedy J,Eberhart R C. Particle swarm optimization [ C ]// Proceeding of IEEE International Conference on Neural Networks. Perth: IEEE Press,1995;1942 – 1948.

[ 15 ] 关守平,房少纯. 一种新型的区间-粒子群优化算法 [ J ]. *东北大学学报(自然科学版)*,2012,33(10):1381 – 1384.  
(Guan Shou-ping,Fang Shao-chun. A new interval particle swarm optimization algorithm [ J ]. *Journal of Northeastern University(Natural Science)*,2012,33(10):1381 – 1384. )