

薄壁圆锥壳畸变相似模型设计及几何区间确定方法

罗忠^{1,2}, 张永强¹, 朱云鹏³, 李朝帅²
(1. 东北大学 机械工程与自动化学院, 辽宁 沈阳 110819; 2. 东北大学 航空动力装备振动及控制教育部重点实验室, 辽宁 沈阳 110819; 3. 英国谢菲尔德大学 自动控制与系统工程学院, 谢菲尔德 S13JD 英国)

摘 要: 针对传统的相似模型设计方法、量纲分析法以及方程分析法在一些情况下使用的局限性, 基于最小二乘法, 通过过渡模型固有频率建立了薄壁圆锥壳的畸变相似关系式, 并提出一种畸变模型适用区间确定的方法, 基于模型与原型在固有特性相似(固有频率成比例映射关系, 并且振型保持一致)时畸变模型尺寸适用区间的确定方法, 利用多项式拟合, 得到单一材料薄壁圆锥壳在不同阶次相似畸变模型几何结构适用区间的边界方程。最后通过试验验证, 证明了推导畸变相似关系式的准确性, 为薄壁圆锥壳结构试验模型动力学相似提供了理论依据。

关 键 词: 圆锥壳; 畸变模型; 动力学相似; 适用区间; 固有特性

中图分类号: V 214.3⁺3 **文献标志码:** A **文章编号:** 1005-3026(2019)11-1600-06

Design of Distortion Similar Model for Thin-Walled Conical Shell and Method for Determining Geometric Interval

LUO Zhong^{1,2}, ZHANG Yong-qiang¹, ZHU Yun-peng³, LI Chao-shuai²
(1. School of Mechanical Engineering & Automation, Northeastern University, Shenyang 110819, China; 2. Key Laboratory of Vibration and Control of Aero-Propulsion System, Ministry of Education, Northeastern University, Shenyang 110819 China; 3. Department of Automatic Control and Systems Engineering, University of Sheffield, Sheffield S13JD, UK. Corresponding author: LUO Zhong, E-mail: zhluo@mail.neu.edu.cn)

Abstract: The distortion similarity relation of thin-walled conical shells was established by using the natural frequency of transition model based on least square method, aiming at the limitation of traditional similarity model design method, dimension analysis method and equation analysis method in some cases, a method for determining the applicable interval of distortion model was also proposed. The boundary equation of the applicable interval of geometric structure of a single material thin-walled conical shell with similar distortion model of different orders was obtained by polynomial fitting method, based on the method for determining the applicable interval of distortion model size when the model and prototype are similar in natural characteristics (natural frequencies are proportional mapping relationship, and mode shapes are consistent). The accuracy of derivation of distortion similarity relation is proved by experiment verification, which provides theoretical basis for dynamic similarity of thin-walled conical shell structure test model.

Key words: conical shell; distortion model; dynamic similitude; applicable interval; natural frequency

薄壁圆锥壳为厚度远小于中曲面尺度的旋转壳体。若母线与轴线相交则形成完全锥壳;若母线与轴线不相交则形成截头锥壳。薄壁圆锥壳结构被广泛用于航天、宇航、船舶和化工机械等诸多领域。在工程实际中,这些结构通常具有结构复杂、体积大以及制作成本高等特点,所以直接对原型本体进行试验,就会受到试验条件和制造成本诸多条件的限制,这就需要进行模型试验。由于在设

计相似模型时,受原型本体的结构尺寸以及材料参数等诸多因素的限制,很少会采用完全几何相似模型进行试验.如:航空发动机的外壳厚度非常小,进行完全几何相似模型设计时,其厚度过小,加工困难,因此畸变模型的应用得到广泛关注.畸变模型就是原型的各个几何尺寸不是等比例缩放的模型,但不是任意的畸变模型都可以预测原型的振动特性,尤其是对于固有特性分析试验,原型与模型的固有频率成比例映射关系,同阶同振型保持一致是基本要求,因此确定畸变模型的几何尺寸适用区间十分重要.

关于圆锥壳类结构振动试验模型研究,学者们也做了许多工作.曹志远^[1]系统介绍了壳体动力学基本理论和研究方法;Liew 等^[2]采用基于无网格 $kp-Ritz$ 的方法,分析了薄壁圆锥壳在不同的边界条件下的自由振动;Damatty 等^[3]利用有限元数值模型和试验结果对比的方法对圆锥-圆柱组合壳的动力学特性进行了研究;Tripathi 等^[4]研究了材料参数随机性对圆锥壳线性自由振动响应的敏感性的影响;Tornabene 等^[5]利用广义差分正交方法研究了锥壳结构的自由振动.利用数值方法进行壳体振动特性的研究,一些学者也进行了尝试,如 Yang^[6]采用数值积分的方法研究了锥壳振动问题;Tong 等^[7]采用类似级数展开的方法,对正交各向异性的圆锥壳的自由振动问题进行了分析,并证明了级数解的收敛性;Ramesh 等^[8-9]还对多层复合材料的锥壳的动力学特性进行了研究;Rosa 等^[10]分析了完整和不完整的薄壳结构的动态响应;Luo 等^[11]针对旋转薄壁短圆柱壳结构的相似试验模型设计问题,提出一种不完全几何相似(畸变)模型的几何尺寸区间确定方法.

关于薄圆锥壳相似设计方面的研究文献尚不多见,畸变模型的设计更是少之又少.当结构比较复杂、参数较多,以及反映物理现象的微积分方程难以建立时,难以通过方程分析法建立模型的畸变相似关系,并且量纲分析法只适用建立完全几何相似关系.因此针对传统相似模型设计方法存在的局限性,基于最小二乘法建立了薄壁圆锥壳的畸变相似关系,并给出了畸变试验模型几何区间的确定方法,为相似试验模型的设计及动力学特性的预测提供了参考.

1 最小二乘法建立相似关系的理论

本文利用最小二乘法对模型固有频率进行拟合,得到模型与原型之间的相似关系式^[12],从而

运用模型的固有频率来预测原型的固有频率.

假设原型结构用 p 表示, m 代表模型,系统的输入参数对固有频率的影响是独立的.输入量为 $X_j(j$ 表示参数),原型的固有频率为 $Y_{j,p}$,模型的固有频率为 $Y_{j,m}$.

将各个参数进行无量纲化:

$$\lambda_{x_j} = \frac{X_{j,m}}{X_{j,p}}, \tag{1}$$

$$\lambda_{y_j} = \frac{Y_{j,m}}{Y_{j,p}}. \tag{2}$$

选取多个过渡模型 m_1, m_2, \dots, m_n 进行分析,得到过渡模型的固有频率 $Y_{m_1}, Y_{m_2}, \dots, Y_{m_n}$.

原型与过渡模型的相似关系可以写为

$$\frac{Y_{j,m}}{Y_{j,p}} = \lambda_{Y_{j,m}} = \lambda_{X_{j,m}}^\alpha. \tag{3}$$

将式(3)两端取对数:

$$\ln(\lambda_{Y_{j,m}}) = \alpha \ln(\lambda_{X_{j,m}}). \tag{4}$$

令 $\ln(\lambda_{Y_{j,m}}) = A, \ln(\lambda_{X_{j,m}}) = B$, 得

$$B \cdot \alpha = A, \tag{5}$$

$$B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_n \end{bmatrix}, \alpha = \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \vdots \\ \alpha \end{bmatrix}^T, A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}. \tag{6}$$

方程(6)一般而言没有解,所以为了选择最合适的 α 让该等式尽量成立,引入残差平方和函数 S .

$$S(\alpha) = \|B\alpha - A\|^2. \tag{7}$$

当 $\alpha = \hat{\alpha}$ 时, $S(\alpha)$ 取最小值,记作

$$\hat{\alpha} = \arg \min S(\alpha). \tag{8}$$

通过对 $S(\alpha)$ 进行微分求最小值,可以得到

$$B^T X \hat{B} = B^T A. \tag{9}$$

如果矩阵 $B^T B$ 非奇异,则 α 有唯一解:

$$\hat{\alpha} = (B^T B)^{-1} B^T A. \tag{10}$$

经过以上分析,可以计算得到式(3)中的 α ,当改变不同的输入参数时,可以得到不同的幂数 α_j ,所以模型与原型的相似比为

$$\lambda = \prod_{i=1}^n \lambda_{Y_{j,m}} = \prod_{i=1}^n \lambda_{X_{j,m}}^{\alpha_j}. \tag{11}$$

所以圆锥壳的畸变相似关系式可以表达为

$$\lambda_{l_0}^{\alpha_{l_0}} = \lambda_r^{\alpha_r} \lambda_h^{\alpha_h} \lambda_l^{\alpha_l}. \tag{12}$$

对于畸变相似关系,式(11)还要满足一定的条件,当模型几何尺寸等比变化时,式(12)将等价于完全几何相似关系:

$$\lambda_{l_0}^{\alpha_{l_0}} = \lambda_{l_0}^{\alpha_r} \lambda_{l_0}^{\alpha_h} \lambda_{l_0}^{\alpha_l}. \tag{13}$$

其中,几何尺寸为等比例变化,下脚标可以用统一的下脚标代替, l_0 表示几何参数, $\lambda_{l_0}^\alpha$ 为完全几何

相似关系. 完全几何相似关系与畸变相似关系存在的联系可表达为

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{l_0}^{\alpha_{l_0}} &= \prod_{i=1}^n \lambda_{x_{j,m}}^{\alpha_j}, \\ \alpha_{l_0} &= \sum_{i=1}^n \alpha_j. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

2 畸变相似关系的建立

以薄壁圆锥壳为例,利用最小二乘法建立畸变相似关系,边界条件为大端固定小端自由,其结构示意图如图 1 所示,圆锥壳的几何参数与材料参数如表 1 所示,其中,半锥角为 30°,泊松比为 0.3.

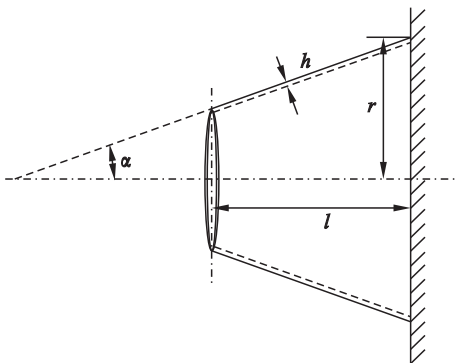


图 1 薄壁圆锥壳结构图

Fig. 1 Structural diagram of thin-walled conical shell

表 1 薄壁圆锥壳几何参数

Table 1 Geometric parameters of thin-walled conical shell

| 杨氏模量 E Pa | 密度 ρ $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ | 长度 l mm | 厚度 h mm | 半径 r mm |
|--------------------|--|--------------|--------------|--------------|
| 2×10^{11} | 7 850 | 173.2 | 2 | 200 |

利用 Ansys 对薄壁圆锥壳进行模态分析,以一阶固有频率为例,等比例缩小和放大薄壁圆锥壳各个几何尺寸的比例,得到不同比例下过渡模型的固有频率,如表 2 所示.

根据表 2 与式(10)可得

$$\alpha_{l_0} = -1. \quad (15)$$

根据式(11)与式(13)可得完全几何相似关系式:

$$\lambda_{\omega} = \lambda_{l_0}^{-1}. \quad (16)$$

通过 Ansys 对薄壁圆锥壳进行模态分析,分别改变厚度及轴向长度,得到不同比例参数下过渡模型的一阶固有频率,如表 3 和表 4 所示.

表 2 不同比例的过渡模型的固有频率
Table 2 Natural frequency of transition model with different proportions

| N | $\lambda_{x_{l_0,m}}$ | $Y_{l_0,m}/\text{Hz}$ | $\lambda_{y_{l_0,m}}$ |
|-----|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| 1 | 0.9 | 1 026.7 | 1.111 |
| 2 | 0.95 | 972.66 | 1.053 |
| 3 | 1 | 924.02 | 1 |
| 4 | 1.05 | 880.02 | 0.952 4 |
| 5 | 1.1 | 840.02 | 0.909 1 |
| 6 | 1.15 | 803.50 | 0.869 6 |

注: l_0 表示薄壁圆锥壳的几何尺寸.

表 3 不同比例厚度 h 下过渡模型的固有频率
Table 3 Natural frequency of transition model with different proportional thickness h

| N | $\lambda_{x_{h,m}}$ | $Y_{h,m}/\text{Hz}$ | $\lambda_{y_{h,m}}$ |
|-----|---------------------|---------------------|---------------------|
| 1 | 0.9 | 888.95 | 0.962 0 |
| 2 | 0.95 | 906.26 | 0.980 8 |
| 3 | 1 | 924.02 | 1 |
| 4 | 1.05 | 942.19 | 1.019 7 |
| 5 | 1.1 | 960.72 | 1.039 1 |
| 6 | 1.15 | 979.59 | 1.060 1 |

表 4 不同比例长度 l 下过渡模型的固有频率
Table 4 Natural frequency of transition model with different proportional axial length l

| N | $\lambda_{x_{l,m}}$ | $Y_{l,m}/\text{Hz}$ | $\lambda_{y_{l,m}}$ |
|-----|---------------------|---------------------|---------------------|
| 1 | 0.942 3 | 961.37 | 1.040 4 |
| 2 | 0.971 1 | 942.41 | 1.019 9 |
| 3 | 1 | 924.02 | 1 |
| 4 | 1.028 9 | 906.25 | 0.980 8 |
| 5 | 1.057 7 | 886.43 | 0.959 3 |
| 6 | 1.086 6 | 869.84 | 0.941 5 |

根据表 3 与表 4 和式(10)可得

$$\alpha_l = -0.709\ 8, \quad (17)$$

$$\alpha_h = 0.400\ 1. \quad (18)$$

根据式(14)、式(16)~式(18)可得

$$\alpha_r = -0.690\ 3. \quad (19)$$

为了计算方便,将式(17)~式(19)简化:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_l &= -0.7, \\ \alpha_h &= 0.4, \\ \alpha_r &= -0.7. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

根据式(12)、式(20)可得到畸变模型的一阶固有频率畸变相似关系式:

$$\lambda_{\omega} = \lambda_r^{-0.7} \lambda_h^{0.4} \lambda_l^{-0.7}. \quad (21)$$

3 畸变模型的几何适用区间确定

对于动力学模型,首先要保证模型与原型具有相同振型,其次要保证误差在允许范围内^[13-14].以薄壁圆锥壳为例,给出几何适用区间的确定方法.

3.1 一阶固有特性相似的几何适用区间确定方法

设任意模型薄壁圆锥壳的大端外径与轴线长度的比为

$$\Gamma_m = \frac{r_m}{l_m} = C, \Gamma \in [\Gamma_{\min}^j, \Gamma_{\max}^j]. \quad (22)$$

其中 $\Gamma = r/l$

畸变模型分别取不同的 C 值, C 应满足 $C_r^j \in [\Gamma/\Gamma_{\max}^j; \Gamma/\Gamma_{\min}^j]$, C_r^j 称为薄壁圆锥壳前 j 的振型控制区间. 以第 2 节薄壁圆锥壳为例,通过 Ansys 对原型锥壳进行模态分析得一阶固有频率为 924.02 Hz, 并得到尺寸 Γ^1 的范围, $\Gamma^1 \in [0.86, 1.33]$, 因此薄壁圆锥壳的一阶振型控制区间为 $C_r^1 \in [0.8, 1.34]$, 在振型控制区间中选取离散值 $C = [0.87, 0.97, 1.06, 1.15, 1.25, 1.34]$, 通过畸变相似关系式(21)得到对应的一阶固有频率预测值 $\omega_{1,pr}$, 采用五阶多项式进行插值运算, 如图 2 所示, 得到拟合方程式为

$$\omega_{1,pr} = 14\,392.14C^5 - 82\,247.22C^4 + 186\,902.13C^3 - 210\,625.49C^2 + 117\,555.74C + 117\,555.74. \quad (23)$$

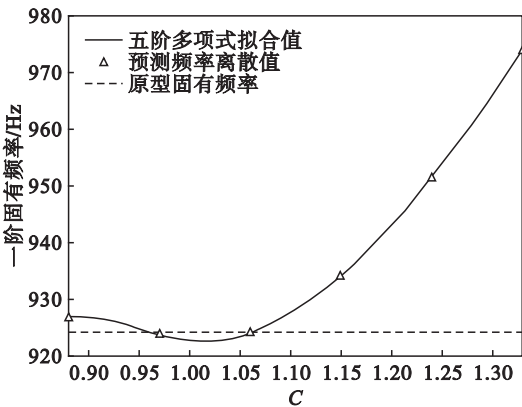


图 2 五阶多项式拟合预测曲线

Fig. 2 Fifth-order polynomial fitting prediction curve

对于畸变相似的预测误差有

$$\eta = \frac{|\omega_{pr} - \omega_p|}{\omega_p} \times 100\%. \quad (24)$$

设预测精度 $\eta \leq 1\%$, 将式(23)代入式(24)得

$$\eta = \frac{\left| \begin{matrix} 14\,392.14C^5 - 82\,247.22C^4 + \\ 186\,902.13C^3 - 210\,625.49C^2 + \\ 117\,555.74C + 117\,555.74 - \\ 924.02 \end{matrix} \right|}{924.02} = 0.01. \quad (25)$$

解得, $C_{\min} = 0.81, C_{\max} = 1.14$.

所以在 $\Gamma = 1.15, \Psi = 100 \times h/l = 1.15$ 时, 一阶固有频率的几何尺寸变化范围为 $C \in [0.81, 1.14]$. 因此薄壁圆锥壳的几何适用区间为

$$C^1 = C \cap C_r^1 \in [0.81, 1.14].$$

3.2 一阶固有特性几何区间边界的确定

当 $\Psi = 1.15$ 时, 选取 $\Gamma \in [0.86, 1.33]$ 内离散点 $\Gamma = [0.9, 0.98, 1.06, 1.14, 1.23, 1.3]$, 分别计算不同 Γ 下 C_{\min} 和 C_{\max} 的值, 见表 5 ~ 表 10.

表 5 $\Gamma = 0.9$ 离散点的区间边界值

Table 5 Interval boundary value of discrete point $\Gamma = 0.9$

| | |
|----------------------|---|
| C 的区间 | (0.678, 1.04) |
| C 的取值 | [0.68, 0.75, 0.82, 0.89, 0.96, 1.03] |
| 五阶多项式 | $-100\,652.51C^5 + 426\,731.92C^4 - 719\,139.59C^3$ |
| 拟合方程 | $+602\,903.6C^2 - 251\,663.13C + 42\,963.05$ |
| ω_p/Hz | 1 142.6 |
| $\eta < 1\%$ | 控制区间有解 $C_{\min} = 0.969\,2, C_{\max} = 1.030\,4$ |
| C | $C_{\min} = 0.969\,2, C_{\max} = 1.030\,4$ |

表 6 $\Gamma = 0.98$ 离散点的区间边界值

Table 6 Interval boundary value of discrete point $\Gamma = 0.98$

| | |
|----------------------|--|
| C 的区间 | (0.74, 1.13) |
| C 的取值 | [0.73, 0.81, 0.89, 0.97, 1.06, 1.14] |
| 五阶多项式 | $-41\,532.58C^5 + 191\,826.56C^4 - 351\,765.88C^3$ |
| 拟合方程 | $+320\,732.25C^2 - 145\,585.9C + 27\,376.22$ |
| ω_p/Hz | 1 051.3 |
| $\eta < 1\%$ | 控制区间有解 $C_{\min} = 0.939\,4, C_{\max} = 1.041\,5$ |
| C | $C_{\min} = 0.939\,4, C_{\max} = 1.041\,5$ |

表 7 $\Gamma = 1.06$ 离散点的区间边界值

Table 7 Interval boundary value of discrete point $\Gamma = 1.06$

| | |
|----------------------|--|
| C 的区间 | (0.82, 1.22) |
| C 的取值 | [0.8, 0.88, 0.96, 1.04, 1.12, 1.2] |
| 五阶多项式 | $-46\,260.32C^5 + 229\,549.97C^4 - 452\,896.49C^3$ |
| 拟合方程 | $+444\,580.59C^2 - 217\,297.3C + 43\,307.82$ |
| ω_p/Hz | 982.87 |
| $\eta < 1\%$ | 控制区间有解 $C_{\max} = 1.068\,2$ |
| C | $C_{\min} = 0.82, C_{\max} = 1.068\,2$ |

表 8 $\Gamma=1.14$ 离散点的区间边界值

| | | |
|----------------------|---|--|
| Table 8 | Interval boundary value of discrete point $\Gamma=1.14$ | |
| C 的区间 | (0.86,1.32) | |
| C 的取值 | [0.86,0.95,1.04,1.13,1.22,1.31] | |
| 五阶多项式拟合方程 | $14\,525.79C^5-81\,606.86C^4+182\,282.62C^3-201\,849.17C^2+110\,649.25C-23\,070.89$ | |
| ω_p/Hz | 891.50 | |
| $\eta<1\%$ | 控制区间有解 $C_{\max}=1.131\,8$ | |
| C | $C_{\min}=0.86,C_{\max}=1.131\,8$ | |

表 9 $\Gamma=1.23$ 离散点的区间边界值

| | | |
|----------------------|--|--|
| Table 9 | Interval boundary value of discrete point $\Gamma=1.23$ | |
| C 的区间 | (0.92,1.41) | |
| C 的取值 | [0.91,1.01,1.11,1.21,1.31,1.41] | |
| 五阶多项式拟合方程 | $-13\,222C^5+75\,932.1C^4-173\,196.15C^3+196\,458.75C^2-110\,945.81C+25\,862.59$ | |
| ω_p/Hz | 884.85 | |
| $\eta<1\%$ | 控制区间有解 $C_{\max}=1.209\,6$ | |
| C | $C_{\min}=0.92,C_{\max}=1.209\,6$ | |

表 10 $\Gamma=1.3$ 离散点的区间边界值

| | | |
|----------------------|--|--|
| Table 10 | Interval boundary value of discrete point $\Gamma=1.3$ | |
| C 的区间 | (0.98,1.49) | |
| C 的取值 | [0.98,1.08,1.18,1.28,1.38,1.48] | |
| 五阶多项式拟合方程 | $-12\,549C^5+76\,611.6C^4-185\,923.84C^3+224\,477.98C^2-134\,949.44C+33\,185.48$ | |
| ω_p/Hz | 853.53 | |
| $\eta<1\%$ | 控制区间有解 $C_{\max}=1.307\,8$ | |
| C | $C_{\min}=0.98,C_{\max}=1.307\,8$ | |

由表 5 ~ 表 10 得

$$\left. \begin{aligned} \Gamma &= [0.9,0.98,1.06,1.14,1.23,1.3], \\ C_{\min} &= [0.969\,2,0.939\,4,0.82,0.86,0.92,0.98], \\ C_{\max} &= [1.030\,4,1.041\,5,1.068\,2,1.131\,8, \\ &\quad 1.209\,6,1.307\,8]. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

将边界值采用五阶多项式进行插值拟合得到

$$\left. \begin{aligned} C_{\min} &= 1\,568.96\Gamma^5-8\,754.98\Gamma^4+19\,453.37\Gamma^3- \\ &\quad 21\,508.97\Gamma^2+11\,830\Gamma-2\,588.18, \\ C_{\max} &= 301.07\Gamma^5-1\,649.69\Gamma^4+3\,600.52\Gamma^3- \\ &\quad 3\,910.65\Gamma^2+2\,113.35\Gamma-453.55. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

式(27)的函数图像如图 3 所示.

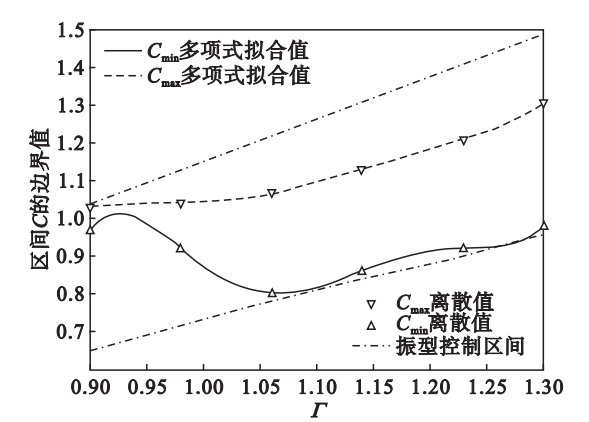


图 3 一阶几何适用区间边界
Fig. 3 First-order geometric applicable interval boundary

图 3 中,两条曲线之间的部分为 $\Phi=1.155$, 即 $\Gamma \in [0.9,1.3]$ 时,一阶固有频率对应的几何适用区间.

其他阶次的几何适用区间的计算步骤和一阶固有频率的几何适用区间的计算步骤相同.

4 试验验证

试验对象如图 4 所示,从右到左依次编号为 1,2,3,令 1 号为原型,2 号,3 号为模型,在圆锥壳表面均匀标出 80 个测点.基于多点激励单点响应测试原理得到固有频率及振型.尺寸与材料参数如表 11 所示,半锥角均为 $\alpha=30^\circ$.测试仪器有:激振力锤、轻质加速度传感器、LMS 测试系统.在两端自由边界条件下,利用锤激法进行固有特性测试,如图 4 所示,试验得到固有频率及振型如表 12 所示.

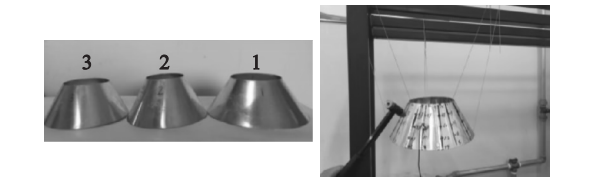
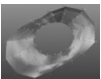
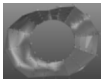
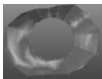
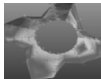

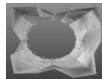
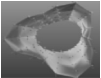
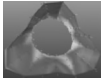
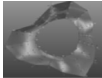
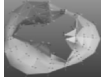
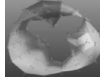
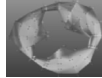


图 4 薄壁圆锥壳结构及试验操作图
Fig. 4 Conical shell structure and test operation chart

表 11 薄壁圆锥壳尺寸参数及材料参数
Table 11 Size and material parameters of thin-walled conical shells

| 试验对象 | 杨氏模量 E Pa | 密度 ρ $\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ | 长度 l mm | 厚度 h mm | 半径 r mm |
|------|-------------------|--|--------------|--------------|--------------|
| 1 号 | 7×10^{10} | 2 780 | 130 | 1.5 | 150 |
| 2 号 | 7×10^{10} | 2 780 | 117 | 1.2 | 115 |
| 3 号 | 7×10^{10} | 2 780 | 108 | 1.3 | 129 |

表 12 薄壁圆锥壳固有特型
Table 12 Natural characteristics of thin-walled conical hells

| 阶次 | 原型 1 号振型 | 模型 2 号振型 | 模型 3 号振型 | 阶次 | 原型 1 号振型 | 模型 2 号振型 | 模型 3 号振型 |
|----|--|--|--|----|--|---|--|
| 1 |  69Hz |  93Hz |  83Hz | 3 |  348Hz |  450Hz |  435Hz |
| 2 |  185Hz |  245Hz |  236Hz | 4 |  466Hz |  606Hz |  560Hz |

通过第 2 节求畸变相似关系的方法,建立圆锥壳的前四阶畸变相似关系,预测结果如表 13 所示.

表 13 固有频率预测结果
Table 13 Prediction results of natural frequencies

| 阶次 | 2 号预测值/Hz | 3 号预测值/Hz | 畸变相似关系 | 2 号预测误差/% | 3 号预测误差/% |
|----|-----------|-----------|---|-----------|-----------|
| 1 | 68. 1 | 70. 3 | $\lambda_{\omega_1} = \lambda_h^{0.999\ 1} \lambda_r^{-1.915\ 5} \lambda_l^{-0.083\ 6}$ | 1. 3 | 1. 9 |
| 2 | 190. 5 | 197. 5 | $\lambda_{\omega_2} = \lambda_h^{0.997\ 6} \lambda_r^{-1.558\ 3} \lambda_l^{-0.439\ 3}$ | 2. 9 | 6. 7 |
| 3 | 329. 4 | 368. 8 | $\lambda_{\omega_3} = \lambda_h^{0.989\ 1} \lambda_r^{-1.911\ 4} \lambda_l^{-0.077\ 7}$ | 5. 3 | 6 |
| 4 | 464. 2 | 470. 3 | $\lambda_{\omega_4} = \lambda_h^{0.991\ 3} \lambda_r^{-1.644\ 1} \lambda_l^{-0.347\ 2}$ | 0. 38 | 0. 92 |

根据表 13 知,模型固有频率预测最大误差为 6. 7%,产生较大误差原因是多方面的,包括试验件几何尺寸、焊缝、边界条件等.其他预测误差均小于 7%,并且由表 12 可知原型与模型的振型一致,表明所建立的固有频率畸变相似关系较为准确有效.

5 结 论

1) 本文利用最小二乘法,以薄壁圆锥壳为例,通过过度模型的固有频率建立了畸变相似关系式,为薄壁圆锥壳类结构的缩尺试验模型设计提供了理论依据.

2) 根据振型相同原则,提出振型控制区间 $[C_{\min}^i(\varGamma), C_{\max}^i(\varGamma)]$,在振型控制区间内,以一阶固有频率为例,利用插值法得到一阶固有频率的几何适用区间和边界值方程,为其他阶次的几何适用区间的确定提供了参考.

3) 试验结果表明建立的畸变相似关系能够准确地预测出原型固有频率以及振动模态,验证了基于最小二乘法建立的畸变相似关系的正确性.

参考文献:

[1] 曹志远. 板壳振动理论[M]. 北京:中国铁道出版社,1989. (Cao Zhi-yuan. Vibration theory of plates and shells [M]. Beijing:China Railway Publishing House,1989.)
[2] Liew K M, Ng T Y, Zhao X. Free vibration analysis of conical shells via the element-free kp-Ritz method [J]. *Journal of Sound Vibration*, 2005, 281(3) :627 – 645.
[3] Damatty A A E, Saafan M S, Sweedan A M I. Dynamic characteristics of combined conical-cylindrical shells [J].

Thin-Walled Structures, 2005, 43(9) :1380 – 1397.
[4] Tripathi V, Singh B N, Shukla K K. Free vibration of laminated composite conical shells with random material properties[J]. *Composite Structures*,2007,81(1) :96 – 104.
[5] Tornabene F, Vioda E. Vibration analysis of conical shell structures using GQD method [J]. *Far East Journal of Applied Mathematics*,2006,25(1) :23 – 39.
[6] Yong C C. On vibrations of orthotropic conical shells [J]. *Journal of Sound and Vibration*,1974,34(4) :5252 – 555.
[7] Tong L. Free vibration of orthotropic conical shells [J]. *International Journal of Engineering Science*, 1993, 31(5) : 719 – 733.
[8] Ramesh T C, Ganesan N. A finite element based on a discrete layer theory for the free vibration analysis of conical shells [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1993, 166(3) : 531 – 538.
[9] Korjakin A, Rikards R, Chate A, et al. Analysis of free damped vibrations of laminated composite conical shells[J]. *Composite Structure*,1998,41(1) :39 – 47.
[10] Rosa S D, Franco F. Analytical similitudes applied to thin cylindrical shells [J]. *Advances in Aircraft and Spacecraft Sciences*,2015,2(4) :403 – 425.
[11] Luo Z, Zhu Y P, Zhao X Y, et al. Determination method of dynamic distorted scaling laws and applicable structure size intervals of a rotating thin-wall short cylindrical shell [J]. *Journal of Mechanical Engineering Science*, 2015, 229(5) : 806 – 817.
[12] 罗忠,刘永泉,王德友,等. 旋转机械典型结构动力学相似设计理论与方法[M]. 北京:科学出版社,2015. (Luo Zhong, Liu Yong-quan, Wang De-you, et al. Theory and method of dynamic similar design for typical structures of rotating machinery [M]. Beijing:Science Press,2015.)
[13] Luo Z, Sun N, Wang Y, et al. Study of vibration characteristics of the short thin cylindrical shells and its experiment[J]. *Journal of Vibroengineering*, 2013, 15(3) :1270 – 1283.
[14] Rezaeepazhand J, Starnes J H, Simitses G J. Structural similitude and scaling laws for plates and shells; a review [C]//AIAA Structures, Structural Dynamics and Materials Conference. Tlanta,2000:393 – 403.