

# 考虑荷载作用顺序的结构可靠度分析方法

康玉梅, 刘子傲, 吴鹏飞

(东北大学 资源与土木工程学院, 辽宁 沈阳 110819)

**摘 要:** 针对 JCSS 推荐的荷载效应组合法假设荷载效应之间既相互独立又完全相关的内部矛盾和时段分析法对工程中的非平稳荷载效应过程无法实现有效分析的问题, 对考虑荷载作用顺序的结构可靠度分析方法进行了研究. 首先提出了非平稳荷载效应过程下的结构可靠度分析方法; 其次考虑荷载作用顺序的影响, 改进了结构在受多时段荷载作用下的可靠度计算模型; 最后运用跨阈理论分析了结构损伤对可靠度的影响, 推导出综合考虑非平稳荷载过程、荷载作用顺序和结构损伤的可靠度计算公式. 算例分析表明: 该方法适用性更广泛, 计算结果更真实可靠.

**关 键 词:** 结构可靠度; 时段分析法; 非平稳荷载效应; 荷载作用顺序; 荷载组合

中图分类号: TU 312<sup>+</sup>.1

文献标志码: A

文章编号: 1005-3026(2019)11-1648-06

## Structural Reliability Analysis Method Considering Load Sequence

KANG Yu-mei, LIU Zi-ao, WU Peng-fei

(School of Resources & Civil Engineering, Northeastern University, Shenyang 110819, China. Corresponding author: KANG Yu-mei, E-mail: kangyumei@mail.neu.edu.cn)

**Abstract:** In view of the contradiction which load effects are assumed to be both independent and completely related in load-effect combination method recommended by JCSS, and the ineffectiveness of time-interval analysis method for non-stationary load-effect process in engineering, structural reliability analysis method considering load sequence is performed. Firstly, the structural reliability analysis method under non-stationary load effect process is proposed. Secondly, the structural reliability calculation model under multi-period load considering load sequence is improved. Finally, the influence of structural damage on reliability is analyzed by cross-threshold theory, and the formula for calculating structural reliability considering non-stationary load process, loading sequence and structural damage is derived. The results showed that the method is more applicable and the calculation results are more realistic and reliable.

**Key words:** structural reliability; time period analysis method; non-stationary load effect; load sequence; load combination

结构的可靠性包括安全性、适用性和耐久性, 工程上以可靠度衡量结构可靠性, 即结构在规定的时间、规定的条件下完成预定功能的概率<sup>[1-3]</sup>.

荷载效应组合在结构可靠度分析和结构设计中占有重要地位<sup>[4]</sup>. 1976年由“国际结构安全度联合委员会(JCSS)”公布了“对各类结构和各种荷载的统一规则”, 即 JCSS 组合规则, 当作用于结构上的各环境荷载可视为相互独立的随机过程时, 即可用 JCSS 组合方法进行荷载效应组合, 并将计算二阶可靠指标的有效数值过程<sup>[5]</sup>确立为

可靠指标的标准算法(JCSS法). 但是, 这种方法的假设条件要求荷载效应之间相互独立且完全相关, 这一内部矛盾, 使得在计算结构可靠度时结果与真实情况并不完全相符. 时段分析法较 JCSS 法更符合结构作用的真实性<sup>[6]</sup>. 但是, 时段分析法只考虑了平稳荷载效应过程, 未考虑荷载作用时间顺序的影响. 在实际工程中, 很多荷载都具有一定的非平稳性, 而且荷载的作用顺序对结构必然存在影响.

## 1 结构失效概率的时段分析法

### 1.1 结构的失效概率

结构的功能函数  $Z^{[7]}$  可表示为

$$Z = R - S = g(X_1, X_2, \dots, X_n). \quad (1)$$

式中:  $R$  表示结构抗力;  $S$  表示荷载效应.  $Z > 0$  时, 结构可靠;  $Z < 0$  时, 结构失效;  $Z = 0$  时, 结构处于极限状态. 功能函数中的自变量为不同的随机变量, 具有一定的不确定性, 因此用概率来度量结构的可靠性是最好的方式.  $Z \geq 0$  时的概率  $p_s$  为可靠概率, 反之  $p_f$  为失效概率, 即

$$p_f = P\{Z < 0\} = 1 - p_s = 1 - P\{Z \geq 0\}. \quad (2)$$

### 1.2 JCSS 推荐的荷载效应组合方法

当结构受两个以上的荷载作用时, 各个荷载同时出现最大值的可能性较小, 因此多荷载作用时需乘以相应的系数进行折减<sup>[8]</sup>. 在 JCSS 推荐的荷载组合方法中, 荷载效应被假定为等时段的平稳二项矩形波过程, 并且荷载与荷载效应之间有明确的线性关系, 即

$$\{S_i(t), t \in \tau\} = \{S_i(\tau_{ij}), \tau_{ij} \in \tau, j = 1, 2, \dots, k_i, k_i = T/\Delta T_i\}, i = 1, 2, \dots, n. \quad (3)$$

式中:  $k_i, \Delta T_i, \tau_{ij}, S_i(\tau_{ij})$  分别为  $S_i(t)$  的时段数、时段长度、第  $j$  个时域以及在该时域的最大值.

目标使用期  $\tau$  内的最大荷载组合效应为

$$S_c(\tau) = \max \{S_1(\tau_{1i}) + S_2(\tau_{2j}) + \dots + S_n(\tau_{nk})\}, \quad \tau_{nk} \in \dots \in \tau_{2j} \in \tau_{1i}, i = 1, 2, \dots, k_1. \quad (4)$$

按照 JCSS 推荐的方法, 最大荷载效应组合为下述  $n$  种情况中的最大值.

$$\left. \begin{aligned} S_{c1}(\tau) &= S_1(T) + S_2(\Delta T_1) + \dots + S_n(\Delta T_{n-1}), \\ &\vdots \\ S_{ci}(\tau) &= S_1(\Delta T_1) + \dots + S_{i-1}(\Delta T_{i-1}) + S_i(T) + \\ &\quad S_{i+1}(\Delta T_i) + \dots + S_n(\Delta T_{n-1}), \\ &\vdots \\ S_{cn}(\tau) &= S_1(\Delta T_1) + S_2(\Delta T_2) + \dots + \\ &\quad S_{n-1}(\Delta T_{n-1}) + S_n(T). \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

式中,  $S_i(\Delta T_i), S_i(\Delta T_{i-1}), S_i(T)$  为  $S_i(t)$  在时段  $\Delta T_i, \Delta T_{i-1}, T$  内的最大值, 但式(5)中第  $i$  种组合是作了如式(3)所示的假定得到的.

$$\left. \begin{aligned} S_j(\tau_{j1}) &= S_j(\tau_{j2}) = \dots = S_j(\tau_{jk_j}) = S_j(\Delta T_j), j < i; \\ S_j(\tau_{j-1,1}) &= S_j(\tau_{j-1,2}) = \dots = S_j(\tau_{j-1,k_{j-1}}) = \\ &S_j(\Delta T_{j-1}), j > i. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

式中:  $S_j(\tau_{j-1,l})$  为  $S_i(t)$  在时段  $\tau_{j-1,l}$  内的最大值

( $l = 1, 2, \dots, k_{j-1}$ ). 按照 JCSS 法的概率模型,  $S_j(\tau_{j1}), S_j(\tau_{j2}), \dots, S_j(\tau_{jk_j})$  之间以及  $S_j(\tau_{j-1,1}), S_j(\tau_{j-1,2}), \dots, S_j(\tau_{j-1,k_{j-1}})$  之间都是相互独立的, 而 JCSS 法中式(6)又假定它们完全相关, 这会导致其计算结果与实际结果误差较大, 最大荷载效应组合的分析结果也会因荷载效应之间相关性的增强而偏小, 进行结构设计则偏于不安全.

### 1.3 时段分析法

在时段分析法中, 假定抗力为随机变量, 荷载效应为  $n$  个平稳随机过程. 这里以结构受三种荷载效应为例, 其随时间变化的样本函数如图 1 所示. 结构在每一时段内的功能函数为

$$Z(\tau_{3i}) = R - [S_1(\tau_{1k}) + S_2(\tau_{2j}) + S_3(\tau_{3i})], \quad \tau_{3i} \in \tau_{2j} \in \tau_{1k}, i = 1, 2, \dots, n. \quad (7)$$

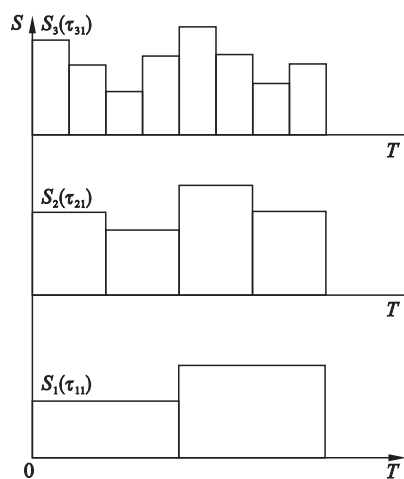


图 1 荷载效应随机过程的样本函数  
Fig. 1 Sample function of the load-effect stochasticity

假设荷载效应为等时段的平稳二项矩形波过程, 则结构每个时段内的失效概率或可靠指标都相同, 结构在目标使用期  $\tau$  内的失效概率<sup>[9]</sup>为

$$p_f(\tau) = P\left\{\bigcup_{i=1}^n U(\tau_{3i}) \leq 0\right\} \approx P\left\{\bigcup_{i=1}^n H(\tau_{3i}) \leq 0\right\} = 1 - \Phi_n(\beta; \rho). \quad (8)$$

式中:  $\beta$  为功能函数  $H(\tau_{3i})$  的可靠指标;  $\rho$  为  $H(\tau_{3i})$  的相关系数.

$$\left. \begin{aligned} H(\tau_{3i}) &= \frac{\gamma_R Y_R}{\sqrt{\gamma_R^2 + \sum_{l=1}^3 \gamma_{S_l}^2}} + \sum_{l=1}^3 \frac{\gamma_{S_l} Y_{S_l}}{\sqrt{\gamma_R^2 + \sum_{l=1}^3 \gamma_{S_l}^2}} + \beta, \\ \gamma_R &= \frac{\varphi\{\Phi^{-1}[F_R(R^*)]\}}{f_R(R^*)}, \\ \gamma_{S_l} &= \frac{-\varphi\{\Phi^{-1}[F_{S_l}(S_l^*)]\}}{f_{S_l}(S_l^*)}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

式中:  $i, l = 1, 2, 3$ ;  $H(\cdot)$  为正态化和线性化后的

功能函数;  $Y_R, Y_{S_i}$  为标准正态随机变量;  $\varphi(\cdot)$  为标准正态密度函数;  $\Phi^{-1}(\cdot)$  为标准正态分布函数的反函数;  $f_x(\cdot)$  为随机变量  $x$  的概率密度函数;  $F_x(\cdot)$  为随机变量  $x$  的概率分布函数;  $R^*, S_i^*$  为设计验算点;  $\Phi_n$  为  $n$  维标准正态函数。

确定可靠指标和相关系数后,结构的失效概率便可使用式(8)进行计算,它与抗力、荷载效应的概型是完全相符的,且不必采用近似的方法进行荷载效应组合,以及寻找最不利的荷载效应组合。

## 2 考虑荷载作用顺序的可靠度分析

### 2.1 非平稳荷载过程可靠度分析方法

假设结构的抗力服从正态分布,结构的荷载过程为非平稳随机过程,在不同的时段有着不同的均值和方差。荷载与抗力相互独立,且在不同时段荷载随机过程有不同的均值与方差。假定荷载效应的均值样本函数如图 2 所示。

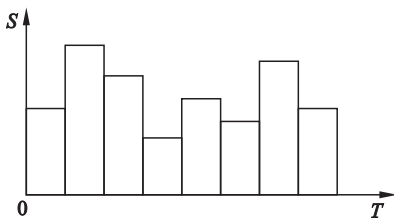


图 2 各时段内荷载效应均值函数

Fig. 2 Sample function of the mean load effect

将结构承载力极限状态函数当量正态化可得

$$H = \frac{f_R(R^*)\sigma'_R}{\sqrt{[f_R(R^*)\sigma'_R]^2 + [f_R(S^*)\sigma'_S]^2}} Y_R - \frac{f_R(S^*)\sigma'_R}{\sqrt{[f_R(R^*)\sigma'_R]^2 + [f_R(S^*)\sigma'_S]^2}} Y_S + \beta. \quad (10)$$

其正态化后的等效均值和标准差为

$$\left. \begin{aligned} \mu'_R &= R^* - \Phi^{-1}[F_R(R^*)]\sigma'_R, \\ \sigma'_R &= \frac{\varphi\{\Phi^{-1}[F_R(R^*)]\}}{f_R(R^*)}, \\ \mu'_S &= R^* - \Phi^{-1}[F_S(R^*)]\sigma'_S, \\ \sigma'_S &= \frac{\varphi\{\Phi^{-1}[F_S(S^*)]\}}{f_R(S^*)}. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

相应地,结构抗力与荷载效应可表示为

$$\left. \begin{aligned} R &= \mu'_R + \beta\sigma'_S \frac{f_R(R^*)\sigma'_R}{\sqrt{[f_R(R^*)\sigma'_R]^2 + [f_S(S^*)\sigma'_S]^2}}, \\ S &= \mu'_S + \beta\sigma'_S \frac{f_R(S^*)\sigma'_R}{\sqrt{[f_R(R^*)\sigma'_R]^2 + [f_S(S^*)\sigma'_S]^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

式中:  $\mu, x^*, \beta$  可通过反复迭代求得。当迭代后的  $\|x\|$  满足精度要求时,可求相应的可靠指标,即  $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)^T$ 。假设荷载随机过程为独立增量过程,此时不同时段间的相关系数为<sup>[10]</sup>

$$\rho_{ij} = \sigma_i / \sigma_j. \quad (13)$$

将结构使用期内荷载效应分为  $n$  个时段,结构在使用期内的失效概率为

$$p_f = P\left\{\bigcup_{i=1}^n H \leq 0\right\} = 1 - \Phi_n(\beta; \rho). \quad (14)$$

当结构各时段失效模式之间的相关系数相同时,式(14)可简化为

$$\Phi_n(\beta; \rho) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \prod_{i=1}^n \Phi\left(\frac{-\beta_i - \sqrt{\rho}x}{\sqrt{1-\rho}}\right) dx. \quad (15)$$

其中,  $\varphi(x)$  是标准正态分布概率密度函数。如果各时段失效模式的可靠指标也相等,则式(15)可进一步简化为<sup>[6]</sup>

$$\Phi_n(\beta; \rho) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) [\Phi(\frac{-\beta_i - \sqrt{\rho}x}{\sqrt{1-\rho}})]^n dx. \quad (16)$$

但是实际工程中很难保证各时段之间有相同的相关系数或可靠指标,因此求解结构使用期内的失效概率往往只能采用式(17)的方法进行计算:

$$\Phi_n(\beta; \rho) = \int_{-\infty}^{\beta_1} \int_{-\infty}^{\beta_2} \dots \int_{-\infty}^{\beta_n} \Phi_n(z; \rho) dz_1 dz_2 \dots dz_n. \quad (17)$$

在计算过程中涉及到多维积分的求解,这不但给求解造成较大困难,而且进行数值积分的精度也难以得到保证。因此,需要对计算方法进行简化。求解时先求得前两个时段的失效概率,由于两个时段之间只有一个相关系数,所以可视为各时段失效模式之间相关系数相同的情况,按式(18)进行求解。

$$\Phi_{12}(\beta; \rho) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \prod_{i=1}^2 \Phi\left(\frac{-\beta_i - \sqrt{\rho}x}{\sqrt{1-\rho}}\right) dx. \quad (18)$$

则这两时段的可靠指标:

$$\beta_{12} = \Phi^{-1}[\Phi_{12}(\beta; \rho)]. \quad (19)$$

同理,可求得  $\beta_{34}, \beta_{56}, \dots$  这样便将原来的  $n$  个时段缩减到原来的一半。依此类推,最后可求出结构在使用期内的失效概率和可靠指标,避免了高维积分的计算困难与精度问题。

### 2.2 考虑荷载作用顺序的条件可靠度分析方法

假设抗力服从正态分布,不随时间变化,且与荷载效应相互独立。荷载效应随时间变化服从不同的概率分布,将荷载效应分为几个相等时段,假设每个时段内荷载效应的分布函数不变,荷载随机变量服从联合分布为正态的时间序列,即

$$f(x, t) = \frac{1}{2\pi \sqrt{|R|}} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n R^{ij} (x_{t_i} - \mu_{t_i})(x_{t_j} - \mu_{t_j})}. \quad (20)$$

其中:  $R$  为  $n \times n$  阶协方差矩阵;  $R^{ij} = \frac{A^{ij}}{|R|}$ ,  $A_{ij}$  为  $R$  中第  $ij$  个元素的代数余子式。

计算结构  $t$  时间内可靠度时, 将  $n$  个时段内的荷载效应进行联合求解, 对  $n$  维联合密度函数积分求失效概率, 即

$$p_{f_t} = 1 - \Phi_n(\beta; \rho). \quad (21)$$

这种方法虽然在一定程度上简化了计算, 但未考虑时间的先后, 若将某两个时段的荷载效应互换后, 所得的  $t$  时间内的失效概率并不发生变化, 这显然与真实情况有偏差。为了更准确地求解结构的可靠度, 基于正面信息的条件可靠度大于无条件概率, 基于负面信息的条件可靠度小于无条件概率<sup>[11]</sup>, 这里, 前一时段荷载可视为基于负面信息的条件可靠度, 每一个时段的失效概率都是建立在前一时段的基础上的条件概率。

假设荷载效应在  $n$  个时间序列内呈正态分布, 则其在第一时段内的极限状态方程为  $Z = R - S_1$ 。由于相互独立且服从正态分布的随机变量的线性组合仍服从正态分布, 所以在第一时段内

$$\left. \begin{aligned} \mu_{z_1} &= \mu_R - \mu_{S_1}, \\ \sigma_{z_1} &= \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_{S_1}^2}, \\ \beta_1 &= \frac{\mu_R - \mu_{S_1}}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_{S_1}^2}}, \\ p_{f_1} &= \Phi(-\beta_1). \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

求解第二时段的失效概率时, 应在第一时段荷载作用的条件下进行第二次荷载作用, 即

$$p_{f_2} = P\{Z_2(X_2|X_1) < 0\} = \frac{P\{Z(R, X_1, X_2) < 0\}}{1 - P\{Z(R, X_1) < 0\}} = \frac{P\{Z(R, X_1, X_2) < 0\}}{1 - p_{f_1}}. \quad (23)$$

而不是单纯的  $P\{Z(X_1, X_2) < 0\}$ 。同理, 之后每个时段的失效概率为

$$\left. \begin{aligned} p_{f_3} &= P\{Z_3(X_3|X_1, X_2) < 0\} = \\ &= \frac{P\{Z(R, X_1, X_2, X_3) < 0\}}{1 - P\{Z(R, X_1, X_2) < 0\}} = \\ &= \frac{P\{Z(R, X_1, X_2, X_3) < 0\}}{1 - p_{f_2}}, \\ &\vdots \\ p_{f_n} &= P\{Z_n(X_n|X_1, X_2, \dots, X_{n-1}) < 0\} = \\ &= \frac{P\{Z(R, X_1, X_2, \dots, X_n) < 0\}}{1 - P\{Z(R, X_1, X_2, \dots, X_{n-1}) < 0\}} = \\ &= \frac{P\{Z(R, X_1, X_2, \dots, X_n) < 0\}}{1 - p_{f_{n-1}}}. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

显然, 过去考虑时间序列上的荷载效应的方法偏于冒进, 且随着时间区段的增加, 产生的误差逐渐加大, 这会导致在考虑时间变量时的可靠指标与实际有较大偏差, 而用本文的方法可以更精确地求得结构在荷载效应随时间变化情况下的可靠度。

### 2.3 计算简化方法

每个时段内荷载的概率密度函数都相同, 将每相邻两时段的荷载效应和失效概率整合, 依此类推, 求得总的失效概率。下面以图 2 所示荷载效应的均值变化情况进行说明。

首先, 求  $t_1, t_3, t_5, t_7$  时段的失效概率:

$$p_{f_n} = \Phi(-\beta_n) = \Phi\left(-\frac{\mu_R - \mu_{S_n}}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_{S_n}^2}}\right), n=1, 3, 5, 7. \quad (25)$$

其次, 分别在  $t_1, t_3, t_5, t_7$  时段条件下求  $t_2, t_4, t_6, t_8$  时段的失效概率, 每两时段的荷载效应服从二维正态分布。同理, 可求出  $t_2, t_4, t_6, t_8$  时段的失效概率  $p_{f_2}, p_{f_4}, p_{f_6}, p_{f_8}$ 。按同样的方法可以继续对时段进行整合, 最后可求出结构在整个时间  $t$  内的可靠度。

### 2.4 荷载效应组合

假设结构受到三个荷载效应共同作用, 每个时段内荷载效应的概率密度函数相同, 如图 1 所示, 其纵坐标为荷载效应在各时段内的均值。

首先, 对最小荷载时段进行整合, 求出  $S_3(\tau_{3i})$  时段整合后的失效概率:

$$p_{f(\tau_{3i})}(R, S_3) = \frac{P\{Z(R, S_3(\tau_{3i}), S_3(\tau_{3(i+1)})) < 0\}}{1 - p_{f(\tau_{3i})}}. \quad (26)$$

其次, 在进行下一步时段整合前, 先对  $\tau_{2i}$  上各时段的  $S_3$  与  $S_2$  进行荷载组合, 求出考虑  $S_3$  与  $S_2$  两种荷载效应下的  $\tau_{2i}$  上各时段失效概率:

$$p_{f(\tau_{2i})} = P\{Z[R, S_3(\tau_{2i}), S_2(\tau_{2i})] < 0\}. \quad (27)$$

最后, 继续向下一时段整合, 进入下一时段后, 采用同样的方法先对  $S_1$  进行荷载效应组合。依此类推, 得出总的失效概率  $p_f$ 。

该方法考虑了荷载效应随时间变化的先后顺序, 每次计算只用到二维正态分布的概率求解。当时间区段较多时, 计算步骤也较多, 但很容易通过编程实现。此外, 该方法在荷载组合时具有更高的精度。

## 3 抗力随时间变化的可靠度分析

在讨论荷载概率模型时, 常采用基于随机过程的跨阈理论来估计使用期荷载的最大值。但是, 跨阈理论模型不限于估计荷载概率模型的最大值



分布,实际应用时可定义一个阈值  $\alpha$ ,当荷载值超过阈值  $\alpha$  时,会对结构造成一定损伤,使抗力  $R$  有一定程度的削减,而导致可靠指标降低.若无视荷载作用的时间顺序,会增大计算误差.每次荷载超过阈值  $\alpha$  时,抗力会产生损伤,损伤后新的阈值  $\alpha$  也随之减小,如图 3 所示.因此,同样大小的荷载效应值  $S$ ,在  $t_1$  时段可能不会造成结构的损伤,但如果发生在  $t_2$  时段,就可能对结构抗力产生影响,所以这时荷载作用顺序对结构的可靠性影响很大.

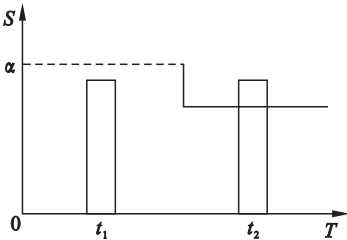


图 3 阈值折减示意图  
Fig. 3 Threshold reduction diagram

本文考虑荷载在每一时段内平稳分布的情况,图 3 中纵坐标表示荷载均值分布情况,用  $v_\alpha(t_i)$  表示单位时间内对跨阈值  $\alpha$  向上跨阈次数的期望.由 Rice 公式可知

$$v_\alpha = \int_0^\infty \dot{x} f(\alpha, \dot{x}) d\dot{x}. \tag{28}$$

式中,  $\dot{x}$  为  $S$  的导数,则  $t_i$  时段荷载跨阈次数为

$$N_{\alpha_{ti}} = v_{\alpha_{ti}} \cdot \Delta t_i. \tag{29}$$

设  $t_i$  时段内荷载超过阈值  $\alpha$  的总时间为  $T_{\alpha i}$ ,且每个时段内荷载效应都是平稳的,则  $T_{\alpha i}$  的均值:

$$\mu_{T_\alpha} = (1 - F_s(\alpha)) T_i. \tag{30}$$

式中,  $F_s(\cdot)$  为  $S$  的分布函数.设一次跨阈的持续时间为  $d_\alpha$ ,时段  $t_i$  内总跨阈次数为  $N_{\alpha_{ti}}$ ,显然

$$T_\alpha = d_\alpha N_{\alpha_{ti}}, \tag{31}$$

$$\mu_{T_{\alpha_{ti}}} \approx \mu_{d_{\alpha_{ti}}} \mu_{N_{\alpha_{ti}}} = \mu_{d_{\alpha_{ti}}} v_{\alpha_{ti}} \Delta t_i, \tag{32}$$

$$\mu_{d_{\alpha_{ti}}} = 1 - F_s(\alpha) / v_{\alpha_{ti}}. \tag{33}$$

如果荷载发生变化的概率与时间无关,那么荷载发生变化的时点可用泊松过程来描述,即荷载在时间  $t$  以前发生变化的次数  $N(t)$  服从泊松分布,荷载在变化  $k$  次后开始首次超越阈值的概率为

$$P\{N(t) = k\} = (\lambda t)^k e^{-\lambda t} / k!. \tag{34}$$

式中,  $\lambda$  为单位时间荷载发生变化次数的期望与方差.若荷载超过阈值  $\alpha$  变化  $k$  次以后降到  $\alpha$  以下,则跨阈持续时间的分布函数和概率密度为

$$F(t) = 1 - (\lambda t)^{k-1} e^{-\lambda t} / (k-1)!, \tag{35}$$

$$f(t) = -\frac{(\lambda t)^{k-2}}{(k-2)!} e^{-\lambda t} + \lambda \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda t}. \tag{36}$$

则跨阈持续时间的期望:

$$\begin{aligned} \mu_d &= \int_{-\infty}^\infty \left[ -\frac{(\lambda t)^{k-2}}{(k-2)!} e^{-\lambda t} + \lambda \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda t} \right] dt = \\ &\int_{-\infty}^\infty \left[ -\frac{(\lambda t)^{k-2}}{(k-2)!} e^{-\lambda t} \right] dt + \frac{1}{\lambda (k-1)!} \times \\ &\sum_{i=1}^{k+1} (-1)^i x^{k+1-i} e^{-x} = -\lambda + \frac{1}{\lambda (k-1)!}. \end{aligned} \tag{37}$$

又由式(35)可得

$$-\lambda + (\lambda (k-1)!)^{-1} = 1 - F_s(\alpha) / v_{\alpha_{ti}}, \tag{38}$$

$$(k-1)! = v_\alpha / \lambda [1 - F_s(\alpha) + \lambda v_\alpha]. \tag{39}$$

对于平稳离散型的荷载效应,每次荷载状态发生变动前荷载大小保持恒定值,此时上跨域次数为

$$\begin{aligned} v_\alpha \Delta t &= P\{x(t) \leq \alpha, x(t + \Delta t) \geq \alpha, \Delta t \text{ 内变动一次}\} = \\ &P\{x(t) \leq \alpha, x(t + \Delta t) \geq \alpha | \Delta t \text{ 内变动一次}\} \cdot P\{\Delta t \text{ 内变动一次}\}. \end{aligned} \tag{40}$$

每一时段内荷载为平稳过程,分布函数相同,则

$$\begin{aligned} P\{x(t) \leq \alpha, x(t + \Delta t) \geq \alpha | \Delta t \text{ 内变动一次}\} &= \\ F_s(\alpha) \cdot [1 - F_s(\alpha)], \end{aligned} \tag{41}$$

$$P\{\Delta t \text{ 内变动一次}\} \approx \lambda \Delta t, \tag{42}$$

$$v_\alpha = \lambda F_s(\alpha) \cdot [1 - F_s(\alpha)], \tag{43}$$

$$(k-1)! = \frac{\lambda F_s(\alpha) \cdot [1 - F_s(\alpha)]}{\lambda \{1 - F_s(\alpha) + \lambda^2 F_s(\alpha) \cdot [1 - F_s(\alpha)]\}} \tag{44}$$

为简化模型,假设每次荷载跨阈时抗力折减都相同,且每次跨阈时长都取均值  $\mu_{d_{\alpha_{ti}}}$ ,每次荷载超过  $\alpha$  值时抗力  $R$  都乘以折减系数  $\lambda$ ,则

$$Z = R \prod [\lambda(\Delta t_i)]^{N_{\alpha_{ti}} - k_i} - S. \tag{45}$$

式中:  $\lambda(\Delta t_i)$  为每次跨阈持续时间  $\Delta t$  下的结构损伤情况,是与跨阈时长有关的函数;  $k$  是荷载超过阈值  $\alpha$  后变化的次数.设结构受多时段荷载作用,荷载每次超过阈值后结构都会发生损伤,荷载与阈值的变化情况如图 4 所示.

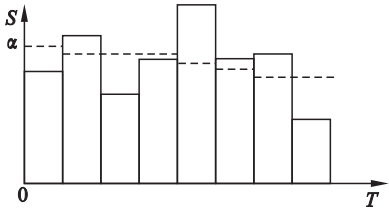


图 4 荷载分布与阈值变化情况  
Fig. 4 Load distribution and threshold variation

假设结构每次损伤后阈值的降低程度相同,则

$$\begin{aligned} p_{f_n} &= P\{R \cdot \prod_{i=1}^n \lambda(\mu_{d_{\alpha_{ti}}})^{v_{\alpha_{ti}}} - \\ S_n &< 0\} / 1 - p_{f_{n-1}}. \end{aligned} \tag{46}$$

4 算例分析

某钢筋混凝土梁承受自重和两种活荷载共同作用,梁抗力服从对数正态分布,抗力概率特性如表 1 所示.

表 1 结构抗力概率特性					
Table 1 Probabilistic characteristics of structural esistance					
概率特性	1	2	3	4	5
均值/kN	42	41.8	41.2	40.6	40.2
标准差	5.46	5.532	5.604	5.676	5.748

假设结构受到的重力服从正态分布,为平稳随机过程,其均值为 5 kN,变异系数为 0.070,结构受到的两种活荷载都服从极值 I 型分布,活荷载的均值为 7.16 kN,方差为 13.663,风荷载的均值为 10.1 kN,方差为 28.282. 结构的可靠指标计算结果如图 5 中情况 1 所示. 图 5 中情况 2 表示不考虑抗力劣化;情况 3 表示不考虑历史荷载的影响;情况 4 表示既不考虑抗力劣化,也不考虑历史荷载的影响. 对比情况 3 与情况 4 可知:考虑结构损伤与不考虑结构损伤的分析结果有很大差异;对比情况 2 和情况 4 可知:在结构本身可靠性较高时,是否考虑加载历史会对计算结果产生影响,但影响不是十分明显;对比情况 1 和情况 3 可知:当结构可靠性逐渐降低时,加载历史的影响会逐渐增大.

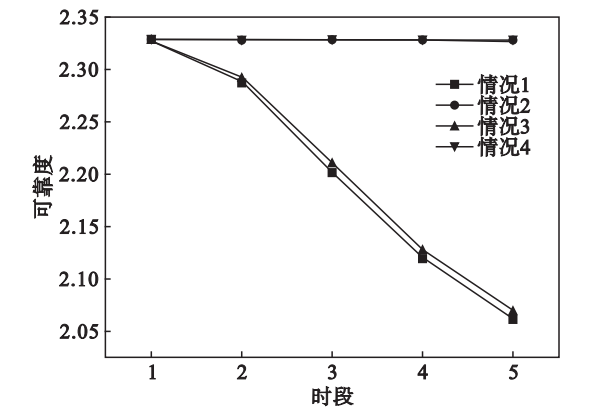


图 5 不同计算方法下的结构可靠度

Fig. 5 Structural reliability under different calculation methods

5 结 论

1) 对非平稳随机荷载作用下的结构可靠度进行了研究,给出了结构承受非平稳随机荷载时的计算公式;针对求解时可能遇到的多维积分问

题,给出了相应的简化方法和结构受非平稳荷载组合时的求解步骤.

2) 鉴于结构受多时段荷载作用时历史荷载对后续时段有影响,研究了可以考虑各时段荷载之间相互影响的结构可靠度分析方法和考虑荷载作用顺序变化对结构可靠度产生的影响.

3) 基于跨阈理论考虑抗力随时间的变化情况,给出了综合考虑跨阈次数、跨阈持续时间、抗力折减程度的结构可靠度计算方法,根据实际计算中的不同需求,代入不同的损伤模型进行计算.

参考文献：

[ 1 ] Yao J T, Cheng K K. Discussion of sensitivity factors and dominating variable for design value method[ J]. *Journal of Civil Engineering*, 2017, 21 ( 1 ) : 37 – 44.

[ 2 ] Tabandeh A, Gardoni P, Murphy C. A reliability-based capability approach [ J ]. *Risk Analysis*, 2017, 38 ( 2 ) : 410 – 424.

[ 3 ] Wang C, Li Q W, Pang L, et al. Estimating the time-dependent reliability of aging structures in the presence of incomplete deterioration information[ J]. *Journal of Zhejiang University( Science A )*, 2016, 17 ( 9 ) : 677 – 688.

[ 4 ] Yao J T, Gu H. Probability model and combination method of crane load of industrial building[ J]. *Journal of Building Structures*, 2016, 37 ( 11 ) : 160 – 166.

[ 5 ] Song S F, Lu Z Z, Qiao H W. Subset simulation for structural reliability sensitivity analysis[ J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2017, 94 ( 2 ) : 658 – 665.

[ 6 ] 姚继涛. 结构可靠度的时段分析方法[ J]. *土木工程学报*, 2005, 38 ( 7 ) : 1 – 5.  
( Yao Ji-tao. Time interval analysis method of structural reliability[ J ]. *Journal of Civil Engineering*, 2005, 38 ( 7 ) : 1 – 5. )

[ 7 ] Han X, Jiang C, Liu L X, et al. Response-surface-based structural reliability analysis with random and interval mixed uncertainties[ J]. *Science China*, 2014, 57 ( 7 ) : 1322 – 1334.

[ 8 ] Ching J, Phoon K K, Yang J J. Role of redundancy in simplified geotechnical reliability-based design—a quantile value method perspective [ J ]. *Structural Safety*, 2015, 55 ( 1 ) : 37 – 48.

[ 9 ] Wang P, Zhang J, Zhai H, et al. A new structural reliability index based on uncertainty theory [ J ]. *Chinese Journal of Aeronautics*, 2017, 30 ( 4 ) : 1451 – 1458.

[ 10 ] 李全旺,王草. 荷载随机过程相关性对结构时变可靠度的影响[ J]. *清华大学学报( 自然科学版 )*, 2014, 54 ( 10 ) : 1316 – 1320.  
( Li Quan-wang, Wang Cao. The effect of correlation of load random process on time-varying reliability of structures [ J ]. *Journal of Tsinghua University( Natural Science Edition )*, 2014, 54 ( 10 ) : 1316 – 1320. )

[ 11 ] 张庆功,张鹏,胡启国. 关于条件可靠度不等式的证明[ J]. *哈尔滨工业大学学报*, 2005, 37 ( 2 ) : 212 – 213.  
( Zhang Qing-gong, Zhang Peng, Hu Qi-guo. Proof of inequality of conditional reliability [ J ]. *Journal of Harbin University of Technology*, 2005, 37 ( 2 ) : 212 – 213. )