

基于双互信息准则的雷达自适应波形设计方法

辛凤鸣¹, 汪晋宽², 王彬¹, 李梅梅¹
(1. 东北大学秦皇岛分校 计算机与通信工程学院, 河北 秦皇岛 066004;
2. 东北大学 信息科学与工程学院, 辽宁 沈阳 110819)

摘 要: 自适应波形优化技术是认知雷达的关键技术之一, 通过优化发射波形能够提高雷达系统性能. 针对目标检测问题, 在杂波环境下, 提出一种基于双互信息优化准则的自适应波形优化方法. 该方法同时以接收信号与目标冲激响应之间的互信息最大和接收信号与杂波冲激响应之间的互信息最小为优化准则, 在发射信号能量有限的约束条件下, 建立优化模型, 通过最大边缘分配算法求解最优波形. 仿真结果表明, 相对于固定波形, 所提方法优化发射波形能够提高目标检测性能.

关 键 词: 认知雷达; 波形设计; 互信息; 信息熵; 最大边缘分配算法

中图分类号: TP 911.2 **文献标志码:** A **文章编号:** 1005-3026(2019)12-1690-05

Adaptive Radar Waveform Design Based on Dual Mutual Information Criterion

XIN Feng-ming¹, WANG Jin-kuan², WANG Bin¹, LI Mei-mei¹
(1. School of Computer and Communication Engineering, Northeastern University at Qinhuangdao, Qinhuangdao 066004, China; 2. School of Information Science & Engineering, Northeastern University, Shenyang 110819, China. Corresponding author: XIN Feng-ming, E-mail: xfm_neu@126.com)

Abstract: Adaptive waveform optimization technology is one of the key technologies of cognitive radar, which can improve the performance of radar systems. For the target detection, an adaptive waveform design method based on dual mutual information (DMI) criterion was proposed in the clutter environment. The mutual information (MI) was maximized by the proposed method between the received signal and the target impulse response while the mutual information could be minimized between the received signal and clutter impulse response. With the transmitted signal energy constraint, the optimization model for optimal waveform was established, and the optimal waveform was solved by the maximum marginal allocation algorithm (MMA). The simulation results demonstrate the validation of the proposed method.

Key words: cognitive radar; waveform design; mutual information; entropy; maximum marginal allocation algorithm

传统雷达发射固定波形, 工作模式单一. 随着科技的发展, 对雷达性能的要求越来越高, 传统雷达难以应对, 因此, 加拿大学者 Haykin 提出认知雷达概念^[1], 认为是未来雷达的发展方向. 在认知雷达系统研究中, 自适应波形优化是一个关键技术.

信息论在波形优化研究中得到广泛应用^[2-9]. Bell 首先将互信息 (mutual information, MI) 理论应用到雷达自适应波形优化的研究中, 利用接收信号与目标冲激响应 (target impulse response, TIR) 之间的互信息最大为优化准则, 通过拉格朗日乘数法求解优化波形^[2]. 文献[3]针对多目标估计任务, 通过对各个目标特征互信息线性加权方法实现波形优化. Goodman 团队在互

信息基础上发表了一系列波形优化论文^[4-7],其思想是在接收信号与 TIR 之间互信息最大作为优化准则的基础上,通过序贯概率比检验(sequential probability ratio test, SPRT)对目标特征进行加权优化发射波形.在文献[8]中,作者针对目标检测任务,通过最大化 Kullback-Leibler divergence(KLD)作为准则优化发射波形,同时推导出 KLD,MI 和 SNR 之间的关系.文献[9]首先利用卡尔曼滤波设计优化波形使 TIR 估计误差最小,然后根据相邻两次接收回波信号不相关特点,通过两次回波信号之间的互信息最小作为优化准则选择最优波形.

根据以上分析,基于互信息准则的波形优化方法主要通过接收信号中目标信息最大化或者不相关参量互信息最小化作为单一的优化准则优化发射波形.本文提出基于双互信息准则优化发射波形,即:接收信号与 TIR 之间的互信息最大,同时接收信号与杂波冲激响应(clutter impulse response, CIR)之间互信息最小作为波形优化准则建立优化模型,通过最大边缘分配(maximum marginal allocation, MMA)算法求解最优波形,与传统雷达发射固定波形相比能够提高目标检测性能.

1 信号模型及互信息

1.1 信号模型

图 1 为杂波环境下雷达接收信号模型,其中 $x(t)$ 为发射信号; $h(t)$ 代表目标冲激响应,其为均值为 0,功率谱密度为 $\sigma_h^2(f)$ 的高斯随机过程; $c(t)$ 代表杂波冲激响应,其为均值为 0,功率谱密度为 $\sigma_c^2(f)$ 的高斯随机过程; $n(t)$ 为均值为 0,方差为 $\sigma_n^2(f)$ 的高斯白噪声; $y(t)$ 为接收信号.接收信号可以表示为

$$\begin{aligned} y(t) &= y_s(t) + y_d(t) + n(t) = \\ & x(t) * h(t) + x(t) * c(t) + n(t). \end{aligned} \quad (1)$$

其中: $y_s(t) = x(t) * h(t)$; $y_d(t) = x(t) * c(t)$.

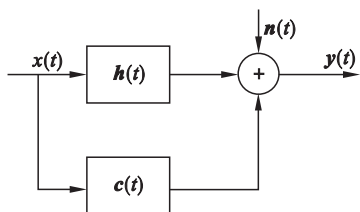


图 1 杂波环境下雷达信号模型

Fig. 1 Signal model in the clutter environment

1.2 互信息

在很小的频率间隔 $F_k = [f_k, f_k + \Delta f]$ 内,当带宽 Δf 足够小时,对于所有的 $f \in F_k$,有 $X(f) \approx X(f_k)$, $Y_s(f) \approx Y_s(f_k)$, $Y_d(f) \approx Y_d(f_k)$ 和 $Y(f) \approx Y(f_k)$. $X(f)$, $Y_s(f)$, $Y_d(f)$ 和 $Y(f)$ 分别为 $x(t)$, $y_s(t)$, $y_d(t)$ 和 $y(t)$ 的傅里叶变换.令 $\hat{x}_k(t)$, $\hat{y}_{sk}(t)$, $\hat{y}_{dk}(t)$ 和 $\hat{y}_k(t)$ 分别是在频域间隔 F_k 内与 $x(t)$, $y_s(t)$, $y_d(t)$ 和 $y(t)$ 相对应的部分.在每一个频点内 $\hat{y}_{sk}(t)$ 和 $\hat{y}_{dk}(t)$ 的方差可以表示为^[2]

$$\sigma_s^2(f_k) = \frac{|X(f_k)|^2 \sigma_h^2(f_k)}{T_y}, \quad (2)$$

$$\sigma_d^2(f_k) = \frac{|X(f_k)|^2 \sigma_c^2(f_k)}{T_y}. \quad (3)$$

式中 T_y 为接收信号时间长度.

由式(1)可知,接收信号是 3 个零均值的高斯随机变量之和,所以接收信号方差为

$$\begin{aligned} \sigma_y^2(f_k) &= \frac{|X(f_k)|^2 \sigma_h^2(f_k)}{T_y} + \\ & \frac{|X(f_k)|^2 \sigma_c^2(f_k)}{T_y} + \sigma_n^2(f_k). \end{aligned} \quad (4)$$

在频点 f_k 上,接收信号 $\hat{y}_k(t)$ 与目标回波信号 $\hat{y}_{sk}(t)$ 之间的互信息在给定发射信号 $\hat{x}_k(t)$ 的情况下可以表示为

$$\begin{aligned} I_T(\hat{y}_k(t); \hat{y}_{sk}(t) | \hat{x}_k(t)) &= \\ H(\hat{y}_k(t)) - H(\hat{y}_k(t) | \hat{y}_{sk}(t)). \end{aligned} \quad (5)$$

式中: $I(\cdot)$ 代表互信息; $H(\cdot)$ 代表信息熵.

根据信息熵的定义,由式(2)~(4)可知

$$\begin{aligned} H(\hat{y}_k(t)) &= \frac{1}{2} \ln 2\pi \left[\frac{|X(f_k)|^2 \sigma_h^2(f_k)}{T_y} + \right. \\ & \left. \frac{|X(f_k)|^2 \sigma_c^2(f_k)}{T_y} + \sigma_n^2(f_k) \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} H(\hat{y}_k(t); \hat{y}_{sk}(t)) &= \\ \frac{1}{2} \ln 2\pi \left(\frac{|X(f_k)|^2 \sigma_c^2(f_k)}{T_y} + \sigma_n^2(f_k) \right). \end{aligned} \quad (7)$$

将式(6)和式(7)代入式(5)中,在观测时长 T_y 内有^[2]

$$\begin{aligned} I_T(\hat{y}_k(t); \hat{y}_{sk}(t) | \hat{x}_k(t)) &= \\ \Delta f T_y \ln \left[1 + \frac{|X(f_k)|^2 \sigma_h^2(f_k)}{T_y \sigma_n^2(f_k) + |X(f_k)|^2 \sigma_c^2(f_k)} \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

考虑在整个信号频带内,通过极限思想,时域上接收信号与目标冲激响应之间的互信息可以通过频域表示为^[2]

$$\begin{aligned} I_T(y(t); h(t) | x(t)) &= \\ T_y \int_w \ln \left[1 + \frac{|X(f)|^2 \sigma_h^2(f)}{T_y \sigma_n^2(f) + |X(f)|^2 \sigma_c^2(f)} \right] df. \end{aligned} \quad (9)$$

2 波形优化

2.1 波形优化模型建立

由式(1)可知,雷达接收信号包括两部分:含有目标信息的回波信号 $x(t) * h(t)$; 含有杂波和噪声的干扰信息 $x(t) * c(t) + n(t)$. 为了提高雷达系统性能,接收端希望接收信号含有目标信息量越多越好,同时含有的干扰信息量越少越好. 因此,波形优化准则为:在给定发射信号情况下,接收信号与目标冲激响应之间的互信息最大,同时接收信号与杂波冲激响应之间的互信息最小,准则函数的数学表达式为

$$\begin{aligned} &\max_{|X(f)|^2} I_T(y(t); h(t) | x(t)) \cap \\ &\min_{|X(f)|^2} I_C(y(t); c(t) | x(t)). \end{aligned} \tag{10}$$

式中 $I_C(\cdot)$ 为接收信号与 CIR 之间的互信息.

准则函数(10)等效为

$$\max_{|X(f)|^2} [I_T - I_C]. \tag{11}$$

与 $I_T(y(t); h(t) | x(t))$ 推导类似,接收信号与 CIR 之间的互信息可以表示为

$$\begin{aligned} &I_C(y(t); c(t) | x(t)) = \\ &T_y \int_w \ln \left[1 + \frac{|X(f)|^2 \sigma_c^2(f)}{T_y \sigma_n^2(f) + |X(f)|^2 \sigma_h^2(f)} \right] df. \end{aligned} \tag{12}$$

将式(9)与式(12)代入式(11)中,得优化准则数学表达式为

$$\begin{aligned} &\max_{|X(f)|^2} [I_T - I_C] = \\ &T_y \int_w \ln \left\{ 1 + \frac{|X(f)|^2 [\sigma_h^2(f) - \sigma_c^2(f)]}{T_y \sigma_n^2(f) + |X(f)|^2 \sigma_c^2(f)} \right\} df. \end{aligned} \tag{13}$$

在发射信号能量 E_x 约束下,波形优化模型为

$$\begin{aligned} &\max_{|X(f)|^2} T_y \int_w \ln \left\{ 1 + \frac{|X(f)|^2 [\sigma_h^2(f) - \sigma_c^2(f)]}{T_y \sigma_n^2(f) + |X(f)|^2 \sigma_c^2(f)} \right\} df. \\ &\text{s. t. } \int_w |X(f)|^2 df = E_x. \end{aligned} \tag{14}$$

当杂波不存在时,即 $\sigma_c^2(f) = 0$,优化模型(14)与文献[2]中的优化模型相同.

2.2 MMA 算法求解优化波形

当杂波不存在时,优化模型(14)可以通过拉格朗日乘数法求解^[2],而当杂波存在时,使用拉格朗日乘数法求解困难,因此采用 MMA 算法求解最优波形,首先将优化模型(14)离散化:

$$\begin{aligned} &\max_{|X(f_k)|^2} T_y \sum_{k=1}^N \ln \left\{ 1 + \frac{|X(f_k)|^2 [\sigma_h^2(f_k) - \sigma_c^2(f_k)]}{T_y \sigma_n^2(f_k) + |X(f_k)|^2 \sigma_c^2(f_k)} \right\} \Delta f_k. \\ &\text{s. t. } \sum_{k=1}^N |X(f_k)|^2 \Delta f_k = E_x. \end{aligned} \tag{15}$$

令

$$u(k) = |X(f_k)|^2, \tag{16}$$

$$a_k = \frac{\sigma_c^2(f_k)}{\sigma_h^2(f_k) - \sigma_c^2(f_k)}, \tag{17}$$

$$b_k = \frac{T_y \sigma_n^2(f_k)}{\sigma_h^2(f_k) - \sigma_c^2(f_k)}. \tag{18}$$

将式(16)~(18)代入式(15)中,有

$$\begin{aligned} &\max_{|X(f_k)|^2} T_y \sum_{k=1}^N \ln \left[1 + \frac{u(k)}{a_k u(k) + b_k} \right] \Delta f_k. \\ &\text{s. t. } \sum_{k=1}^N u(k) = E_x / \Delta f_k = u_{\max}. \end{aligned} \tag{19}$$

对于波形优化问题,可以转化为在 $\sum_{k=1}^N u(k) =$

$E_x / \Delta f_k = u_{\max}$ 约束下,寻求 $D = \sum_{k=1}^N L(u(k), k)$ 的最大化,其中

$$L(u(k), k) = \ln \left[1 + \frac{u(k)}{a_k u(k) + b_k} \right]. \tag{20}$$

将 $u_{\max} = E_x / \Delta f_k$ 平均分为 P 份,有 $P\Delta = u_{\max}$, Δ 称为最小能量分配单元,在算法的每一步分配 Δ 单位的能量,直到 $P\Delta$ 的能量分配完为止. 在第一步中,如果 $L(u(j), j) > L(u(k), k), j \neq k$,则令 $u(j) = \Delta$,然后重复该步骤,直到选择分配下一个 Δ 到产生式(21)最大的 k 值,或者产生最大边缘增长的 k 值.

$$\begin{aligned} &\{L(\Delta, 0), L(\Delta, 1), \dots, L(\Delta, j-1), \\ &L(2\Delta, j) - L(\Delta, j), L(\Delta, j+1), \dots, L(\Delta, N)\}. \end{aligned} \tag{21}$$

由于在第 1 步中已经将 Δ 分配到 $k=j$ 处,此时边缘增长为 $L(2\Delta, j) - L(\Delta, j)$,即能量分配从 Δ 增加到 2Δ ,对于其他 k 值,边缘增长也是相同情况,整个过程直到 $\sum_{k=1}^N u(k) = u_{\max}$,即能量全部分配完毕^[10].

为了更好地理解 MMA 算法,举例说明,令 $N = 3, u(1) + u(2) + u(3) = u_{\max} = 4, \Delta = 1$. 希望 $D = L(u(1), 1) + L(u(2), 2) + L(u(3), 3) = \ln(1 + \frac{u(1)}{2u(1)+1}) + \ln(1 + \frac{u(2)}{2u(2)+2}) + \ln(1 + \frac{u(3)}{3u(3)+2})$

达到最大,在总能量为 4 的情况下,可以将 $0\Delta, 1\Delta, 2\Delta, 3\Delta$ 或者 4Δ 能量单位分配给 $u(1), u(2)$ 或者 $u(3)$.

表 1 为初始分配能量时 $L(u(k), k)$ 可能的值. 初始分配能量 $\Delta = 1$ 时,对于 $k = 1, 2, 3$, $L(u(k), k)$ 的值分别为 0.287 7, 0.223 1 和 0.182 3,

最大值为 0.287 7,所以第一步时, Δ 单位能量分配给 $k=1$ 处.

第一次能量分配后,产生新的边缘能量,见表 2,新的边缘能量分别为 0.048 8,0.223 1 和 0.182 3.最大值为 0.223 1,因此 Δ 单位能量分配给 $k=2$ 处.按照相同的原理,第二次分配后见表 3,最后一次能量分配后见表 4.表 5 总结了最终的能量分配情况,即 $u(1)=\Delta,u(2)=2\Delta,u(3)=\Delta$.

表 1 不同 $u(k)$ 对应的 $L(u(k),k)$ 值
Table 1 Values of $L(u(k),k)$ for various values of $u(k)$

$u(k)$	$k=1$	$k=2$	$k=3$
$u(k)=4$	0.367 7	0.336 5	0.251 3
$u(k)=3$	0.356 7	0.318 5	0.241 2
$u(k)=2$	0.336 5	0.287 7	0.223 1
$u(k)=1$	0.287 7	0.223 1	0.182 3
$u(k)=0$	0	0	0

表 2 第一次分配后不同的 $u(k)$ 对应的 $L(u(k),k)$ 的边缘值
Table 2 Values of $L(u(k),k)$ for various values of $u(k)$ after 1st allocation

$u(k)$	$k=1$	$k=2$	$k=3$
$u(k)=4$		0.336 5	0.251 3
$u(k)=3$	0.08	0.318 5	0.241 2
$u(k)=2$	0.069	0.287 7	0.223 1
$u(k)=1$	0.048 8	0.223 1	0.182 3
$u(k)=0$	0	0	0

表 3 第二次分配后不同的 $u(k)$ 对应的 $L(u(k),k)$ 的边缘值
Table 3 Values of $L(u(k),k)$ for various values of $u(k)$ after 2nd allocation

$u(k)$	$k=1$	$k=2$	$k=3$
$u(k)=4$			0.251 3
$u(k)=3$	0.08	0.113 4	0.241 2
$u(k)=2$	0.069	0.095 4	0.223 1
$u(k)=1$	0.048 8	0.064 6	0.182 3
$u(k)=0$	0	0	0

表 4 第三次分配后不同的 $u(k)$ 对应的 $L(u(k),k)$ 的边缘值
Table 4 Values of $L(u(k),k)$ for various values of $u(k)$ after 3rd allocation

$u(k)$	$k=1$	$k=2$	$k=3$
$u(k)=4$			
$u(k)=3$	0.08	0.113 4	0.069
$u(k)=2$	0.069	0.095 4	0.058 9
$u(k)=1$	0.048 8	0.064 6	0.040 8
$u(k)=0$	0	0	0

表 5 最终能量分配				
Table 5 Final allocation of energies				
Step	$k=1$	$k=2$	$k=3$	D
1	Δ			0.287 7
2		Δ		0.510 8
3			Δ	0.693 1
4		Δ		0.757 7
最终分配	Δ	2Δ	Δ	

3 仿真实验及分析

假设发射信号能量 $E_x=10$ (能量单位),噪声功率谱密度 $\sigma_n^2(f)=0.1$,杂波噪声功率比(clutter-to-noise ratio, CNR) $\text{CNR}=12.9\text{ dB}$,目标噪声功率比(target-to-noise ratio, TNR) $\text{TNR}=-5.39\text{ dB}$.

目标谱与杂波谱如图 2 所示.基于双互信息准则的优化波形能量谱如图 3 所示,优化波形的主要特点:

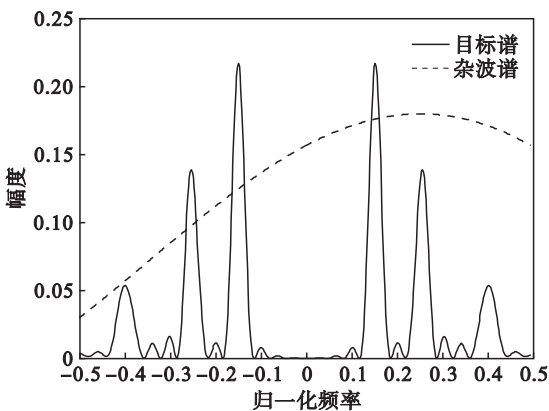


图 2 目标谱与杂波谱
Fig. 2 The target PSD and clutter PSD

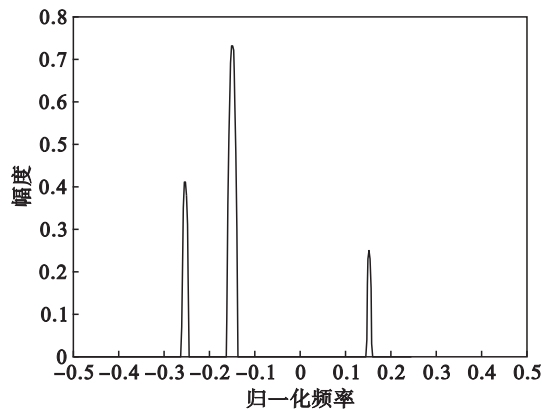


图 3 基于双互信息准则的优化波形能量谱
Fig. 3 Optimal waveform based on dual MI criterion

1) 优化波形将主要能量集中分配给目标特

征谱强度大的频带内,虽然目标频谱关于 0 频率点左右对称,然而由于杂波在频带 $(-0.5,0)$ 范围内的强度小于 $(0,0.5)$ 频带内的强度,因此优化波形将能量更多地分配给 $(-0.5,0)$ 频带内目标频谱强度大的两个频段.

2) 由于算法考虑了接收信号与杂波之间互信息最小因素,因此优化波形将能量仅仅分配给目标频谱强度大于杂波频谱的频带,当杂波强度大于目标强度时,即使在某频带内目标特征很强,优化波形也不会分配能量.

以线性调频信号(LFM)波形作为对比波形,优化波形的检测性能曲线如图 4 所示.从图中可以看到优化波形的检测性能在不同的恒虚警概率下始终好于固定 LFM 波形的检测性能,这是由于优化波形能够将能量分配给目标频谱特征强的频带内,使目标特征获得更多的能量,增加了接收信号的 SINR 从而提高目标检测性能.

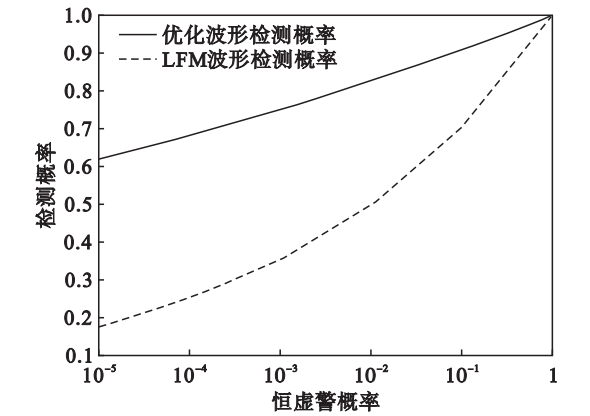


图 4 目标检测性能

Fig. 4 Probability of target detection

4 结 语

本文提出了一种基于双互信息准则的波形优化方法,该方法考虑接收信号与目标之间互信息

最大同时,还考虑接收信号与杂波之间互信息最小,以此作为优化准则,在能量约束下建立优化模型.所提方法的优化波形可将发射能量分配给目标特征强,且目标特征强于杂波特征的频带内,与固定发射波形相比,提高了目标检测性能.

参考文献:

[1] Haykin S. Cognitive radar; a way of the future [J]. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2006, 23 (1) : 30 - 40.

[2] Bell M R. Information theory and radar waveform design [J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1993, 39 (5) : 1578 - 1597.

[3] Leshem A, Naparstek O, Nehorai A. Information theoretic adaptive radar waveform [J]. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 2007, 1 (1) : 42 - 55.

[4] Goodman N A, Venkata P R, Neifeld M A. Adaptive waveform design and sequential hypothesis testing for target recognition with active sensors [J]. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 2007, 1 (1) : 105 - 113.

[5] Romero R A, Goodman N A. Waveform design in signal-dependent interference and application to target recognition with multiple transmissions [J]. *IET Radar Sonar and Navigation*, 2009 3 (4) : 328 - 340.

[6] Romero R A, Bae J, Goodman N A. Theory and application of SNR and mutual information matched illumination waveform [J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2011, 47 (2) : 912 - 927.

[7] Kim H S, Goodman N A, Lee G K, et al. Improved waveform design for radar target classification [J]. *IET Electronics Letters*, 2017, 53 (13) : 879 - 881.

[8] Zhu Z, Kay S, Raghavan R S. Information-theoretic optimal radar waveform design [J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2017, 24 (3) : 274 - 278.

[9] Yao Y, Zhao J, Wu L. Cognitive radar waveform optimization based on mutual information and Kalman filtering [J]. *Entropy*, 2018, 20 (9) : 653 - 666.

[10] Kay S. Waveform design for multistatic radar detection [J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2009, 45 (3) : 1153 - 1165.