

doi: 10.12068/j.issn.1005-3026.2019.12.011

反向回转双机驱动振动系统的倍频控制同步

刘云山^{1,2}, 贾磊¹, 闻邦椿¹

(1. 东北大学 机械工程与自动化学院, 辽宁 沈阳 110819; 2. 辽宁轨道交通职业学院 机械工程系, 辽宁 沈阳 110023)

摘 要: 针对基频同步不利于物料筛分的多样性和倍频自同步难以实现且只能实现一种整数倍频同步运动的问题,提出了一种双机驱动振动系统的倍频控制同步方法.建立了振动系统的机电耦合动力学模型,在此基础上应用小参数平均法推导出了振动系统的响应方程,同时基于主从控制策略引入了模糊 PID 控制方法,不仅实现了倍频控制同步运动,而且实现了最小公倍周期的零相位差倍频同步运动.最后用 Matlab/Simulink 仿真证明了理论的准确性与有效性.

关 键 词: 控制同步;倍频;振动系统;主从控制;模糊 PID

中图分类号: TP 273 **文献标志码:** A **文章编号:** 1005-3026(2019)12-1726-06

Multi-frequency Controlled Synchronization of a Vibrating System with Two-Motor Drives Rotating in Opposite Directions

LIU Yun-shan^{1,2}, JIA Lei¹, WEN Bang-chun¹

(1. School of Mechanical Engineering & Automation, Northeastern University, Shenyang 110819, China;
2. Department of Mechanical Engineering, Guidaojiaotong Polytechnic Institute, Shenyang 110023, China.
Corresponding author: LIU Yun-shan, E-mail: liyunshan75@163.com)

Abstract: Given that the base frequency synchronization is not conducive to the diversity of material screening, the multi-frequency self-synchronization is difficult to be realized and only integer times frequency synchronization motion can be achieved, multi-frequency controlled synchronization of a vibrating system with two eccentrics driven by inductor motors was proposed. Firstly, the electromechanical coupling dynamic model of the vibration system was established, based on which the response equation of the vibration system was derived by using the small parameter average method. Meanwhile, the fuzzy PID control method was introduced based on the master-slave control strategy, which not only realized the multi-frequency control synchronous motion, but also realized the zero-phase difference multi-frequency synchronous motion of the minimum common multiple period. Finally, the accuracy and effectiveness of the theory was proved by Matlab/Simulink simulation.

Key words: controlled synchronization; multi-frequency; vibrating system; master-slave control; fuzzy PID

两激振器或多激振器的自同步理论被广泛应用在振动机器中^[1].然而,自同步振动机器的稳定区域有一定的局限性,为解决这个问题,在振动机器的设计中引入了控制同步理论.

近些年来,已经出现一定数量与控制同步相关的研究文献.Tomizuka 等将自适应前馈控制理论应用到同步运动中^[2-3].Miklos 等使用了自适

应滑膜控制算法研究了多台感应电机的速度跟踪与同步^[4-5].Kong 等^[6]研究了两个不同的感应电动机驱动的同同步控制:采用了主从电机控制策略并用 PI 法和自适应滑膜来控制速度,并将相位跟踪方法引入到相位同步中.随着控制方法的发展,基于 PID 法、模糊 PID 法在电机控制中得到了广泛的应用^[7-8].

基频同步振动筛, 只能实现直线或近似圆周或椭圆的运动, 限制了物料的类型和筛选效率. 而倍频振动同步运动虽然可以解决上述问题, 但实际工程中难以实现. 倍频控制同步可以实现不同类型的运动, 可增加振幅, 并最终提高筛分效率. 因此, 本文对两个同形偏心转子反向回转的倍频控制同步进行研究.

1 振动系统的动力学模型

1.1 机械系统模型

如图 1 所示, 振动系统由一个刚性质体和两个装有偏心转子的感应电机, 及 4 个与地基相连的弹簧组成. o 点是刚体的几何中心与质心, 刚体沿着 x 和 y 方向运动. 两感应电机沿着 y 轴对称地与质体相连, 质体上 4 个弹簧也对称分布.

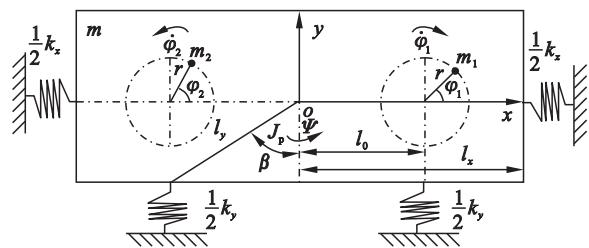


图 1 振动系统的动力学模型

Fig. 1 Dynamic model of the vibratory system

使用 Lagrange 方程, 并选变量 x, y, ψ, φ_1 和 φ_2 为广义坐标, 则振动系统的运动微分方程如下:

$$\left. \begin{aligned} M\ddot{x} + f_x\dot{x} + k_x x &= \sum_{i=1}^2 (-1)^{i+1} m_i r (\ddot{\varphi}_i \cos \varphi_i + \ddot{\psi} \sin \varphi_i), \\ M\ddot{y} + f_y\dot{y} + k_y y &= \sum_{i=1}^2 m_i r (\ddot{\varphi}_i \sin \varphi_i - \ddot{\psi} \cos \varphi_i), \\ J\ddot{\psi} + f_\psi\dot{\psi} + k_\psi \psi &= (T_{e2} - T_{e1}) - \\ & m_1 r l_0 [\ddot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_1 + \beta) - \ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1 + \beta)] + \\ & m_2 r l_0 [\ddot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_2 + \beta) - \ddot{\varphi}_2 \cos(\varphi_2 + \beta)], \\ J_1 \ddot{\varphi}_1 + f_1 \dot{\varphi}_1 &= T_{e1} - \\ m_1 r_1 [\ddot{y} \cos \varphi_1 - \ddot{x} \sin \varphi_1 - l_0 \ddot{\psi} \cos(\varphi_1 + \beta)], \\ J_2 \ddot{\varphi}_2 + f_2 \dot{\varphi}_2 &= T_{e2} - \\ m_2 r_2 [\ddot{y} \cos \varphi_2 + \ddot{x} \sin \varphi_2 + l_0 \ddot{\psi} \cos(\varphi_2 + \beta)]. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

其中: $M = m_1 + m_2 + m$; m_1 和 m_2 是两转子的偏心质量, 且 $m_2 = \eta m_1$; m 是刚体质量; r 是偏心半径; l_0 是系统质心到偏心转子回转中心距离; J 是系

统的转动惯量, $J = M l_e^2 = J_p + (m_1 + m_2)(l_0^2 + r^2)$, 其中 J_p 是刚体的转动惯量, 且 l_e 是等效半径; J_1 和 J_2 是两偏心转子的转动惯量, $J_1 = m_1 r^2$, $J_2 = m_2 r^2$; f_x, f_y, f_ψ 分别是系统在 x, y, ψ 方向的阻尼系数; f_1 和 f_2 是两感应电机的阻尼系数; k_x, k_y, k_ψ 是弹簧的刚度; T_{e1} 和 T_{e2} 分别是两感应电机的电磁转矩.

T_{L1} 和 T_{L2} 是时变负载扭矩, 可表示为

$$T_{L1} = m_1 r [\ddot{y} \cos \varphi_1 - \ddot{x} \sin \varphi_1 + l_0 \ddot{\psi}^2 \sin(\varphi_1 - \beta) + l_0 \ddot{\psi}^2 \cos(\varphi_1 - \beta)], T_{L2} = m_2 r [\ddot{y} \cos \varphi_2 - \ddot{x} \sin \varphi_2 - l_0 \ddot{\psi}^2 \sin(\varphi_2 + \beta) - l_0 \ddot{\psi}^2 \cos(\varphi_2 + \beta)]. \quad (2)$$

1.2 电磁系统模型

感应电机需要被控制, 所以感应电机的模型如下:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{sd} &= L_s i_{sd} + L_m i_{rd}, \\ \varphi_{sq} &= L_s i_{sq} + L_m i_{rq}, \\ \varphi_{rd} &= L_m i_{sd} + L_r i_{rd}, \\ \varphi_{rq} &= L_m i_{sq} + L_r i_{rq}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\varphi}_{sd} &= -R_s i_{sd} + \omega_s \varphi_{sq} - u_{sd}, \\ \dot{\varphi}_{sq} &= -R_s i_{sq} + \omega_s \varphi_{sd} - u_{sq}, \\ \dot{\varphi}_{rd} &= -R_r i_{sq} + (\omega_s - \omega) \varphi_{rq}, \\ \dot{\varphi}_{rq} &= -R_r i_{rd} - (\omega_s - \omega) \varphi_{rd}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

式(3)和(4)分别是在同步参考系中以 d, q 为轴的感应电机的磁链方程和电压方程. 由于感应电动机模型为鼠笼式, 转子部分会出现短路现象, 于是 $u_{rd} = u_{rq}$. 当系统达到稳定状态时, φ_{rd} 恒定, $\varphi_{rq} = 0$. 同步参考系的 d 和 q 轴上有 9 个变量, 其中可以选择 5 个来建立转子磁场定向坐标系中感应电动机的状态方程.

本文中, $\omega - i_s - \varphi_r$ 被选定, 这里 i_s 代表 i_{sd} 和 i_{sq} , φ_r 代表 φ_{rd} 和 φ_{rq} , ω_s 代表转速. 这样方程可以表示为

$$\left. \begin{aligned} \dot{\varphi}_{rd} &= -\frac{\varphi_{rd}}{T_r} + \frac{(\omega_s - n_p \omega)}{\varphi_{rq}} + \frac{L_m i_{sd}}{T_r}, \\ \dot{\varphi}_{rq} &= -(\omega_s - n_p \omega) \varphi_{rd} - \frac{\varphi_{rq}}{T_r} + \frac{L_m i_{sq}}{T_r}, \\ i_{sd} &= \frac{L_m \varphi_{rd}}{(\sigma L_s L_r T_r)} + \frac{L_m n_p \omega \varphi_{rq}}{(\sigma L_s L_r)} + \frac{(L_m^2 + R_s L_r T_r) i_{sd}}{(\sigma L_s L_r T_r)} + \\ & \omega_s i_{sq} + \frac{u_{sd}}{(\sigma L_s)}, \\ i_{sq} &= -\frac{L_m n_p \omega \varphi_{rd}}{(\sigma L_s L_r)} + \frac{L_m \varphi_{rq}}{(\sigma L_s L_r T_r)} - \omega_s i_{sd} - \\ & \frac{(L_m^2 + R_s L_r T_r) i_{sd}}{(\sigma L_s L_r T_r)} + \frac{u_{sq}}{(\sigma L_s)}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

其中:下标 s 和 r 分别代表定子和转子;下标 d 和 q 分别代表 d 轴和 q 轴; i 代表电流; u 代表电压; R 代表电阻; L_s 和 L_r 分别代表定子和转子的自感系数; L_m 是定子和转子的互感系数; T_r 是转子的时间常数; $T_r = L_r/R_r$;同样, $T_s = L_s/R_s$; σ 是泄漏因子, $\sigma = 1 - L_m/(L_s L_r)$; n_p 是感应电机的极对数; ω 是机械转速; ω_s 是同步电动角速度。

因为 $\varphi_{rd} = \text{constant}$, $\varphi_{rq} = 0$, 根据感应电机的型号,可以得到以下方程。

$$T_e = \frac{n_p L_m (i_{sq} \varphi_{rd} - i_{sd} \varphi_{rq})}{L_r} \quad (6)$$

$$T_e = \frac{n_p L_m i_{sq} \varphi_{rd}}{L_r} \quad (7)$$

如上所述, n_p , L_m , φ_{rd} 和 L_r 都是常数. 因此当感应电机稳定时,式(7)中的变量为 i_{sq} 。

1.3 振动系统的响应

根据文献[9],本文假设平均相位和相位差如下:

$$\varphi_1 = \varphi + \alpha, \varphi_2 = n(\varphi - \alpha) \quad (8)$$

其中 n 是振动系统多频同步系数. 然后取 φ_1, φ_2 的导数,可得

$$\dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi} + \dot{\alpha}, \dot{\varphi}_2 = n(\dot{\varphi} - \dot{\alpha}) \quad (9)$$

当系统达到稳态时,这意味着角速度的平均值为一常数^[9],这里 $\omega_0 = \int_0^T \dot{\varphi} dt / T$. 因此,式(9)可表示为

$$\left. \begin{aligned} \dot{\varphi}_1 &= (1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2) \omega_0, \\ \dot{\varphi}_2 &= n(1 + \varepsilon_1 - \varepsilon_2) \omega_0. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

其中: $\dot{\varphi} = (1 + \varepsilon_1) \omega_0$ 且 $\dot{\alpha} = \varepsilon_2 \omega_0$. 将式(10)代入式(1),得到振动系统在 x, y, ψ 三个方向的响应:

$$\begin{aligned} x &= -\left(\frac{r_m r}{\mu_x}\right) [\cos(\varphi_1 + \gamma_x) - \eta n^2 \cos(\varphi_2 + \gamma_x)], \\ y &= -\left(\frac{r_m r}{\mu_y}\right) [\sin(\varphi_1 + \gamma_y) + \eta n^2 \sin(\varphi_2 + \gamma_y)], \\ \psi &= -\left(\frac{r_m r_l r}{\mu_\psi l_c}\right) \\ &\quad [-\sin(\varphi_1 - \beta + \gamma_\psi) + \eta n^2 \sin(\varphi_2 + \beta + \gamma_\psi)]. \end{aligned} \quad (11)$$

其中: $\omega_x^2 = k_x/M$, $\omega_y^2 = k_y/M$, $\omega_\psi^2 = k_\psi/J$, $\xi_x = f_x/(2\sqrt{k_x M})$, $\xi_y = f_y/(2\sqrt{k_y M})$, $\xi_\psi = f_\psi/(2\sqrt{k_\psi J})$, $r_m = m_1/M$, $r_l = l_0/l_c$, $\mu_x = 1 - \omega_x^2/\omega_0^2$, $\mu_y = 1 - \omega_y^2/\omega_0^2$, $\mu_\psi = 1 - \omega_\psi^2/\omega_0^2$, $\eta = m_2/m_1$, $\tan \gamma_x = 2\xi_x \omega_x/(\mu_x \omega_0)$, $\tan \gamma_y = 2\xi_y \omega_y/(\mu_y \omega_0)$, $\tan \gamma_\psi = 2\xi_\psi \omega_\psi/(\mu_\psi \omega_0)$.

2 控制系统的设计

2.1 机电耦合系统设计

如图2所示,采用主从形式的控制方法,感应电机1,2分别是主电机与从电机. 感应电机2跟踪感应电机1的相位角. 感应电动机的电磁系统采用转子磁场定向控制(RFOC)和模糊PID控制. ω_1 是传输到主感应电机的给定速度. 采用模糊PID控制方法,得到了电机1的转速 ω_1 . 然后将反馈值 ω_1 用于两个部分,一部分用 ω_1 控制主感应电机,另一部分通过积分法得到 φ_1 ,即跟踪从感应电机. 最后,可以得到感应电机2的转速 ω_2 和反馈给从电机的相位 φ_2 . 图2中的RFOC被展示在图3中。

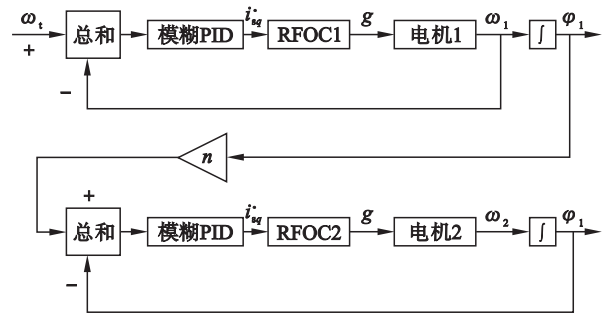


图2 控制系统流程图

Fig. 2 Flow diagram of the controlled system

给定转速 ω_1 减去反馈转速 ω_1 , 然后采用模糊PID法得到电磁转矩 T_e^* , 而 T_e^* 可以计算出定子在 q 轴上的电流 i_{sq}^* . 定子在 d 轴上的电流 $i_{sd}^* = \varphi_{rd}^*/L_m$, 其中 φ_{rd}^* 是给定的磁链. 这样, u_{sd}^* 和 u_{sq}^* 就得到. 同步电动角度 θ 可以表示为

$$\theta = \int (\omega + \omega_s) dt \quad (12)$$

其中: ω_s 是滑动角速度, $\omega_s = L_m i_{sq}^*/\varphi_{rd} T_r$. 通过坐标变换,能够得到 U_{sq}^* 和 U_{sd}^* . 最后,电机转速 ω 和电流 i_{abc} 可以通过SVPWM技术获得。

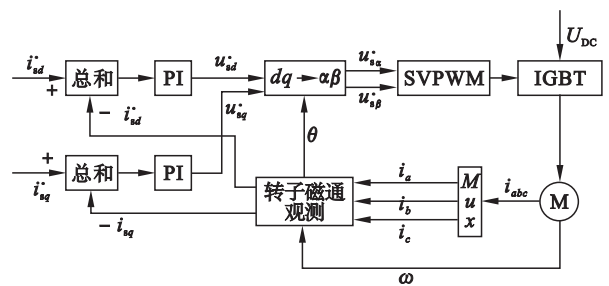


图3 转子磁场定向控制流程图

Fig. 3 Flow diagram of rotor flux oriented control

2.2 模糊 PID 法的设计

根据文献[9],模糊系统可以通过以下步骤构建.

步骤 1 用变量 $x_i(i=1,2)$ 的数字 p_i 来界定模糊集 $A_i^{l_i}(l_i=1,2,\cdots,p_i)$.

步骤 2 依据模糊定律,运用 $\prod_{i=1}^2 p_i$ 来构建模糊系统 $\hat{f}(x|\theta_f)$.

$R^{(j)}$:如果 x_1 是 $A_1^{l_1}$ 且 x_2 是 $A_2^{l_2}$,那么 \hat{f} 是 $E^{l_1 l_2}$.
其中 $l_i=1,2,i=1,2$.

模糊系统的输出可表示为

$$\hat{f}(x|\theta_f) = \frac{\sum_{l_1=1}^{p_1} \sum_{l_2=1}^{p_2} \bar{y}_f^{l_1 l_2} [\prod_{i=1}^2 \mu_{A_i^{l_i}}(x_i)]}{\sum_{l_1=1}^{p_1} \sum_{l_2=1}^{p_2} [\prod_{i=1}^2 \mu_{A_i^{l_i}}(x_i)]} \tag{13}$$

其中 $\mu_{A_i^{l_i}}(x_i)$ 是 x_i 的成员函数; $\bar{y}_f^{l_1 l_2}$ 是集合 $\theta_f \in R^{\prod_{i=1}^2 p_i}$ 中的自由参数.引入列向量 $\xi(x)$,式(13)可被推导为

$$\hat{f}(x|\theta_f) = \theta_f^T \xi(x) \tag{14}$$

其中 $\xi(x)$ 是带有维数 $\prod_{i=1}^2 p_i$ 的列向量,其中第 l_1 和第 l_2 元素为

$$\xi_{l_1 l_2}(x) = \frac{\prod_{i=1}^2 \mu_{A_i^{l_i}}(x_i)}{\sum_{l_1=1}^{p_1} \sum_{l_2=1}^{p_2} [\prod_{i=1}^2 \mu_{A_i^{l_i}}(x_i)]} \tag{15}$$

给出了两个输入变量、三个输出变量.输入变量分别是错误(E)和错误变化(EC).输出变量分别是 k_p, k_i, k_d .这 5 个变量都被分成 7 种情况,分

别是:NB,NM,NS,Z,PS,PM 和 PB. NB 和 PB 是模型 $Z(zmf)$ 的成员函数,其他是三角模型(trimf)的成员函数.

根据 $R^{(j)}$ 的表达,在本文中,用模糊控制定律建立了 49 条规则,从而得到了 PID 参数的方程:

$$k_p = \frac{[\sum_{j=1}^{49} u_{k_{pj}}(E,EC) \times k_{pj}]}{\sum_{j=1}^{49} u_{k_{pj}}(E,EC)} \tag{16}$$

$$k_i = \frac{[\sum_{j=1}^{49} u_{k_{ij}}(E,EC) \times k_{ij}]}{\sum_{j=1}^{49} u_{k_{ij}}(E,EC)} \tag{17}$$

$$k_d = \frac{[\sum_{j=1}^{49} u_{k_{dj}}(E,EC) \times k_{dj}]}{\sum_{j=1}^{49} u_{k_{dj}}(E,EC)} \tag{18}$$

3 结果与讨论

3.1 倍频自同步数值仿真

当速比和相位比均为 1.5 时,两电机可以被认为是同步的.在图 4a 中,分别给出电机 1 的转速 60 rad/s 和电机 2 的转速 90 rad/s.在图 4b 中,可见相位差没有稳定值,它是一个随时间变化的单调函数.所以当振动系统处于周期变化时电机不能达到同步状态.不同于 $n=1$ 的情况,倍频自同步的振幅值由于振幅叠加而不能达到同一值.波峰和波谷的值随时间周期性变化.在图 4c~4e 中可见振动系统在 x,y,Ψ 三个方向的一种特殊的现象:振幅的峰值发生正弦周期性变化.

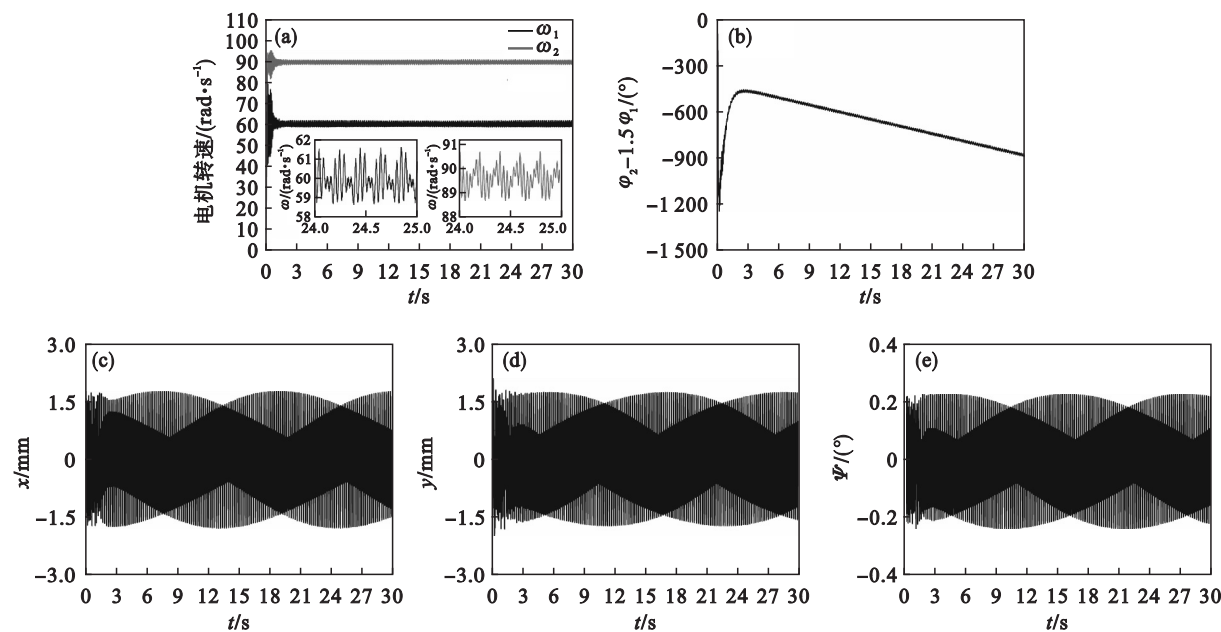


图 4 $n=1.5$ 时倍频自同步

Fig. 4 Multi-frequency self-synchronization for the situation $n=1.5$

(a)—电机转速; (b)—相位差; (c)— x 方向响应; (d)— y 方向响应; (e)— Ψ 方向响应.

3.2 倍频控制同步的数值仿真

虽然倍频自同步不能实现,却可以实现倍频控制同步. 图 5 中给出的主电机转速为 60 rad/s. 然后用相位比法,从电机对主电机进行跟踪. 采用这种方法,主电机和从电机均能达到转速和相位同步状态. 在图 5 中,当系统达到如图 5c 所示的稳定状态时,相位比为 1.5,验证了该方法的有效性. 图 5e 表示:当相位比达到 1.5 时,相位差为 0,这保证了方程的准确性($\varphi_1 - \varphi_2 = 0$, 即 $\varphi_2/\varphi_1 = 1$). 同样, $\varphi_2 - 1.5\varphi_1 = 0$, 即 $\varphi_2/\varphi_1 = 1.5$. 根据式

(8) ~ 式(10),如果相位比等于 1.5,则速度比也等于 1.5. 图 5c 中的仿真结果与理论推导一致. 从图 5a 可知,从电机转速为 90 rad/s. 所以速度和相位都实现了倍频同步. 与基频同步相比,每个波峰或波谷在周期内的值不存在一个标准的正弦变化. 因为两电机的速度不同,波峰和波谷随电机的运行而出现振型叠加现象,这就导致波峰和波谷在一个周期内出现不同值. 这是因为电机 1 的速度比电机 2 的速度快,当两电机反向旋转时,振幅处于叠加状态.

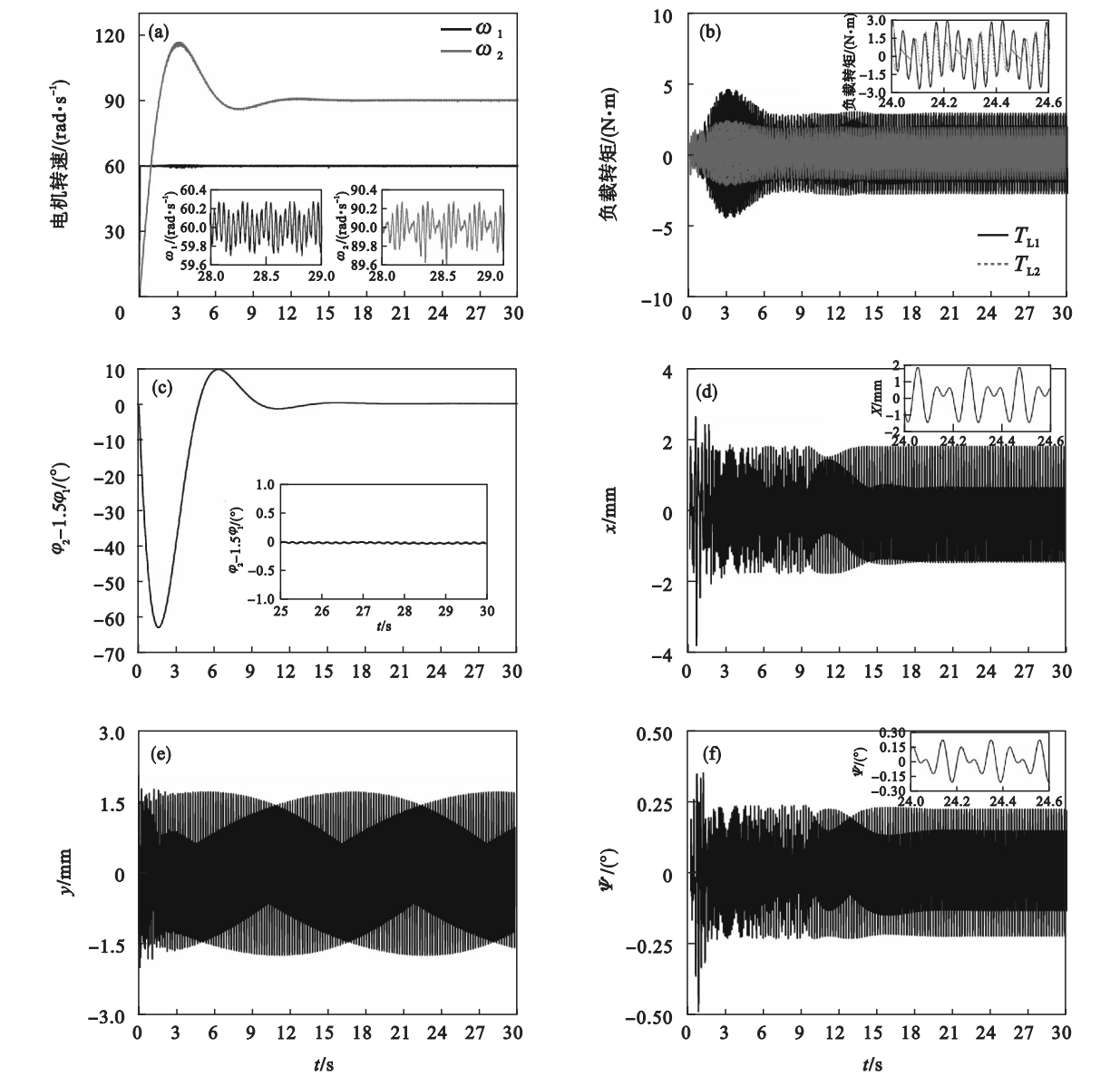


图 5 $n=1.5$ 时倍频控制同步

Fig.5 Multi-frequency controlled synchronization for the situation $n=1.5$

(a)—电机转速; (b)—负载转矩; (c)—相位差; (d)— x 方向响应; (e)— y 方向响应; (f)— ψ 方向响应.

图 6 描述了倍频控制同步 $n=1.5$ 时,框架在 x,y 两个方向的运动轨迹投影. 这个反向回转的

运动轨迹有利于振动效率,有利于筛分.

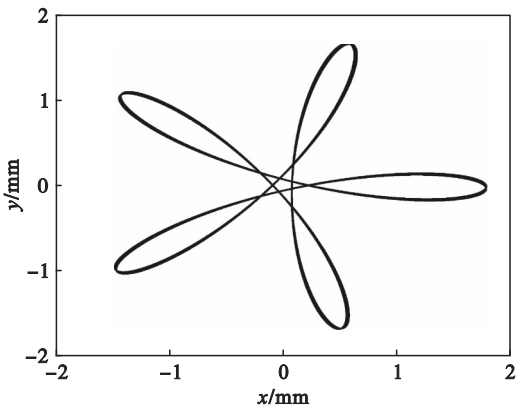


图 6 $n=1.5$ 时框架倍频控制同步运动轨迹
Fig.6 The movement track of the frame with multi-frequency controlled synchronization with $n=1.5$

4 结 论

- 1) 基于小参数平均法推导电机转速和相位的方程,从而给出振动系统在三个方向上的响应方程.
- 2) 应用数值仿真得出了在本文的动力学模型下,双机驱动振动系统的振动同步运动不能实现.
- 3) 通过引入基于主从控制策略的模糊 PID 算法,证明了反向回转双机驱动振动系统倍频控制同步可以实现;还可以实现最小公倍周期下的零相位差同步运动,证明了文中理论的正确性,同时证明了本文方法的有效性.
- 4) 通过平面内的运动轨迹证明了本文方法在工程实际中能够应用于多样的物料筛分.

参考文献：

[1] Wen B C, Fan J, Zhao C Y, et al. Vibratory synchronization and controlled synchronization in engineering [M]. Beijing: Science Press, 2009.

[2] Tomizuka M, Hu J S, Chiu T C, et al. Synchronization of two motion control axes under adaptive feed forward control[J]. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 1992, 114(2): 196 – 203.

[3] Xiao Y, Zhu K. Optimal synchronization control of high-precision motion systems[J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2006, 53(4): 1160 – 1169.

[4] Zhao D Z, Li C W, Ren J. Speed synchronization of multiple induction motors with adjacent cross-coupling control [J]. *Systems Engineering—Theory & Practice*, 2009, 29(1): 110 – 117.

[5] Miklos A, Szabo Z. Simulation and experimental validation of the dynamical model of a dual-rotor vibrotactor[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2015, 334: 98 – 107.

[6] Kong X X, Chen X Z, Dou J X, et al. Controlled synchronization of two nonidentical homodromy coupling exciters driven by inductor motors in a vibratory system[J]. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 2016, 230(17): 3040 – 3054.

[7] 张莉, 李彦明, 马培荪, 等. 基于模糊 PID 控制器的多电机同步控制装置的应用[J]. *工业仪表与自动化装置*, 2003(4): 11 – 13.

(Zhang Li, Li Yan-ming, Ma Pei-sun, et al. The synchronization control of a multi-motor based on a fuzzy PID controller[J]. *Industrial Instrumentation & Automation*, 2003(4): 11 – 13.)

[8] Passino K M, Yurkovich S. A course in fuzzy system and control[M]. Upper Saddle River: Prentice Hall, 1996.

[9] Zhao C Y, Zhu H T, Wang R Z, et al. Synchronization of two non-identical coupled exciters in a non-resonant vibrating system of linear motion. Part I: theoretical analysis[J]. *Shock and Vibration*, 2009, 16(5): 505 – 515.