

# 分段线性刚度非线性能量阱的参数优化方法

姚红良, 张 钦, 杨沛然, 闻邦椿

(东北大学 机械工程与自动化学院, 辽宁 沈阳 110819)

**摘 要:** 基于作者先前提出的具有分段线性刚度的非线性能量阱(nonlinear energy sink, NES)模型, 利用遗传算法研究了该 NES 的参数优化问题. 首先, 介绍了分段线性刚度 NES 的结构, 并分析了其非线性特性; 其次, 提出通过对立方曲线端点连线拟合的方法以缩减设计空间, 并采用二进制与实数混合编码方式设计了 NESs 的参数优化方法; 最后, 以框剪结构-NESs 系统为例, 研究了 NESs 在多自由度系统中的优化问题, 并通过试验进行了验证. 结果表明, 采用所提出的优化方法所设计的 NESs, 能在较宽的激励频率下有效减小振动系统的振幅, 可以获得较好的多模态振动抑制效果.

**关 键 词:** 分段线性刚度; 非线性能量阱(NES); 参数优化; 遗传算法; 端点连线拟合

中图分类号: TH 113

文献标志码: A

文章编号: 1005-3026(2019)12-1732-07

## Optimization Method of Nonlinear Energy Sinks with Piecewise Linear Stiffness

YAO Hong-liang, ZHANG Qin, YANG Pei-ran, WEN Bang-chun

(School of Mechanical Engineering & Automation, Northeastern University, Shenyang 110819, China.

Corresponding author: YAO Hong-liang, E-mail: hlyao@mail.neu.edu.cn)

**Abstract:** Based on the nonlinear energy sink (NES) model with piecewise linear stiffness previously proposed by the authors, the optimization problem of the NESs is studied by means of genetic algorithm (GA). Firstly, the NES with piecewise linear stiffness is introduced, and its nonlinear characteristic is analyzed. Then, the spatial dimension of optimum design is reduced by adopting the endpoint connection fitting for cubic polynomial, and the optimization method is presented with mixed binary and real coding. Finally, the optimization of the NESs in multi-degree freedom system is carried out by taking the frame-shear structure - NESs system as an example, and its effectiveness is verified by experiments. The results show that the optimized NESs can effectively suppress vibration at a wider excitation frequency and meanwhile obtain a better multi-modal vibration suppression effect.

**Key words:** piecewise linear stiffness; nonlinear energy sink (NES); parameter optimization; genetic algorithm (GA); endpoint connection fitting

对于结构振动的抑制, 附加吸振器是常用手段之一, 如被动、半主动及主动式吸振器等. 单自由度吸振器仅在“单频”激励下抑振效果显著, 其优化理论的相关研究已相当成熟, 其中“不动点理论”最为经典<sup>[1]</sup>. 对于多模态的主振系, 多个吸振器联合使用是拓宽其抑振频带的有效手段, 如 M-DVA<sup>[2]</sup>. 但相邻模态频率比小时, 解析法将不适用于 M-DVA 的最优设计, 随后基于降次梯

度法<sup>[3]</sup>、摄动法<sup>[4]</sup>的诸多优化设计相继提出. 此外, 半主动式、主动式吸振器尽管宽频抑振效果显著, 但结构复杂、鲁棒性差, 且需提供额外的供能装置.

非线性能量阱(nonlinear energy sink, NES)是利用靶能量传递机制实现快速能量俘获的方法, 具有优越的宽频抑振性能. 针对 NES 宽频抑振机理的研究很多, 如文献[5]指出 NES 能够实

现多共振峰的振动抑制,原因在于其非线性刚度可随振幅产生变化,使其能在任意频率产生共振;文献[6]揭示了 NES 与单自由度系统间的能量转移现象,指明当其添加至多自由度系统时,可能会出现共振俘获联级。

NES 的刚度对其性能影响非常大. 一般来说,结构简单且具有合适非线性刚度的结构最适合于 NES 结构. 国内外学者提出了大量新型结构,如 X 结构<sup>[7]</sup>、永磁负刚度结构<sup>[8]</sup>等. 作者提出的分段线性结构<sup>[9]</sup>,结构简单、能够产生任意非线性力,研究结果证明该结构抑振十分有效。

但是,现无针对具有分段线性刚度的 NES 参数优化的研究,如何获得其更佳的抑振效果仍是需要解决的问题. 因此,本文针对之前提出的分段线性刚度 NES 模型,利用遗传算法研究了 NESs 在多自由度系统中的参数优化问题,并进行了相应的数值分析与试验验证工作,从理论上弥补了目前 NES 参数优化的空白,为解决建筑、航空等领域中非单一频段的振动问题提供了可靠手段。

## 1 分段线性 NES 模型

如图 1a 所示,文中采用的具有分段线性刚度的 NES 主要由板弹簧组合、NES 质量块及固定部分等组成. 板弹簧与 NES 质量块的详细结构如图 1b,图

1c 所示. 其中,板弹簧的分段线性刚度  $k_{ni}$  可表示为

$$k_{ni} = 3EI_i/l_i^3 = Eb_i h_i^3/(4l_i^3) \quad (1)$$

式中: $E$  为弹性模量; $I_i, l_i, b_i, h_i$  分别为各板弹簧惯性矩、有效长度、宽度及厚度。

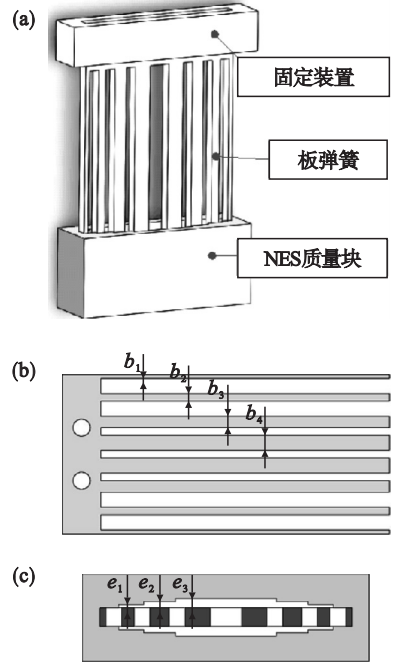


图 1 分段线性刚度的 NES 结构

Fig. 1 Structure of the NES with piecewise linear stiffness

(a) —NES; (b) —板弹簧; (c) —质量块。

如图 2 所示,随振幅增大,板弹簧依次与 NES 质量块接触,其弹性恢复力呈分段线性变化:

$$F(x) = \begin{cases} 2k_{n1}x & (|x| \leq e_1); \\ 2k_{n1}x + 2k_{n2}(|x| - e_1)\text{sgn}(x) & (e_1 < |x| \leq e_2); \\ 2k_{n1}x + 2k_{n2}(|x| - e_1)\text{sgn}(x) + 2k_{n3}(|x| - e_2)\text{sgn}(x) & (e_2 < |x| \leq e_3); \\ 2k_{n1}x + 2k_{n2}(|x| - e_1)\text{sgn}(x) + 2k_{n3}(|x| - e_2)\text{sgn}(x) + 2k_{n4}(|x| - e_3)\text{sgn}(x) & (|x| > e_3). \end{cases} \quad (2)$$

式中: $x$  为 NES 与主振子相对位移; $k_{ni}, e_i$  分别为板弹簧分段刚度及其间隙。

$$c(x) = \begin{cases} 2\xi\sqrt{2k_{n1}m_n} & (|x| \leq e_1); \\ 2\xi\sqrt{2(k_{n1}+k_{n2})m_n} & (e_1 < |x| \leq e_2); \\ 2\xi\sqrt{2(k_{n1}+k_{n2}+k_{n3})m_n} & (e_2 < |x| \leq e_3); \\ 2\xi\sqrt{2(k_{n1}+k_{n2}+k_{n3}+k_{n4})m_n} & (|x| > e_3). \end{cases} \quad (3)$$

式中: $m_n$  为 NES 质量; $\xi$  为板弹簧阻尼比。

## 2 分段线性 NESs 的参数优化方法

遗传算法是基于自然进化机制的智能寻优算法,能实现连续变量与离散变量的混合编码,解决某些多维度的复杂问题,较传统方法具备更优的全局搜索能力,因此本文基于遗传算法进行参数优化。

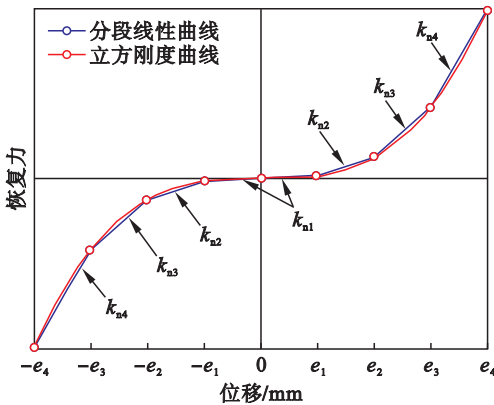


图 2 非线性刚度与分段线性刚度曲线

Fig. 2 Nonlinear and piecewise linear stiffness curve

NES 的阻尼可表示为

2.1 基于端点连线拟合的 NESs 优化方法

NES 质量、分段线性刚度、阻尼比、布局位置等因素均对抑振性能产生重要影响,应作为参数优化问题的设计变量.但是主振系自由度数增加时,常将多个 NES 组合使用进行多模态控制.此时,设计变量的个数将成倍增加,致使设计空间增大,导致耗时长、收敛慢等问题.因此,如何缩减设计空间、提高收敛速度是关键问题.

假设预期非线性刚度为立方多项式  $y = k_n \cdot x^3$ , 则端点连线拟合后的分段线性刚度  $k_{ni}$  可表示为

$$\left. \begin{aligned} k_{n1} &= k_n \cdot e_1^3 / e_1; \\ k_{n2} &= k_n \cdot (e_2^3 - e_1^3) / (e_2 - e_1); \\ k_{n3} &= k_n \cdot (e_3^3 - e_2^3) / (e_3 - e_2); \\ k_{n4} &= k_n \cdot (e_4^3 - e_3^3) / (e_4 - e_3). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

式中:  $k_n$  为立方刚度系数;  $e_i$  为拟合间隙.

因此,优化设计中仅以立方刚度系数作为刚度设计变量,又基于拟合形成的分段线性刚度进行模拟分析、求解适应度值,大大缩减了设计空间维度.

2.2 遗传算法的优化设计

2.2.1 优化数学模型

1) 目标函数.文献[10]指出当振动系统所受载荷为稳态简谐激励时,应将最小化振子的最大振动幅值作为优化目标.故目标函数为

$$\varphi = \sum_{i=1}^N \max_{\omega} [x_i(\omega)] . \quad (5)$$

式中:  $N$  为系统振子数量;  $x_i(\omega)$  为主振子位移,  $\omega$  为频率,其范围为  $0.5\omega_1 \leq \omega \leq 1.2\omega_3$ ,  $\omega_1, \omega_3$  分别为主系统 1, 3 阶共振频率.

2) 设计变量及其约束条件.通常忽略 NESs 的阻尼特性,取 NESs 质量( $m_{n1}, m_{n2}$ )、立方刚度系数( $k_{nNES1}, k_{nNES2}$ )、布局位置( $p_{n1}, p_{n2}$ )为设计变量. NESs 质量限制在主振子质量的 10% 左右较为合理,但限于制造条件其质量不宜过小;考虑到能量转移条件,立方刚度系数的取值范围也需限制.式(6)给出了设计变量的约束条件.

$$\left. \begin{aligned} m_{\min} &\leq m_{ni} \leq m_{\max}; \\ k_{\min} &\leq k_{nNESi} \leq k_{\max}; \\ p_{\min} &\leq p_{ni} \leq p_{\max}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

式中:  $m_{\max}, m_{\min}$  为  $NES_i$  质量的最大、最小值;  $k_{\max}, k_{\min}$  为  $NES_i$  的立方刚度系数最大、最小值;  $p_{\max}, p_{\min}$  为  $NES_i$  安装节点编号(即振子编号)最大、最小值.

2.2.2 优化算法设计

设计变量中,结构参数为连续变量,布局位置

为离散变量.为实现上述两类变量的耦合优化,文中的编码方式采用二进制与实数混合编码,且两者染色体交叉、变异算子均不同.其中,二进制编码使用单点交叉算子与基本位变异算子;实数编码使用算数交叉算子与非均匀变异算子<sup>[11]</sup>.

3 NESs 在多层框剪结构中的优化

3.1 框剪结构 – NESs 动力学建模

现有如图 3a 所示的某不锈钢材质多层框剪结构,本文对该框剪结构 – NESs 系统进行优化研究.

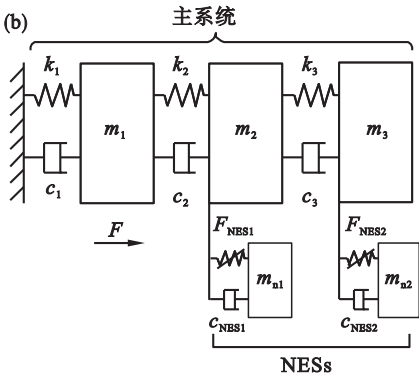
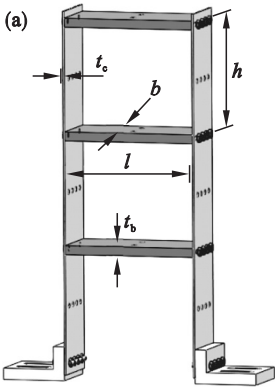


图 3 多自由度 NESs 系统的力学模型  
Fig. 3 Model of multi-DOF NESs system

假设  $NES_1, NES_2$  分别添至框剪结构的 2, 3 层,则简化模型如图 3b 表示,动力学方程如式(7)所示.

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 + c_1 \dot{x}_1 + k_2 (x_1 - x_2) + c_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) &= F \cos \omega t; \\ m_2 \ddot{x}_2 - k_2 (x_1 - x_2) - c_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_3 (x_2 - x_3) + c_3 (\dot{x}_2 - \dot{x}_3) + F_{NES1} + c_{NES1} &= 0; \\ m_3 \ddot{x}_3 - k_3 (x_2 - x_3) - c_3 (\dot{x}_2 - \dot{x}_3) + F_{NES2} + c_{NES2} &= 0; \\ m_{n1} \ddot{x}_4 - F_{NES1} - c_{NES1} &= 0; \\ m_{n2} \ddot{x}_5 - F_{NES2} - c_{NES2} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

式中： $m_i$  分别为主系统各振子质量；侧向剪切刚度  $k_i$  由式(8)得出；阻尼  $c_i$  可通过相关的模态试验获得。

$$k_i = 12EI/h^3 = Eb t_c^3/h^3. \tag{8}$$

式中： $E, I$  分别为立柱弹性模量、惯性矩； $b, t_c, h$  分别为立柱宽度、厚度、层间高度。式(7)中， $m_{nj}$ ， $F_{NESj}$ ， $c_{NESj}$  为  $NES_j$  的质量、弹性力、阻尼力； $F\cos\omega t$  为简谐激励。其中， $F_{NES1}$ ， $c_{NES1}$  可表示为

$$\left. \begin{aligned} F_{NES1} &= F(x_2 - x_4); \\ c_{NES1} &= c(x_2 - x_4) \cdot (\dot{x}_2 - \dot{x}_4). \end{aligned} \right\} \tag{9}$$

式中： $F, c$  的展开式参考式(2)，(3)。  $F_{NES2}$ ， $c_{NES2}$  同理。其他布局，改变  $F_{NESj}$ ， $c_{NESj}$  方程中的叠加位置即可，不作赘述。

3.2 优化结果及其振动特性分析

3.2.1 优化参数

多层框剪结构底端固支，其结构参数： $\rho = 7.93 \text{ g/cm}^{-3}$ ， $l = 115 \text{ mm}$ ， $b = 60 \text{ mm}$ ， $h = 100 \text{ mm}$ ，

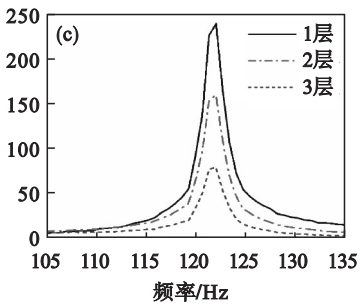
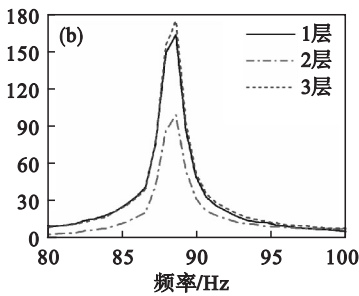
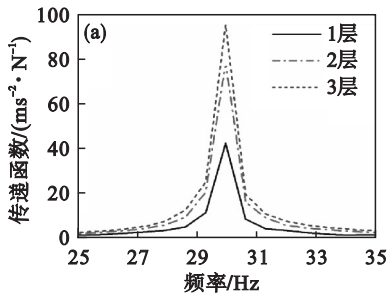


图 4 未附加 NESs 的主系统幅频响应  
Fig. 4 Response of the primary system without NESs  
(a)——一阶共振区；(b)——二阶共振区；(c)——三阶共振区。

3.2.3 附加优化 NESs 系统的振动特性分析

1) 优化结果。在激励频率范围  $(0.5\omega_1 \leq \omega \leq 1.2\omega_3)$  内，遗传算法的相关参数设置如下：种群规模为 40，最大代数 35，交叉概率为 0.7，变异概率为 0.01。

图 5 为 5 次优化计算后的最佳迭代收敛曲线。表 2 给出了所获最佳参数取值。

2) 系统振动特性分析。根据图 6，附加优化后的 NESs 后，系统的前三阶固频分别为 27, 79, 112 Hz。板层 1 的前三阶最大加速度传递率分别为 11.8, 33.7 和 84  $\text{ms}^{-2}/\text{N}$ ，较原系统分别降低 72.6%，79.6% 及 65%；板层 2 的前三阶最大加速度传递率分别为 7.9, 26 和 87  $\text{ms}^{-2}/\text{N}$ ，较原系统分别降低 90%，74% 及 46%；板层 3 的前三阶最大加速度传递率分别为 11.4, 24.4 和 42  $\text{ms}^{-2}/\text{N}$ ，较原系统分别降低 88%，86% 及 47%。其中，三阶共振区抑振率偏低的原因可能在于，主系统

$t_b = 8 \text{ mm}$ ， $t_c = 0.8 \text{ mm}$ ；假设  $NES_1$  各间隙值为 0.25, 0.50, 0.75 mm， $NES_2$  各间隙值为 0.5, 1.0, 1.5 mm；假设主系统阻尼为  $c_i = 0.3 \text{ N}\cdot\text{s}/\text{m}$ ，激励位置为底层钢板，大小为  $2\cos\omega t \text{ N}$ 。NESs 的优化设计变量限制范围如表 1 所示。

表 1 NESs 设计变量优化范围			
Table 1 Optimized range of design variables for NESs			
$m_{ni}/\text{kg}$	$k_{nNES1} \times 10^{-9}$	$k_{nNES2} \times 10^{-9}$	$p_{ni}$
(0.04, 0.07)	(5, 400)	(0.1, 20)	(1, 3)

3.2.2 未附加 NESs 系统的振动特性分析

如图 4 所示，未附加 NESs 时，主系统的前三阶固频分别为 30, 89, 122 Hz。板层 1 的前三阶最大加速度传递率分别为 43, 162 和 237.6  $\text{ms}^{-2}/\text{N}$ ；板层 2 的前三阶最大加速度传递率分别为 78.8, 98.9 和 159.7  $\text{ms}^{-2}/\text{N}$ ；板层 3 的前三阶最大加速度传递率分别为 95.8, 173 和 79.6  $\text{ms}^{-2}/\text{N}$ 。

振动幅值不足致使 NESs 非线性特性变差。

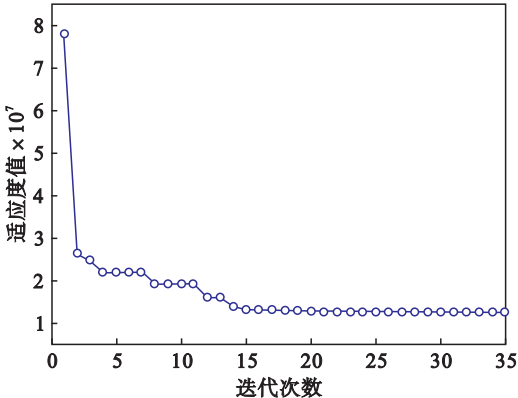


图 5 优化算法迭代过程  
Fig. 5 Iterative process of optimization algorithm

图 7 中，各阶共振区存在 SMR 行为，具体表现为时域曲线的调制响应。频率为 27, 80 Hz 时，主系统可以观察到类似拍振的现象，此时抑振性能较佳。



可见,NES 能够同时抑制多层框剪结构的多个共振峰.相比传统吸振器,减少了附加调谐质量的数量,且表现出了良好的宽频抑振效果.

表 2 最佳 NESs 参数			
Table 2 Optimized parameters of the NESs			
NES <sub>1</sub> 参数	取值	NES <sub>2</sub> 参数	取值
$m_{n1}/\text{kg}$	0.047	$m_{n2}/\text{kg}$	0.065
$p_{n1}$	2	$p_{n2}$	3
$k_{n11}/(\text{N}\cdot\text{m}^{-1})$	$2.13\times 10^3$	$k_{n21}/(\text{N}\cdot\text{m}^{-1})$	$0.71\times 10^3$
$k_{n12}/(\text{N}\cdot\text{m}^{-1})$	$1.49\times 10^3$	$k_{n22}/(\text{N}\cdot\text{m}^{-1})$	$4.97\times 10^3$
$k_{n13}/(\text{N}\cdot\text{m}^{-1})$	$4.05\times 10^3$	$k_{n23}/(\text{N}\cdot\text{m}^{-1})$	$1.35\times 10^3$
$k_{n14}/(\text{N}\cdot\text{m}^{-1})$	$7.89\times 10^3$	$k_{n24}/(\text{N}\cdot\text{m}^{-1})$	$2.63\times 10^3$

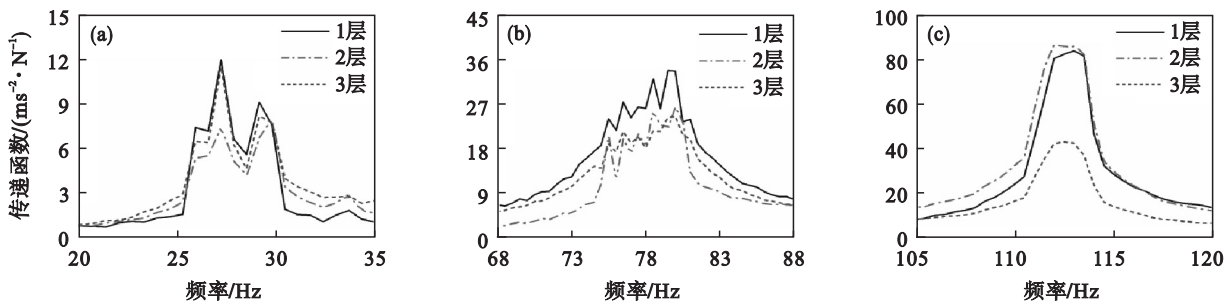


图 6 附加 NESs 的主系统幅频响应  
Fig. 6 Response of the primary system with NESs  
(a)——一阶共振区;(b)——二阶共振区;(c)——三阶共振区.

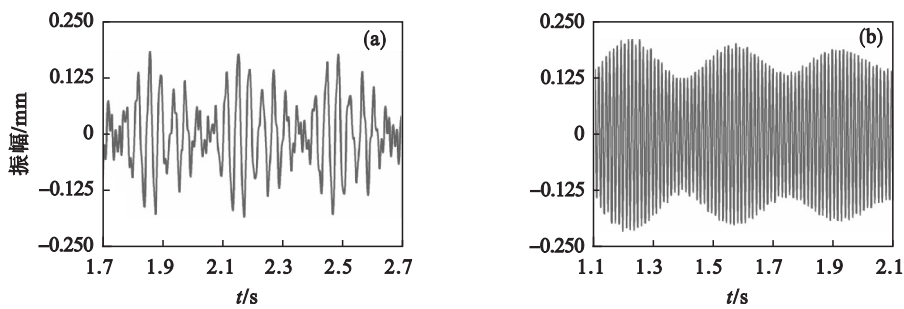


图 7 共振区时域响应  
Fig. 7 Time-domain response in resonance regions  
(a)—27 Hz;(b)—80 Hz.

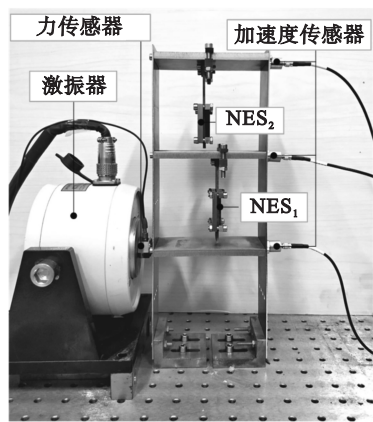


图 8 试验装置照片  
Fig. 8 Picture of the test device

4 试验验证

所设计的试验台结构如图 8 所示.由激振器提供基础简谐激励,通过加速度传感器采集振动波形,力传感器采集激振力信号,系统的频域响应以传递函数的形式给出.

4.1 试验系统振动特性分析

4.1.1 未附加优化 NESs 系统的振动特性分析  
如图 9 所示,无 NESs 的系统的前三阶固频分别为 26,82,115 Hz.板层 1 的前三阶最大加速度传递率分别为 26,101.7 和 127 ms<sup>-2</sup>/N;板层 2 的前三阶最大加速度传递率分别为 56,39.4 和

219 ms<sup>-2</sup>/N;板层 3 的前三阶最大加速度传递率分别为 70,90.8 和 99 ms<sup>-2</sup>/N.

4.1.2 附加优化 NESs 系统的振动特性分析  
将 NES<sub>1</sub>,NES<sub>2</sub>分别附加于框剪结构的第 2,3 层,所测频域响应如图 10 所示.系统的前三阶固频分别为 26,79,115 Hz.板层 1 的前三阶最大加速度传递率分别为 6.3,45.3 和 46.5 ms<sup>-2</sup>/N,抑振率分别达到 76%,55%,63%;板层 2 的前三阶最大加速度传递率分别为 16.8,24 和 76.12 ms<sup>-2</sup>/N,抑振率分别达到 70%,39%,65%;板层 3 的前三阶最大加速度传递率分别为 25.4,42.2 和 22.06 ms<sup>-2</sup>/N,抑振率分别达到 64%,54%,

78% . 如图 11 所示,在 25,77 Hz 时均出现了明显的强调制响应现象.

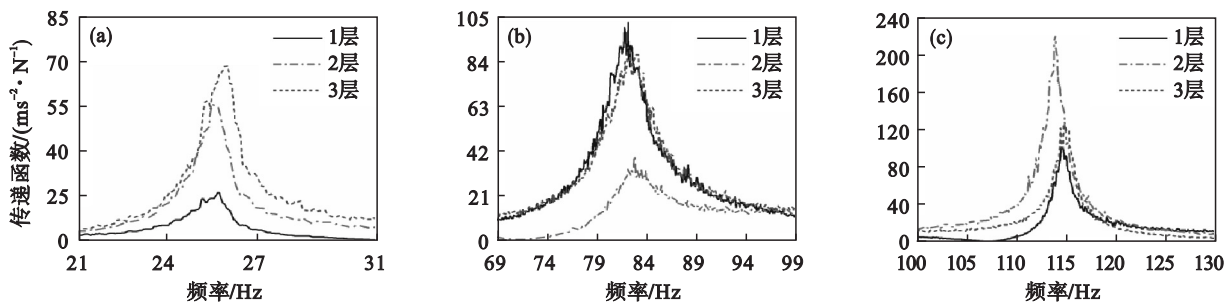


图 9 未附加 NESs 的主系统幅频响应  
Fig. 9 Response of the primary system without NESs  
(a)——一阶共振区; (b)——二阶共振区; (c)——三阶共振区.

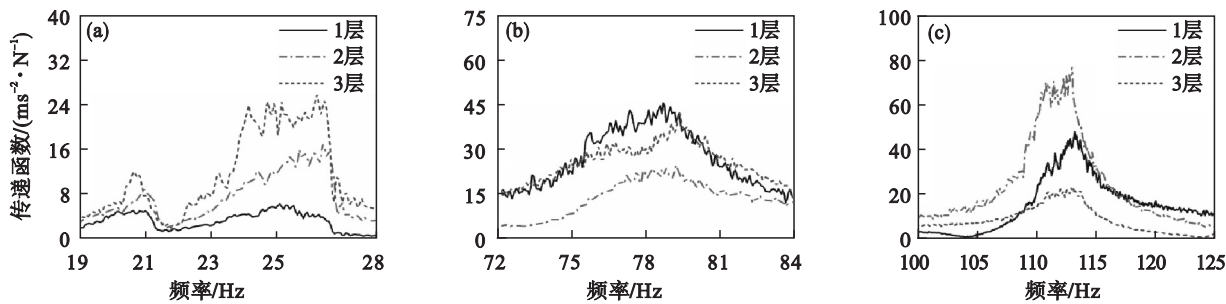


图 10 附加 NESs 的主系统幅频响应  
Fig. 10 Response of the primary system with NESs  
(a)——一阶共振区; (b)——二阶共振区; (c)——三阶共振区.

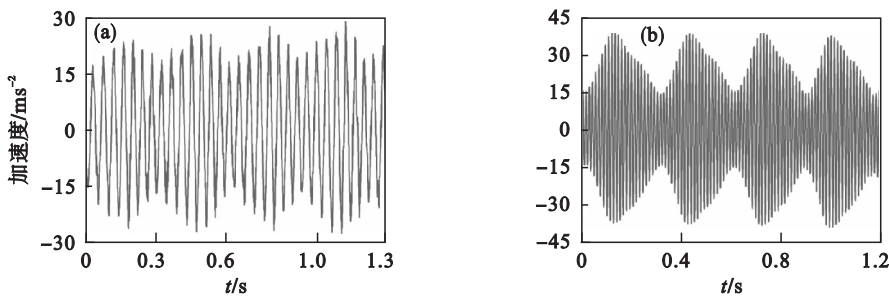


图 11 共振区时域响应  
Fig. 11 Time-domain response in resonance regions  
(a)——25 Hz; (b)——77 Hz.

4.2 试验结果分析

试验结果与数值分析基本吻合,NES 在各阶共振频率处均获得了优异的吸振效果,且在响应趋势上具有良好的一致性.但两者结果在数值上略有差别,如试验结果中二阶固频处的抑振率普遍略低,其误差原因可能是:1) 简化模型时,由于夹具、立柱质量的理想化忽略所导致的简化误差,会引起求解精度下降;仿真模型忽略其他方向振动影响,仅考虑集中质量的水平振动,故模型的准确性受到局限.2) 由于试验系统的阻尼很难精确

测定,因此仿真模型的系统阻尼特性必然引起计算误差.3) 分段线性刚度 NES 的尺寸紧凑,试件加工、试验装夹等过程中均无法避免介入主观的人为误差.

5 结 论

基于所提出的具有分段线性刚度的非线性 NES 结构,采用遗传算法研究了 NESs 在多自由度系统中的参数优化问题,主要结论如下:

- 1) 提出通过端点连线拟合的方法,以非线性刚度系数等效多个分段线性刚度,有效地减小了优化设计空间维度,提高了求解效率.
- 2) 以某三层框剪结构为例,采用实数与二进制混合编码方式解决了分段线性 NESs 在多自由度系统中的优化问题.
- 3) 数值分析结果表明优化后的 NESs 表现出优越的宽频抑振效果,能够有效地抑制多个共振峰,试验验证了针对所提的具有分段线性刚度 NESs 的优化手段的有效性.

参考文献:

[ 1 ] Ormondroyd J, Den Hartog J P. The theory of the dynamic vibration absorber[ J]. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 1928, 50: 9 – 22.

[ 2 ] 刘耀宗, 郁殿龙, 赵宏刚, 等. 被动式动力吸振技术研究进展[ J]. *机械工程学报*, 2007, 43( 3 ): 14 – 21.

( Liu Yao-zong, Yu Dian-long, Zhao Hong-gang, et al. Review of passive dynamic vibration absorbers[ J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2007, 43( 3 ): 14 – 21. )

[ 3 ] Zuo L, Nayfeh S A. Minimax optimization of multi-degree-of-freedom tuned-mass dampers [ J ]. *Journal of Sound & Vibration*, 2004, 272( 3 ): 893 – 908.

[ 4 ] Verdirame J, Nayfeh S. Design of multi-degree-of-freedom tuned-mass dampers based on eigenvalue perturbation[ M]. Reston: American Institute of Aeronautics and Astronautics,

2013.

[ 5 ] Vakakis A F, Gendelman O V, Bergman L A, et al. Nonlinear targeted energy transfer in mechanical and structural systems [ M ]. Dordrecht: Springer Netherlands, 2009.

[ 6 ] McFarland D M, Bergman L A, Vakakis A F. Experimental study of non-linear energy pumping occurring at a single fast frequency [ J ]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2005, 40( 6 ): 891 – 899.

[ 7 ] Wu Z, Jing X, Sun B, et al. A 6DOF passive vibration isolator using X-shape supporting structures[ J]. *Journal of Sound & Vibration*, 2016, 380: 90 – 111.

[ 8 ] Yao H L, Zheng D S, Wen B C. Magnetic nonlinear energy sink for vibration attenuation of unbalanced rotor system[ J]. *Shock and Vibration*, 2017: 4132607.

[ 9 ] Yao H L, Cao Y, Zhang S, et al. A novel energy sink with piecewise linear stiffness[ J]. *Nonlinear Dynamics*, 2018, 94( 3 ): 2265 – 2275.

[ 10 ] Asami T, Nishihara O, Baz A M. Analytical solutions to  $H_{\infty}$  and  $H_2$  optimization of dynamic vibration absorbers attached to damped linear systems [ J ]. *Journal of Vibration and Acoustics*, 2002, 124( 2 ): 284 – 295.

[ 11 ] 田方, 谢里阳, 王洁, 等. 混合编码遗传算法及其在机械设计中的应用[ J]. *组合机床与自动化加工技术*, 2005( 1 ): 32 – 33.

( Tian Fang, Xie Li-yang, Wang Jie, et al. Genetic algorithm with hybrid encoding and its application in machine design [ J ]. *Modular Machine Tool & Automatic Manufacturing Technique*, 2005( 1 ): 32 – 33. )