

doi: 10.12068/j.issn.1005-3026.2019.12.013

# 滚珠丝杠螺母副载荷分布的计算方法

刘 畅<sup>1</sup>, 赵春雨<sup>1</sup>, 韩彦龙<sup>2</sup>, 闻邦椿<sup>1</sup>

(1. 东北大学 机械工程与自动化学院, 辽宁 沈阳 110819; 2. 承德石油高等专科学校, 河北 承德 067000)

**摘 要:** 依据滚珠丝杠螺母副工作过程的变形机制,提出了滚珠与滚道接触载荷仅引起滚道螺旋面整体轴向位置变化的假设,进而推导出滚珠与滚道接触点对应中心的轴向变化关系;依据赫兹接触理论和滚珠与滚道局部接触变形的几何关系,建立了滚珠与滚道接触力的数值计算模型.利用所提出的模型、有限元模型和现有文献模型对二维平面接触问题进行了计算,通过计算结果的对比验证了本文计算方法的准确性和适用性.以某滚珠丝杠螺母副为例,利用数值计算模型进行了计算,分析了滚珠与滚道之间的接触力和接触角随轴向载荷的变化规律.

**关键词:** 滚珠丝杠螺母副;载荷分布;赫兹接触;有限元方法;轴向载荷

中图分类号: TB 121 文献标志码: A 文章编号: 1005-3026(2019)12-1739-05

## Calculation Method for Load Distribution of Ball Screw Nut Pairs

LIU Chang<sup>1</sup>, ZHAO Chun-yu<sup>1</sup>, HAN Yan-long<sup>2</sup>, WEN Bang-chun<sup>1</sup>

(1. School of Mechanical Engineering & Automation, Northeastern University, Shenyang 110819, China; 2. Chengde Petroleum College, Chengde 067000, China. Corresponding author: ZHAO Chun-yu, E-mail: chyzhao@mail.neu.edu.cn)

**Abstract:** It was assumed that the contact loads between the balls and the grooves only cause the overall axial deformation of grooves' helical surfaces based on the deformation mechanism of ball screw nut pairs, and then the axial deformation of the contact points between the balls and the grooves corresponding to the groove centers was deduced. According to the Hertz contact theory and the geometric relationship of the local deformation between the balls and the grooves, a calculation model for contact load was established. The two-dimensional plane contact problem was handled by the proposed model, finite element model and existing model, and the accuracy and feasibility of the proposed model were verified by result comparison. Taking a ball screw as an example, the distribution of contact forces and contact angles between the balls and the grooves with the axial load was analyzed with the proposed model.

**Key words:** ball screw nut pair; load distribution; Hertz contact; finite element method; axial load

滚珠丝杠螺母副是数控机床中回转运动转化为直线运动(反之亦然)常用的传动装置,具有传动效率和刚度、承载能力大的优点.在其工作过程中,滚珠与滚道接触状态是决定其传动性能和使用寿命的关键因素<sup>[1-3]</sup>.但由于其结构的复杂性,很难直接检测滚道内滚珠的力学行为<sup>[3]</sup>.因此,建立其力学模型实现接触状态的精确数值计算对高性能滚珠丝杠螺母副的开发与设计极其重要.

多年来,国内外学者对滚珠丝杠螺母副进行了大量研究工作,分析了滚珠与滚道法向载荷的分布.1976年,Izawa等提出了半导程静力学模型计算滚珠与滚道法向载荷的分布<sup>[4]</sup>.在假设滚珠与滚道连续接触的条件下,Nakashima等提出了计算各滚珠法向载荷分布的方法<sup>[5]</sup>.假设单滚珠与丝杠和螺母滚道接触角相等且加载后不变,Mei等利用相邻滚珠间的丝杠及螺母轴向变形的

收稿日期: 2019-01-07

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(51775094).

作者简介: 刘 畅(1991-),男,辽宁抚顺人,东北大学博士研究生;赵春雨(1963-),男,辽宁黑山人,东北大学教授,博士生导师;闻邦椿(1930-),男,浙江温岭人,东北大学教授,博士生导师,中国科学院院士.

协调关系推导出滚珠法向载荷间的平衡方程,分析了丝杠的几何误差对滚珠法向载荷分布的影响<sup>[3]</sup>.但由于滚珠的滑动效应,系统高速运行时滚珠与丝杠接触角产生较大的差异<sup>[6]</sup>.利用滑动接触模型<sup>[6]</sup>,Xu 等对文献<sup>[3]</sup>的模型进行改进,进而分析滚珠滑移对接触角的影响<sup>[7]</sup>.基于应变相容方程,Zhdanov 等分析了滚珠与滚道接触载荷分布对滚珠丝杠螺母副几何参数的依赖关系<sup>[8]</sup>.以各滚珠等载荷而变接触角假设,Chen 等提出了双螺母丝杠接触刚度的准静态计算方法<sup>[9]</sup>.综合考虑滚珠丝杠螺母副变形行为及其几何误差,Lin 等提出了滚珠载荷分布计算的低阶静力学模型<sup>[10]</sup>.

理论上,当丝杠不受载时,丝杠与螺母滚道螺旋面等间距分布,而各滚珠与滚道以等初始角接触;当受载后,丝杠和螺母滚道相对位置发生改变,且随滚珠位置变化而变化.本文基于此变形机制,提出了一种滚珠丝杠螺母副载荷分布的计算模型,并利用二维结构的有限元计算进行了验证.

## 1 滚珠丝杠螺母副的接触模型

在轴向载荷的作用下,滚珠与螺旋滚道产生了弹性接触变形,接触形式由点接触转变成面接触.根据赫兹接触理论,第  $i$  个滚珠与螺旋滚道之间的接触变形  $\delta_{\zeta i}$  为<sup>[11]</sup>

$$\delta_{\zeta i} = k_{\zeta} Q_{\zeta i}^{2/3}, \zeta = s, n. \quad (1)$$

式中: $\zeta$  为  $s$  和  $n$ , 分别表示滚珠与丝杠和螺母滚道接触; $Q_{\zeta i}$  为接触力; $k_{\zeta}$  为赫兹接触刚度,其表达式:

$$k_{\zeta} = \frac{2K(e_{\zeta})}{\pi a_{\zeta}^*} \left[ \frac{9}{32} \left( \frac{1 - \mu_{\zeta}^2}{E_{\zeta}} + \frac{1 - \mu_b^2}{E_b} \right)^2 \sum \rho_{\zeta} \right]^{1/3}. \quad (2)$$

式中: $2K(e_{\zeta})/\pi a_{\zeta}^*$  为赫兹接触系数; $E_b$  和  $E_{\zeta}$  分别为滚珠和滚道材料的弹性模量; $\mu_b$  和  $\mu_{\zeta}$  分别为滚珠和滚道材料的泊松比; $\sum \rho_{\zeta}$  为滚珠和滚道在接触点处的主曲率之和,其表达式:

$$\sum \rho_{\zeta} = \frac{2}{R_b} - \frac{1}{R_{\zeta}} - \frac{\eta_{\zeta} \cos \alpha_0 \cos \lambda}{R_m + \eta_{\zeta} R_b \cos \alpha_0}, \zeta = s, n. \quad (3)$$

式中: $R_b$  为滚珠半径; $R_{\zeta}$  为滚道圆弧半径; $\alpha_0$  为初始接触角; $\lambda$  为螺旋角; $R_m$  为滚珠丝杠螺母副节圆半径;当  $\zeta = s$  时,  $\eta_s = -1$ ; 当  $\zeta = n$  时,  $\eta_n = 1$ .

## 2 滚珠丝杠螺母副的载荷分布

### 2.1 轴向载荷及轴向变形

滚珠丝杠螺母副在高速运行时滚珠的滑动效

应对接触角产生较大的影响,但在此仅考虑低速运行情况,忽略滚珠与滚道间的摩擦和滑动效应,则在轴向载荷的作用下,第  $i$  个滚珠与丝杠滚道和螺母滚道所产生的接触力和接触角相等<sup>[1,3]</sup>,即  $Q_{si} = Q_{ni} = Q_i, \alpha_{si} = \alpha_{ni} = \alpha_i$ . 对于螺母受压丝杠受拉结构,其轴向力平衡关系如图 1 所示. 轴向载荷  $F_a$  与滚珠和滚道之间的接触力的关系为<sup>[3]</sup>

$$F_a = \sum_{i=1}^Z Q_i \sin \alpha_i \cos \lambda. \quad (4)$$

式中: $Z$  为滚珠的数量; $Q_i \sin \alpha_i \cos \lambda$  为第  $i$  个滚珠接触力的轴向投影.

对于丝杠,第  $(i-1)$  和  $i$  个滚珠与丝杠滚道接触点之间的轴向方向内力记为  $F_{si}$ , 则

$$F_{si} = \sum_{j=i}^Z Q_j \sin \alpha_j \cos \lambda, i = 1, 2, \dots, Z. \quad (5)$$

对于螺母,第  $i$  个和  $(i+1)$  个滚珠与螺母滚道接触点间的轴向内力记为  $F_{ni}$ , 则

$$F_{ni} = \begin{cases} \sum_{j=i+1}^Z Q_j \sin \alpha_j \cos \lambda, & i = 1, 2, \dots, Z-1. \\ 0, & i = Z. \end{cases} \quad (6)$$

在图 1 中, 设将第  $i$  个滚珠与丝杠和螺母滚道接触点分别记为  $Q_{si}$  和  $Q_{ni}$ , 而在不受载时两相邻滚珠与丝杠或螺母接触点之间的轴向距离为  $\Delta L$ , 即

$$\overline{Q_{ni} Q_{n(i+1)}} = \overline{Q_{si} Q_{s(i+1)}} = \Delta L, \quad i = 1, 2, \dots, Z-1. \quad (7)$$

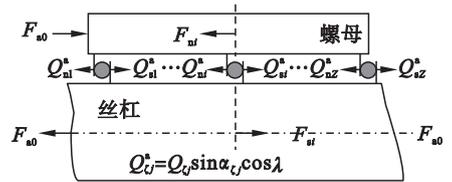


图 1 T-C 结构滚珠丝杠螺母副的静力学模型<sup>[3]</sup>

Fig. 1 Static model of a ball screw nut pair for T-C configuration

滚珠丝杠螺母副的轴线在径向方向所产生的微小变形对接触力的影响较小. 因此假设在其工作过程中轴线不发生挠曲变形, 而滚珠与滚道之间的接触力除了使滚道产生局部变形外, 仅引起丝杠和螺母的轴向变形, 则相邻两滚珠在丝杠和螺母接触点之间段的弹性变形为

$$\Delta_{\zeta i} = \frac{\Delta L F_{\zeta i}}{E_{\zeta} A_{\zeta}}, \zeta = n, s. \quad (8)$$

式中,  $A_{\zeta}$  为丝杠 ( $\zeta = s$ ) 或螺母 ( $\zeta = n$ ) 的等效横截面积.

### 2.2 接触角与轴向变形的关系

当丝杠不受载时, 丝杠与螺母滚道螺旋面等

间距分布,而各滚珠与滚道以等初始角接触,第  $i$  个滚珠中心  $O_{bi}$ ,对应的丝杠和螺母滚道中心  $O_{si}$  和  $O_{ni}$  位置关系如图 2 所示,则  $O_{si}$  和  $O_{ni}$  的距离为

$$A_0 = R_s + R_n - 2R_b. \quad (9)$$

则其轴向和径向距离为

$$\begin{aligned} B_0 &= A_0 \cos \alpha_0, \\ C_0 &= A_0 \sin \alpha_0. \end{aligned} \quad (10)$$

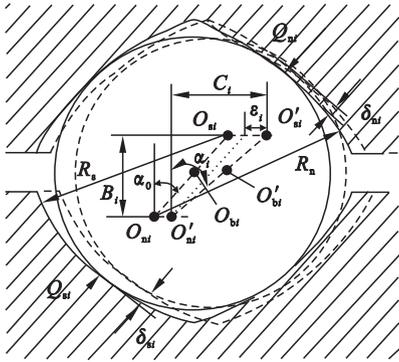


图 2 滚道中心的几何关系

Fig. 2 Geometric relationship of groove centers

当丝杠受载后,滚珠与丝杠和螺母滚道相对位置发生了改变,且随滚珠位置变化而变化.若忽略接触载荷对丝杠和螺母产生的径向变形而引起滚道中心的径向变化,仅考虑轴向变形引起滚道中心的轴向变化,则滚珠中心、丝杠和螺母滚道中心为  $O'_{bi}$ ,  $O'_{si}$  和  $O'_{ni}$ ,如图 2 所示.依据此假设丝杠和螺母滚道中心的径向距离不变,即  $B_i = B_0$ .

对于 T-C 结构的滚珠丝杠螺母副,工作台右行时丝杠受压与螺母受拉,而工作台左行时丝杠和螺母受拉压状态正相反.在此以工作台左行时的丝杠螺母受力状态为例进行分析,如图 1 所示.由于丝杠的伸长和螺母的压缩,很难确定各中心点的绝对位置.但只要确定任意一个滚珠对应滚道中心的相对位置变化,就可以依据式(5),式(6)和图 1 计算出各滚珠与滚道接触点对应中心的轴向变化.不失一般性,在此设第 1 个滚珠与滚道接触点对应中心的变化为  $\varepsilon_1$ ,则根据图 1 的几何关系,可以求得

$$\varepsilon_i = \varepsilon_1 + \sum_{j=2}^i \Delta_{nj} + \sum_{j=2}^i \Delta_{si}, i = 2, 3, \dots, Z. \quad (11)$$

根据图 2 可得接触角的正弦值为

$$\sin \alpha_i = \frac{C_0 + \varepsilon_i}{\sqrt{(C_0 + \varepsilon_i)^2 + B_0^2}}. \quad (12)$$

### 2.3 接触力的非线性方程组

由图 2 几何关系可知:

$$\overline{O'_{si}O'_{ni}} = A_0 + (\delta_{si} + \delta_{ni}), \quad (13)$$

且

$$(\overline{O'_{si}O'_{ni}})^2 = B_0^2 + (C_0 + \varepsilon_i)^2. \quad (14)$$

将式(1)和式(14)代入式(13),整理得

$$\varepsilon_i = \sqrt{[A_0 + (k_s + k_n)Q_i^{2/3}]^2 - B_0^2} - C_0. \quad (15)$$

若将式(15)代入式(12),可得接触角正弦值关于接触力的函数,则由式(5),式(6)和式(8)可得丝杠和螺母各段轴向变形关于滚珠接触力的函数.再将各轴向变形及式(15)代入式(11),可得关于滚珠接触力的  $Z-1$  个方程;另外,将接触角正弦值关于接触力的函数代入式(4),可得接触力的另一个方程.从而得到关于接触力的非线性方程组.利用 Newton-Raphson 数值方法求解得出每个滚珠与滚道之间的接触力和接触角的具体数值.

## 3 数值计算结果

本文选取型号 NSK W3210SS-6ZY-C5Z10 的滚珠丝杠螺母副为例进行分析,相关参数如表 1 所示.

表 1 滚珠丝杠螺母副的相关参数  
Table 1 Relevant parameters of ball screw nut pair

参数	数值
滚珠间距圆直径 $D_m$ /mm	33.75
丝杠的公称直径 $D_s$ /mm	32
螺距 $L_p$ /mm	10
螺母外径 $D_n$ /mm	54
滚珠直径 $D_b$ /mm	6.35
滚道曲率比 $t$	1.12
滚珠圈数	3
滚珠个数 $N_b$	48
泊松比( $\mu_s = \mu_n = \mu_b$ )	0.3
弹性模量( $E_s = E_n = E_b$ )/GPa	210

### 3.1 数值算法的有限元验证及对比

对于滚珠丝杠螺母副的三维有限元计算很难实现.在此以二维平面问题为例对算法进行验证.文献[1]通过二维平面问题实验和有限元计算结果的对比,证明了采用二维平面问题的有限元计算对滚珠丝杠螺母副计算方法验证的有效性.

图 3 为用于验证算法的二维有限元模型.由于上述假设丝杠和螺母的轴线均无径向变形,即结构变形前后均具有轴对称性,所以取其一半进行计算.为模拟本文假设条件,上板上界面和下板下界面的径向位移为固定约束,上板左侧界面为固定约束,代表与工作台连接界面;下板左侧为轴向载荷,表示丝杠驱动力.板厚为 1 mm,滚珠及滚

道半径取表 1 所对应的数值. 在三种轴向载荷作用下, 利用本文提出的数值计算方法与有限元所得结果对比, 如图 4 所示. 由图可见, 两种计算方法所得的各滚珠接触力吻合得比较好, 从而证明了本算法的准确性.

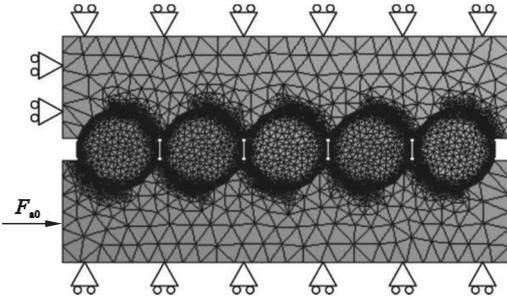


图 3 模型的网格划分和边界条件

Fig. 3 Meshing and boundary conditions of the model

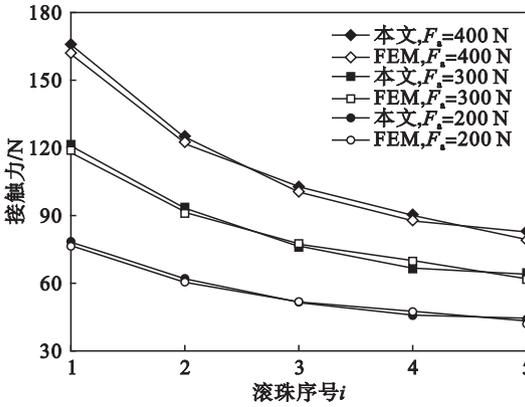


图 4 本文数值方法与有限元方法接触力计算结果的比较  
Fig. 4 Comparison of the contact forces for the numeric method in this paper and FEM

本文的基本假设与文献[1]和[3]相同. 将文献[1]和[3]的算法、有限元方法和本文算法在轴向力为 300 N 时的计算结果进行对比, 如图 5 所示.

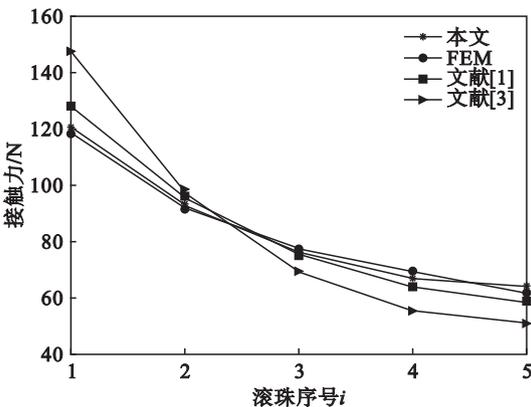


图 5 在 300 N 轴向力作用下二维模型的不同计算方法所得结果对比  
Fig. 5 Result comparisons of the different numeric methods for the two dimensional model with the axial load of 300 N

由图 5 可看出, 本文算法计算结果与有限元计算结果吻合较好, 而有限元的计算结果在文献[1]中进行了试验验证. 几种计算程序所耗时间如表 2 所示.

表 2 计算方法所耗的计算时间

Table 2 Calculation time of the different numeric methods

FEM	文献[1]	文献[3]	本文
1.02/h	46.69/s	48.66/s	45.12/s

注: 所有算法都运行在 Intel(R) Core(TM) i3-4160 CPU @ 3.60 GHz, 4 GB RAM.

### 3.2 接触力和接触角的分布

当轴向载荷分别取 3, 5 和 7 kN 时, 利用本文提出的计算方法对表 1 参数的滚珠丝杠螺母副进行计算, 所得计算结果如图 6 所示.

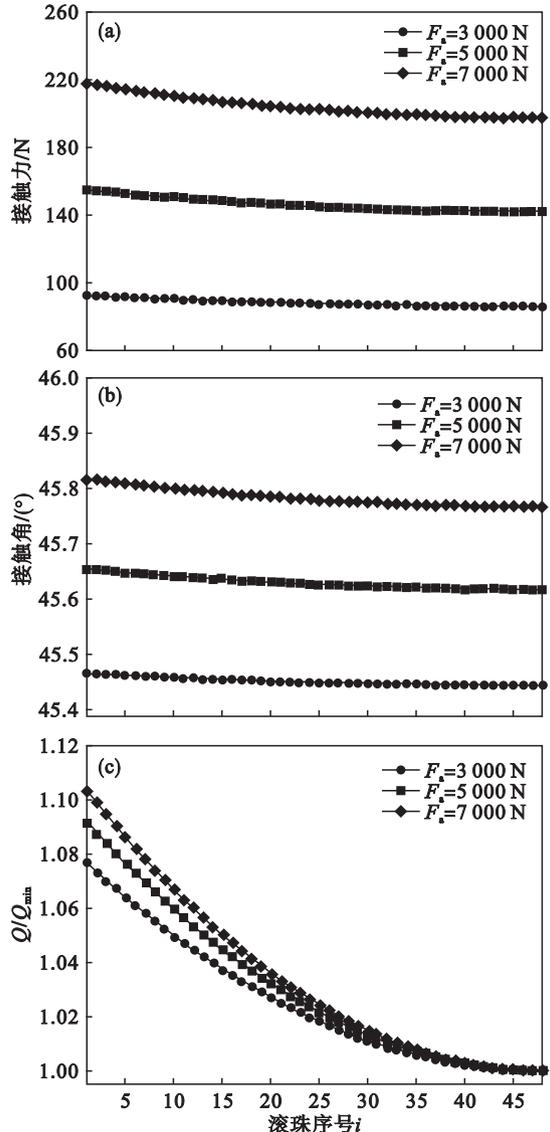


图 6 滚珠丝杠螺母副接触力和接触角的分布  
Fig. 6 Distribution of the contact force and contact angle for the ball screw nut pairs

(a) — 接触力; (b) — 接触角; (c) —  $Q/Q_{min}$ .

随着轴向载荷的增加,接触力和接触角同时增大;靠近承载端的滚珠接触力和接触角均大于另一端,而且随轴向载荷增加,螺母两端滚珠接触力与接触角的差异也增大,如图 6a 和图 6b 所示. 图 6c 为三种轴向载荷作用下滚珠法向载荷与最小载荷之比随滚珠位置的变化,可以明显看出滚珠法向载荷的不均匀性随轴向载荷增加而增大. 但本文模型计算所得法向载荷之比的最大值小于文献[3]和半导程的计算结果,详见文献[3]的图 5. 按照本文计算方法所得结果,各滚珠法向载荷的均匀性增加. 这个结果与图 5 吻合得比较好. 如果按图 5 计算结果推测,本文滚珠法向载荷之比的计算结果应和文献[1]的计算结果相近.

## 4 结 论

本文依据滚珠丝杠螺母副在轴向不受载时的丝杠与螺母滚道螺旋面沿轴向等间距分布,受载后其轴向相对位置发生变化产生接触力的机制,提出了假设:各滚珠与丝杠和螺母的接触力仅产生螺旋滚道截面整体的轴向变形,径向产生局部变形,不影响滚道接触的总径向外位置. 然后,以 T-C 型滚珠丝杠螺母副的轴向载荷和变形机制为例,给出了滚珠与滚道接触点对应中心的轴向变化关系,并依据 Hertz 接触理论和滚珠与滚道的几何关系,推导出滚珠与滚道静态接触力计算的非线性方程组. 通过与二维平面问题的有限元方法、已有文献的数值计算方法的计算结果对比,验证了本文计算方法的准确性和适用性,并对实例进行计算,得出了滚珠与滚道之间的接触力

和接触角的分布.

## 参考文献:

- [1] Bertolaso R, Cheikh M, Barranger Y, et al. Experimental and numerical study of the load distribution in a ball-screw system [J]. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 2014, 28(4):1411-1420.
- [2] Yoshida T, Tozaki Y, Matsumoto S. Study on load distribution and ball motion of ball screw [J]. *Journal of Japanese Society of Tribologists*, 2003, 48(8):659-666.
- [3] Mei X, Tsutsumi M, Tao T, et al. Study on the load distribution of ball screws with errors [J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2003, 38(11):1257-1269.
- [4] Izawa M, Shimoda H. Study on the load distribution in the ball screw (3rd report, in the case of preload ball screw) [J]. *Japan Journal of Precision Machine*, 1976, 42(11):1021-1028.
- [5] Nakashima K, Takafuji K. Stiffness of a ball screw including the deformation of screw, nut and screw thread (1st report, single nut) [J]. *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers*, 1987, 54(505):2181-2187.
- [6] Wei C C, Lin J F. Kinematic analysis of the ball screw mechanism considering variable contact angles and elastic deformations [J]. *ASME Journal of Mechanical Design*, 2003, 125(4):717-733.
- [7] Xu S, Sun Y F, Shen H. Load distribution of ball screw with contact angle variation [J]. *Applied Mechanics and Materials*, 2013, 397/398/399/400:435-440.
- [8] Zhdanov A V, Morozov V V. Theoretical study of the load distribution on the threads for roller screw mechanisms of a friction type [J]. *Procedia Engineering*, 2016, 150:992-999.
- [9] Chen Y, Tang W. Dynamic contact stiffness analysis of a double-nut ball screw based on a quasi-static method [J]. *Mechanism & Machine Theory*, 2014, 73(2):76-90.
- [10] Lin B, Okwudire C E, Wou J S, et al. Low order static load distribution model for ball screw mechanisms including effects of lateral deformation and geometric errors [J]. *ASME Journal of Mechanical Design*, 2018, 140:022301.