

基于 PC – Kriging 模型与主动学习的 齿轮热传递误差可靠性分析

于震梁, 孙志礼, 曹汝男, 张毅博
(东北大学 机械工程与自动化学院, 辽宁 沈阳 110819)

摘 要: 为提高齿轮热传递误差可靠性分析的计算效率和精度,提出了一种高效的基于 PC – Kriging 代理模型与主动学习函数 LIF 相结合的可靠性分析方法. 采用多项式混沌展开 (polynomial-chaos-expansion, PCE) 替代传统 Kriging 模型的回归基函数来增强预测模型的全局近似精度,并利用 Kriging 模型来捕捉预测模型局部特征的能力. 采用最小角回归 (LAR) 构建回归基函数的最优多项式数量集,同时用 Akaike 信息准则 (AIC) 来确定最优的截断集合. 并采用一种主动学习函数 LIF 选择每次迭代的最佳样本点以提高模型收敛效率. 通过齿轮热传递误差算例表明:与传统的 Kriging 代理模型相比,所提出方法在保证精度的同时可以极大地减少预测模型可靠性分析中的学习次数.

关 键 词: 可靠性分析;PC – Kriging 模型;主动学习函数;蒙特卡罗;齿轮热传递误差
中图分类号: TB 114.3 **文献标志码:** A **文章编号:** 1005 – 3026(2019)12 – 1750 – 05

Reliability Analysis of Gear Heat Transfer Error Based on PC-Kriging Model and Active Learning

YU Zhen-liang, SUN Zhi-li, CAO Ru-nan, ZHANG Yi-bo
(School of Mechanical Engineering & Automation, Northeastern University, Shenyang 110819, China.
Corresponding author: YU Zhen-liang, E-mail: yuzhenliang_neu@163.com)

Abstract: To improve the computational efficiency and accuracy in the reliability analysis of gear heat transfer error, an efficient reliability analysis method combining PC-Kriging and active learning function LIF is proposed. Polynomial-chaos-expansion (PCE) is adopted to replace the regression basis function of the traditional Kriging model to enhance its global approximation accuracy and its ability to capture local features. The least-angle regression (LAR) is used to construct the optimal polynomial quantity set of the regression basis function, and the Akaike information criterion (AIC) is utilized to determine the optimal truncated set. Furthermore, the active learning function LIF is employed to select the optimal sample during each iteration to improve the convergence efficiency of the PC-Kriging model. The application to gear heat transfer error shows that compared with the traditional Kriging model, the proposed method can significantly reduce the number of performance function evaluations while ensuring accuracy in the reliability analysis.

Key words: reliability analysis; PC-Kriging model; active learning function; Monte Carlo; gear heat transfer error

齿轮作为最主要的传动机构已被广泛地应用在航天航空、船舶、汽车、机械制造等领域. 高速重载工况下的齿轮,齿面间的相对滑动将产生大量摩擦热,受热后的轮齿变形将会引起齿轮的热传递误差,从而导致齿轮振动加剧、噪声变强、加速磨损以及缩短寿命. 因此,对齿轮受热后的传递误差精度的可靠性研究是具有工程实际意义的.

在评估具有高度非线性和隐式功能函数的机

械结构可靠性问题时,传统的一阶矩(FORM)、二阶矩(SORM)和 Monte Carlo(MCS)模拟仿真很难应用于工程实际中^[1]. 为此,基于响应面法^[2]、神经网络^[3]、支持向量机^[4]、Kriging^[5-6]等代理模型的可靠性分析方法越来越受到关注. 由于经典响应面法是基于多项式的回归模型,其结果往往易受到多项式函数形式及样本点选择的影响,从而抑制了该方法对极限状态的拟合精度. 为此,Isukapalli 等^[7]提出了一种基于多项式混沌展开(polynomial chaos expansion, PCE)的随机响应面法. 同时,基于 Kriging 代理模型的结构可靠性分析技术也日趋成熟,但其基函数往往采用常数项作为回归部分,而由文献[8]可知在 S_{DoE} 较少时,基函数阶次越高 Kriging 模型越精确. 然而,随着 x 的维数和多项式阶次的增加,基函数的项数也急剧增加,这使得 Kriging 模型在高阶的可靠性分析中(如立方)难以计算. 随后,Schoebi 等^[9]提出了一种新的结合 PCE 和 Kriging 的代理模型,即多项式混沌展开的 Kriging 代理模型(polynomial-chaos-based Kriging, PC - Kriging),并通过 6 种基准分析函数对 PC - Kriging 模型进行了验证,结果表明:PC - Kriging 的数值精度要比 PCE 或 Kriging 的要好. 此外,诸多学者还提出了若干主动学习函数^[5],如 U, EFF, LIF 等,旨在在尽可能少地调用功能函数,提高结构可靠性分析效率.

据作者所知,国内外对 PC - Kriging 模型的研究较少,且尚未发现其在机械结构可靠性分析中的相关研究工作,同时为提高复杂结构可靠性分析的计算效率与计算精度,本文提出一种 PC - Kriging 代理模型与主动学习函数 LIF 相结合的结构可靠性分析方法(APCK - LIF),并将其应用在齿轮的热传递误差精度的可靠性分析中,来说明所提方法的高效性和适用性.

1 PC - Kriging 模型

Kriging 代理模型假设真实功能函数由两部分组成,即回归模型和随机函数.

$$G(\mathbf{x}) = \sum_{h=1}^p \beta_h g_h(\mathbf{x}) + z(\mathbf{x}) = \mathbf{g}^T(\mathbf{x})\boldsymbol{\beta} + z(\mathbf{x}). \quad (1)$$

其中: $g_h(\mathbf{x})$ ($h = 1, 2, \dots, p$) 表示回归的基函数; $z(\mathbf{x})$ 为高斯随机过程. 本文对 Kriging 模型回归基函数作如下改进:

假设输入随机变量 \mathbf{x} 服从多元标准正态分布,且各分量是独立的. 令 $\pi_j^{(m)} (j = 1, 2, \dots)$ 表示

完备的 Hilbert 空间 $L^2(\mathbf{R}, f_{x_i})$ 标准正交基,且为 f_{x_i} 的一个标准正交函数系列 $\pi_j^{(m)} (j = 1, 2, \dots)$.

$$\int \pi_k^{(m)}(x) \pi_j^{(m)}(x) f_{x_i}(x) dx = \begin{cases} 0, & k \neq j; \\ 1, & k = j. \end{cases} \quad (2)$$

其中 f_{x_i} 是 x_i (x_i 为 x 的第 i 个分量) 的概率密度函数.

一个完备的 Hilbert 空间 $L^2(\mathbf{R}, f)$ 的标准正交基(f 表示 \mathbf{x} 的联合概率密度函数)是

$$\psi_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{x}) = \prod_{m=1}^M \pi_{\alpha_m}^{(m)}(x_m).$$

其中 $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_M]$ 是一个自然数的 M 维向量. 这里,满足总项数 $|\boldsymbol{\alpha}| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_M$ 不超过给定阈值 T_0 的项将被保留作为 Kriging 模型基函数的候选项. 基函数的候选项 A^{M, T_0} 可表示为

$$A^{M, T_0} = \{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{N}^M, |\boldsymbol{\alpha}| \leq T_0\}, \quad (3)$$

A^{M, T_0} 中项数可由 P 表示.

$$P = \text{card}(A^{M, T_0}) = \binom{M + T_0}{T_0}. \quad (4)$$

然后,考虑基函数的所有候选项的“完备”设计矩阵是

$$\mathbf{G}^{M, T_0} = [\psi_{\alpha_0}, \psi_{\alpha_1}, \dots, \psi_{\alpha_{P-1}}].$$

$$\boldsymbol{\psi}_{\alpha_i} = [\psi_{\alpha_i}(x_1), \psi_{\alpha_i}(x_2), \dots, \psi_{\alpha_i}(x_N)]^T.$$

其中: $\alpha_i \in A$ ($i = 0, 1, \dots, P - 1$); $x_n \in S_{\text{DoE}}$ ($n = 1, 2, \dots, N$).

由式(3),如果使用 A^{M, T_0} 中的所有项作为 Kriging 模型的基函数,那么对调用功能函数的次数会随着 T_0 的增多而急剧增加. 为了克服这个问题,在构建稀疏多项式基函数时,在 A^{M, T_0} 中仅有一部分项是被保留下来的. LAR^[10]被用来提供功能函数的可能的多项式基函数集的数量,同时 AIC^[11]用来决定哪个是最优的. Kriging 基函数的选择步骤如下:

步骤 1 设置相关参数值,即保留多项式 T_0 的最大阶次和基函数 p_{\max} 的最多项数. 本文设 $T_0 = 3, p_{\max} = 0.5 \text{ card}(S_{\text{DoE}})$.

$$H = \min\{P, p_{\max}\}.$$

步骤 2 初始化所有候选项中的系数 $a_{\alpha_i} = 0$ ($i = 0, 1, \dots, P - 1$). 根据 LAR 理论,初始化后的剩余项等于结构响应 Y .

步骤 3 找出 $\boldsymbol{\psi}_{\alpha_i}$ ($i = 0, 1, \dots, P - 1$) 与当前残差之间的相关系数最大的向量 $\boldsymbol{\psi}_{\alpha_{i^*}}$.

$$\mathbf{G}_1 = \boldsymbol{\psi}_{\alpha_{i^*}}.$$

步骤 4 $h = 2$, 调整 $a_{\alpha_{i^*}}$ 在 \mathbf{G}_1 上当前残差的最小二乘系数的方向,直到另一个向量 $\boldsymbol{\psi}_{\alpha_{i^*2}}$ 与 \mathbf{G}_1 具有相同的相关系数.

$$\mathbf{G}_h = [\mathbf{G}_1, \boldsymbol{\psi}_{\alpha'_2}], \mathbf{a} = [a_{\alpha'_1}, a_{\alpha'_2}] .$$

步骤 5 $h = h + 1$, 共同移动 \mathbf{a} 朝向当前残差为 \mathbf{G}_{h-1} 的联合最小二乘系数, 直到向量 $\boldsymbol{\psi}_{\alpha_h}$ 与当前残差 \mathbf{G}_{h-1} 具有相同的相关系数.

$$\mathbf{G}_h = [\mathbf{G}_{h-1}, \boldsymbol{\psi}_{\alpha'_h}], \mathbf{a} = [a_{\alpha'_1}, a_{\alpha'_2}, \dots, a_{\alpha'_h}] .$$

步骤 6 重复步骤 5, 直到满足 $h = H$.

步骤 7 计算 $\mathbf{G}_h (h = 1, \dots, H)$ 的 AIC 值:

$$\text{AIC}_h = N \ln(\text{SSE}_h) + 2h .$$

$$\text{其中 } \text{SSE}_h = [\mathbf{G}_h (\mathbf{G}_h^T \mathbf{G}_h)^{-1} \mathbf{G}_h^T \mathbf{Y} - \mathbf{Y}]^T$$

$$[\mathbf{G}_h (\mathbf{G}_h^T \mathbf{G}_h)^{-1} \mathbf{G}_h^T \mathbf{Y} - \mathbf{Y}] .$$

步骤 8 找到最小的 $\text{AIC}_h (h = 1, \dots, H)$.

$$p = \arg \min_h \{ \text{AIC}_h; h = 1, \dots, H \} .$$

然后, 对于 \mathbf{S}_{DoE} 和 \mathbf{Y} , Kriging 模型的最优基函数为

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = [\boldsymbol{\psi}_{\alpha'_1}(\mathbf{x}), \boldsymbol{\psi}_{\alpha'_2}(\mathbf{x}), \dots, \boldsymbol{\psi}_{\alpha'_p}(\mathbf{x})]^T .$$

2 本文所提方法

本文构造了一种主动学习的 PC-Kriging 模型的结构可靠性分析方法, 采用所提出的 APCK-LIF 模型方法来迭代改进 PC-Kriging 模型, 直到其精度满足停止准则.

步骤 1 $t = 0$, 采用拉丁超立方抽样 (LHS) 获得初始 DoE 点, 并调用真实的功能函数计算对应的功能函数值. LHS 的超矩形是 $[-n_\sigma, n_\sigma]^M$, 最初的点数为 N_0 , 本文设置 $n_\sigma = 5$.

$$\mathbf{S}_{\text{DoE}} = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{N_0}] ,$$

$$\mathbf{Y} = [y_1, y_2, \dots, y_{N_0}]^T .$$

步骤 2 基于 polynomial-chaos-Kriging 构造 PC-Kriging 模型 $\hat{G}_t(\mathbf{x})$ 和 $\sigma_G^2(\mathbf{x})$, 并计算失效概率的估计 $\hat{P}_{f,t}$, 相应的变异系数及精度.

$$\hat{P}_{f,t} = \frac{1}{N_{\text{MC},t}} \sum_{i=1}^{N_{\text{MC},t}} I_{\hat{G}_t < 0}(\mathbf{x}_{\text{MC},i}) , \quad (5)$$

$$\delta_{\text{MC}} = \frac{\sqrt{\text{var}(\hat{P}_f)}}{\hat{P}_f} = \frac{\sqrt{1 - \hat{P}_f}}{\sqrt{N_{\text{MC}} \hat{P}_f}} \approx \frac{1}{\sqrt{N_{\text{MC}} \hat{P}_f}} ,$$

$$\varepsilon_{\hat{P}_f} = \frac{\hat{P}_f - \hat{P}_f^{\text{MCS}}}{\hat{P}_f^{\text{MCS}}} .$$

$$\text{式中, } \hat{P}_f^{\text{MCS}} = \frac{1}{N_{\text{MC},t}} \sum_{i=1}^{N_{\text{MC},t}} I_{G < 0}(\mathbf{x}_{\text{MC},i}) .$$

步骤 3 判断学习过程是否收敛. 根据式 (5), 可以得到失效概率估计值 $\hat{P}_{f,t}$ 相对真实值 P_f 的绝对误差期望为

$$E_t = \frac{1}{N_{\text{MC}}} \sum_{i=1}^{N_{\text{MC}}} \Phi(-U_t(\mathbf{x}_{\text{MC},i})) . \quad (6)$$

其中, $\Phi(-U_t(\mathbf{x}_{\text{MC},i}))$ 表示 $\mathbf{x}_{\text{MC},i}$ 对应的响应值

$\hat{G}_t(\mathbf{x}_{\text{MC},i})$ 与真实值 $G_t(\mathbf{x}_{\text{MC},i})$ 符号相反的概率.

从而得到停止条件:

$$e_t = E_t / \hat{P}_{f,t} \leq [e_e] . \quad (7)$$

如果符合停止条件, 执行步骤 5, 否则, 执行步骤 4.

步骤 4 $t = t + 1$, 选取最佳样本点. 引入文献

[5] 的学习函数 LIF(\mathbf{x}):

$$\text{LIF}(\mathbf{x}) = \Phi(-U_G(\mathbf{x})) f(\mathbf{x}) E(|G^M(\mathbf{x})|) . \quad (8)$$

其中,

$$E(|G^M(\mathbf{x})|) =$$

$$\begin{cases} u_G^M(\mathbf{x}) + \sum_{m=1}^{M/2} C_M^{2m} u_G^{M-2m}(\mathbf{x}) \sigma_G^{2m}(\mathbf{x}) (2m-1)!! , \\ M \text{ 为偶数;} \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{m=0}^M C_M^m u_G^{M-m}(\mathbf{x}) \sigma_G^m(\mathbf{x}) \int_{\frac{u_G(\mathbf{x})}{\sigma_G(\mathbf{x})}}^{+\infty} t^m \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt , \\ M \text{ 为奇数.} \end{cases}$$

根据式 (8) 选取 LIF(\mathbf{x}) 最大值的点作为最佳样本点, 并计算其功能函数值, 更新当前的 DoE 和 \mathbf{Y} , 然后返回到步骤 2.

步骤 5 判断迭代过程是否停止. 如果 $\delta_{\text{MC}} \leq 0.03$, 输出失效概率, 否则扩大 MCS 样本数, 返回步骤 2. 具体流程如图 1 所示.

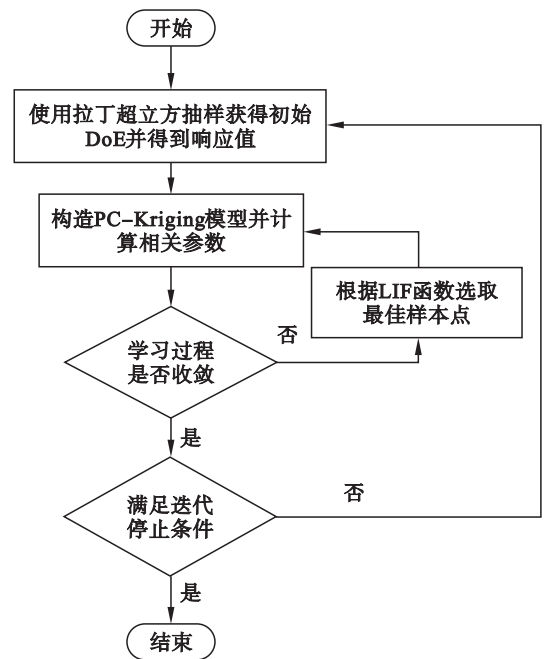


图 1 主动学习 PC-Kriging 方法流程图

Fig. 1 Flowchart of active learning PC-Kriging

3 齿轮热传递误差可靠性分析

齿轮传递误差主要包括轮齿受载荷作用产生

的弹性变形和齿轮在加工制造及装配过程中产生的误差^[12]. 本文研究重点为考虑温度和载荷共同作用下的弹性变形对齿轮传递误差的可靠性分析, 齿轮模型为渐开线直齿轮, 转矩为 140 N·m, 转速为 9 280 r/min. 相关参数如表 1 所示.

表 1 齿轮的基本参数

Table 1 Basic parameters of gears		
基本参数	主动齿轮	从动齿轮
模数/mm	3	3
齿数	24	38
压力角/(°)	25	25
齿宽/mm	15	14.5
齿顶高系数	1	1
顶隙系数	0.25	0.25
变位系数	0	0

3.1 极限状态函数的建立

假设齿轮模数、齿宽、压力角、线膨胀系数以及弹性模量为随机变量, 且各随机变量均服从正态分布, 其均值与方差分布形式如表 2 所示.

表 2 随机变量参数

Table 2 Random variable parameters			
变量	分布	均值	标准差
模数/mm	Normal	3	0.2
齿宽/mm	Normal	14.5	0.2
压力角/(°)	Normal	25	0.3
线膨胀系数/℃ ⁻¹	Normal	10.36 × 10 ⁻⁶	0.5 × 10 ⁻⁶
弹性模量/Pa	Normal	2.1 × 10 ¹¹	2.1 × 10 ¹⁰

采用 ANSYS 有限元分析软件以从动轮某一单齿为研究对象进行热分析, 再采用载荷传递法对齿轮进行热变形的耦合分析, 提取齿轮副的热变形量, 绘制齿轮副的非渐开线误差曲线.

轮齿综合变形情况如图 2 所示, 内侧虚线是

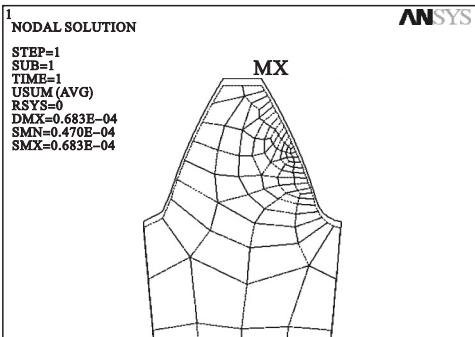


图 2 从动轮某一单齿综合变形

Fig. 2 Comprehensive deformation of single tooth driven wheel

理论齿廓线, 外侧实线是变形后的实际齿廓线. 可以看出齿轮工作部分变形随着半径的增大而增大, 变形最大的地方均出现在齿顶处.

使用 MATLAB 从 ANSYS 结果中读取最大变形量 Δy , 将齿轮实际传递误差的波动范围超过极限值作为齿轮传递误差失效的准则, 齿轮传递误差状态函数可以表示为

$$G(\boldsymbol{x}) = |y| - \Delta y. \tag{9}$$

式中: $|y| = 0.05 \text{ mm}$; $\Delta y = y_{\max} - y_{\min}$; y_{\max}, y_{\min} 是实际传递误差 y 在传动过程中的最大值和最小值; $|y|$ 是齿轮实际传递误差波动范围的极限阈值, 当 $y = \Delta y$ 时, $G(\boldsymbol{x}) > 0$, 齿轮处于安全状态, 当 $y \leq \Delta y$ 时, $G(\boldsymbol{x}) \leq 0$, 则齿轮处于失效状态.

3.2 热传递误差可靠度计算与分析

根据所提可靠性分析方法流程进行 MATLAB 编程, 首先使用拉丁超立方选取 25 的点作为初始样本点, 并使用 ANSYS 仿真得到其对应的最大变形量. 根据随机变量和响应值建立初始的 PC - Kriging 模型, 用学习函数 LIF 选择最优点加入到样本空间中, 调用 ANSYS 仿真求得响应值, 更新 PC - Kriging 模型. 这样再经过 194 次调用 ANSYS 仿真后达到规定精度.

用 Monte Carlo 方法抽样 100 000 次计算的结果作为计算标准, 分别用 AK - MCS + U, AK - SSIS + U 和本文提出的算法计算齿轮热传递误差可靠性. 表 3 将不同的方法进行比较.

表 3 不同方法结果

Table 3 Results of different methods			
方法	N_{call}	\hat{P}_f	$\varepsilon/\%$
MCS	10 ⁵	0.0181	—
AK - MCS + U	25 + 306	0.0179	-1.10
AK - SSIS + U	25 + 331	0.0185	2.21
本文方法	25 + 194	0.0180	-0.55

通过表 3 可知, 本文提出的方法需要调用 ANSYS 仿真软件的次数最少, 节约了大量计算时间, 且本文提出的方法计算精度较高.

4 结 论

1) 本文提出了一种新的改进 Kriging 基函数与主动学习函数相结合的可靠性分析方法, 采用 Polynomial - Chaos - Expansion 作为 Kriging 模型的基函数对原始 Kriging 模型作改进, 使得 PC - Kriging 方法在基函数回归方面具有更大的灵活性.

2) 通过对齿轮热状态传递误差可靠性分析可知,所提方法相对于 AK - MCS + U 和 AK - SSIS + U 方法将迭代次数从 300 余次降至 194 次,同时精度提升到 -0.55%,具有更快的效率以及更高的精度。

3) 对齿轮系统可靠性分析表明,所提方法亦适用于求解功能函数为隐式的多维非线性问题,为解决实际工程中的可靠性问题提供了重要的参考。

参考文献:

- [1] Zhao Y G, Ono T. A general procedure for first/second-order reliability method (FORM/SORM) [J]. *Structural Safety*, 1999, 21(2): 95 - 112.
- [2] Xiong F, Liu Y, Ying X. A double weighted stochastic response surface method for reliability analysis [J]. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 2012, 26(8): 2573 - 2580.
- [3] Schueremans L, Gemert D V. Benefit of splines and neural networks in simulation based structural reliability analysis [J]. *Structural Safety*, 2005, 27(3): 246 - 261.
- [4] Alibrandi U, Alani A M, Ricciardi G. A new sampling strategy for SVM-based response surface for structural reliability analysis [J]. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2015, 41: 1 - 12.
- [5] Sun Z L, Wang J, Li R, et al. LIF: A new Kriging based learning function and its application to structural reliability analysis [J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2017, 157: 152 - 165.
- [6] 刘阔, 李晓雷, 王健. 一种基于 Kriging 模型的机械结构可靠性分析方法 [J]. 东北大学学报(自然科学版), 2017, 38(7): 1002 - 1006.
(Liu Kuo, Li Xiao-lei, Wang Jian. An analysis method of mechanical structural reliability based on the Kriging model [J]. *Journal of Northeastern University (Natural Science)*, 2017, 38(7): 1002 - 1006.)
- [7] Isukapalli S S, Roy A, Georgopoulos P G. Stochastic response surface methods (SRSMs) for uncertainty propagation: application to environmental and biological systems [J]. *Risk Analysis*, 1998, 18(3): 351 - 363.
- [8] Gaspar B, Teixeira A P, Soares C G. Assessment of the efficiency of Kriging surrogate models for structural reliability analysis [J]. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2014, 37: 24 - 34.
- [9] Schoebi R, Sudret B, Wiart J. Polynomial-chaos-based-Kriging [J]. *International Journal for Uncertainty Quantifications*, 2015, 5(2): 171 - 193.
- [10] Efron B, Hastie T, Johnstone I, et al. Least angle regression [J]. *Annals of Statistics*, 2004, 32(2): 407 - 451.
- [11] Arnold T W. Uninformative parameters and model selection using Akaike's information criterion [J]. *Journal of Wildlife Management*, 2010, 74(6): 1175 - 1178.
- [12] Velez P, Chapron M, Fakhfakh H, et al. On transmission errors and profile modifications minimising dynamic tooth loads in multi-mesh gears [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2016, 379: 28 - 52.