

基于 Newmark- β 法的非线性体系动载荷识别

范玉川^{1,2}, 黄清云³, 鲁艳², 赵春雨¹

(1. 东北大学 机械工程与自动化学院, 辽宁 沈阳 110819; 2. 潍柴动力股份有限公司, 山东 潍坊 261001;
3. 香港城市大学 工学院, 香港 999077)

摘 要: 基于 Newmark- β 数值仿真方法, 对于刚度变化的单自由度非线性体系, 采用修正的 Newton-Raphson 迭代方法最小化由切线刚度代替变化刚度代入的误差, 推导出非线性体系在已知外部激励、体系特性下的动力响应迭代求解过程, 并反向推导出在已知动力响应、体系特性下动载荷的反求迭代求解过程. 通过算例分析验证了应用该修正迭代方法进行非线性体系的载荷识别是可行的, 克服了无迭代方法的误差累积缺点.

关 键 词: Newmark- β 法; Newton-Raphson 迭代; 非线性; 载荷识别; 误差累积

中图分类号: O 326 **文献标志码:** A **文章编号:** 1005-3026(2019)12-1755-05

Dynamic Load Identification of a Nonlinear System Based on Newmark- β Method

FAN Yu-chuan^{1,2}, HUANG Qing-yun³, LU Yan², ZHAO Chun-yu¹

(1. School of Mechanical Engineering & Automation, Northeastern University, Shenyang 110819, China;
2. Weichai Power Company Limited, Weifang 261001, China; 3. College of Engineering, City University of Hong Kong, Hong Kong 999077, China. Corresponding author: ZHAO Chun-yu, E-mail: chyzhao@mail.neu.edu.cn)

Abstract: Based on the Newmark- β numerical simulation method, a modified Newton-Raphson iteration method is used to minimize the substitution error of tangent stiffness for variable stiffness for a single-degree-of-freedom nonlinear system. Then, the iterative solution process of dynamic response of the nonlinear system under the known external excitation and system characteristics is deduced, and the inverse iterative solution process of dynamic load under the known dynamic response and system characteristics is deduced. A numerical example shows that the modified iteration method is feasible for load identification of nonlinear systems and overcomes the shortcoming of error accumulation without the iteration method.

Key words: Newmark- β ; Newton-Raphson iteration; nonlinearity; load identification; error accumulation

动载荷辨识在机械动力结构可靠性分析、故障诊断和健康监测等许多工程研究中发挥着重要作用. 当前, 动态载荷识别主要包括两种方法: 频域法^[1-3]和时域法^[4]. 频域动载荷识别的研究起步较早, 理论也较为成熟. 频域法根据传递函数矩阵与系统响应谱的关系确定动力谱, 或在模态坐标变换后计算频域内模态力的动力特性^[5]. 时域法是基于载荷与响应之间的复卷积关系进行反分析, 直接在时间域中检索动态载荷的时间历程. 时

域方法不需要傅立叶变换, 结果直观, 近年来对时域方法的研究也有很大的发展. Fan 等^[6]基于 Wilson- θ 数值算法提出了一种改进的动载荷识别算法, 取得了良好的识别效果. Liu 等^[7]提出了一种新的时域动态伽辽金法(TDM), 利用形状函数逼近动态载荷、核函数响应和实测结构响应三个参数, 然后以形状函数为加权函数建立了前向模型 TDGM. Qiao 等^[8]提出了动载荷识别的稀疏算法, 对冲击载荷有较好的识别效果. 徐婧等^[9]

基于 Newmark- β 数值方法提出了一种动载荷识别迭代算法,取得了较高的识别精度.然而,少学者对非线性体系的动载荷识别理论进行研究.

本文基于 Newmark- β 数值方法,采用修正的 Newton-Raphson 迭代方法使由切线刚度代替变化刚度代入的误差最小化,推导出非线性体系动载荷反求迭代过程,消除了无迭代方法的误差及其逐步累积.

1 基于 Newmark- β 法的动力响应求解

由 Newmark- β 时间步进法^[10],在时间间隔 $[t_i, t_{i+1}]$ 内基于下面的公式:

$$\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + [(1-\gamma)\Delta t]\ddot{u}_i + (\gamma\Delta t)\ddot{u}_{i+1}, \quad (1a)$$

$$u_{i+1} = u_i + (\Delta t)\dot{u}_i + [(0.5-\beta)(\Delta t)^2]\ddot{u}_i + [\beta(\Delta t)^2]\ddot{u}_{i+1}. \quad (1b)$$

式中: $\beta=1/4$; $\gamma=1/2$.

为了方便地扩展到非线性体系,使用增量

$$\left. \begin{aligned} \Delta u_i &= u_{i+1} - u_i, \\ \Delta \dot{u}_i &= \dot{u}_{i+1} - \dot{u}_i, \\ \Delta \ddot{u}_i &= \ddot{u}_{i+1} - \ddot{u}_i. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$\Delta p_i = p_{i+1} - p_i. \quad (3)$$

式(1)可以重新写为

$$\Delta \dot{u}_i = (\Delta t)\ddot{u}_i + (\gamma\Delta t)\Delta \ddot{u}_i, \quad (4a)$$

$$\Delta u_i = (\Delta t)\dot{u}_i + \frac{(\Delta t)^2}{2}\ddot{u}_i + \beta(\Delta t)^2\Delta \ddot{u}_i. \quad (4b)$$

由式(4b)可得

$$\Delta \ddot{u}_i = \frac{1}{\beta(\Delta t)^2}\Delta u_i - \frac{1}{\beta(\Delta t)}\dot{u}_i - \frac{1}{2\beta}\ddot{u}_i. \quad (5)$$

在式(4a)中代入式(5),可得

$$\Delta \dot{u}_i = \frac{\gamma}{\beta(\Delta t)}\Delta u_i - \frac{\gamma}{\beta}\dot{u}_i + \Delta t\left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right)\ddot{u}_i. \quad (6)$$

对任一非弹性系统,在 i 时刻满足运动方程

$$m\ddot{u}_i + c\dot{u}_i + (f_s)_i = p_i. \quad (7)$$

式中: m 和 c 分别是体系的质量和阻尼; p_i 是外力; $(f_s)_i$ 是 i 时刻的抗力; u_i , \dot{u}_i 和 \ddot{u}_i 分别是体系的位移、速度和加速度. 同时在 $i+1$ 时刻满足

$$m\ddot{u}_{i+1} + c\dot{u}_{i+1} + (f_s)_{i+1} = p_{i+1}. \quad (8)$$

对于非线性体系,由式(7)和式(8)之差给出增量平衡方程:

$$m\Delta \ddot{u}_i + c\Delta \dot{u}_i + (\Delta f_s)_i = \Delta p_i. \quad (9)$$

在非线性体系中,增量抗力为

$$(\Delta f_s)_i \approx (k_i)_T \Delta u_i. \quad (10)$$

其中, $(k_i)_T$ 为切线刚度,去掉下标 T ,然后代入式(9)中可得

$$m\Delta \ddot{u}_i + c\Delta \dot{u}_i + k_i \Delta u_i = \Delta p_i. \quad (11)$$

与线性体系相比,非线性反应分析要求出每个时间步开始时的切线刚度 k_i .

将式(5)和式(6)代入式(11),可得

$$\hat{k}_i \Delta u_i = \Delta \hat{p}_i. \quad (12)$$

其中:

$$\Delta \hat{p}_i = \Delta p_i + \left(\frac{1}{\beta \Delta t} m + \frac{\gamma}{\beta} c \right) \dot{u}_i + \left[\frac{1}{2\beta} m + \Delta t \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) c \right] \ddot{u}_i; \quad (13)$$

$$\hat{k}_i = k_i + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} c + \frac{1}{\beta (\Delta t)^2} m. \quad (14)$$

在刚度不变或者变化不大的线性体系中,

$$\hat{k}_i = \hat{k} = k + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} c + \frac{1}{\beta (\Delta t)^2} m. \quad (15)$$

由式(16)可得增量位移:

$$\Delta u_i = \frac{\Delta \hat{p}_i}{\hat{k}_i}. \quad (16)$$

又由式(6)和式(5)可得 $\Delta \dot{u}_i$ 和 $\Delta \ddot{u}_i$, 则由式(2)可得 u_{i+1} , \dot{u}_{i+1} 和 \ddot{u}_{i+1} .

然而,在每个时间步内用切线刚度来代替变化的刚度,会产生一定误差.如图 1 中的力-变形关系所示,在时间步开始时刻的位移为图示的 a 点,在 a 点使用切线刚度,从时刻 i 到时刻 $i+1$ 的数值积分导出位移 u_{i+1} ,标识为点 b .如果能沿着正确的曲线,那么结果会是 b' 点对应的位移.这个偏差经过一系列时间步的累积,会引入非常大的误差.这些误差可用一种修正的 Newton-Raphson 迭代方法使其最小化.

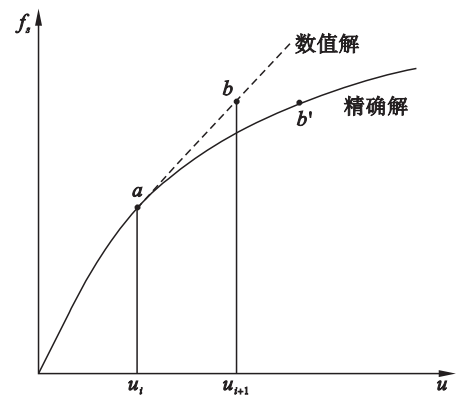


图 1 非线性体系无迭代求解

Fig. 1 Non iterative solution of nonlinear systems

图 2 详细叙述了该迭代方法. 第一个迭代步是将式(12)应用于上述过程,有

$$\hat{k}_i \Delta u^{(1)} = \Delta \hat{p}. \quad (17)$$

确定 $\Delta u^{(1)}$ (相应于图 1 中的 b 点), 作为最终 Δu (相应于图 1 中的 b' 点) 的第一次近似值. 与 $\Delta u^{(1)}$ 相关的真实力是 $\Delta f^{(1)}$, 它比 $\Delta \hat{p}$ 小, 定义

残余力为 $\Delta R^{(2)} = \Delta \hat{p} - \Delta f^{(1)}$. 这个残余的力所引起的附加位移 $\Delta u^{(2)}$ 由下式确定：

$$\hat{k}_i \Delta u^{(2)} = \Delta R^{(2)} = \Delta \hat{p} - \Delta f^{(1)}. \quad (18)$$

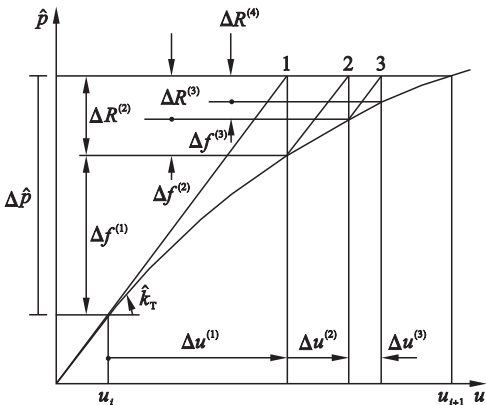


图 2 非线性体系一个时间步内的迭代
Fig. 2 Iteration in a time step for nonlinear systems

使用这个附加位移,以寻找残余力的新值,继续这个过程直到达到收敛为止. 这个从 i 到 $i + 1$ 的时间步内的迭代过程称为修正的 Newton - Raphson 法,如图 3 所示.

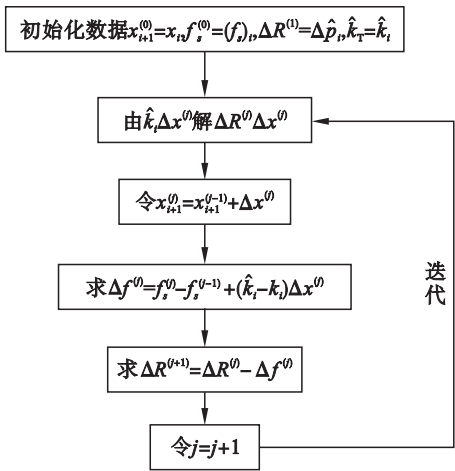


图 3 修正的 Newton - Raphson 迭代流程图
Fig. 3 Flow chart for modified Newton-Raphson iteration

其中,在静力分析中, $\Delta f^{(j)} = f_s^{(j)} - f_s^{(j-1)}$, 剩余的项来自于体系的动力学,如式(14)中含有 c 和 m 的项所反映的,可将其表达为 $(\hat{k}_i - k_i)$.

在 l 次迭代后,当增量位移 $\Delta u^{(l)}$ 与当前求出的值 $\Delta u = \sum_{j=1}^l \Delta u^{(j)}$ 相比变得足够小,即

$$\frac{\Delta u^{(l)}}{\Delta u} \leq \varepsilon, \quad (19)$$

迭代过程结束,于是从 i 到 $i + 1$ 时间步内的位移增量为

$$\Delta u_i = \sum_{j=1}^l \Delta u^{(j)}. \quad (20)$$

这是一个 Δu_i 的相对精确值,代替无迭代获得的

值,而无迭代的值与一次迭代后获得的 $\Delta u^{(1)}$ 相同.

已知 Δu_i 后,开始时间步求解过程,如图 4 所示.

原始的 Newton - Raphson 法比上面描述的修正迭代过程收敛得更快,代价是附加的计算. 在每次迭代中,用切线刚度 $k_i^{(j)}$ 代替 k_i ,可获得对收敛性的改进,用较少的迭代次数即可收敛. 然而,它需要在每次迭代时求切线刚度,涉及附加的计算,对于多自由度体系这种附加的计算可能是大量的. 因此采用修正的 Newton - Raphson 迭代方法能减小计算量.

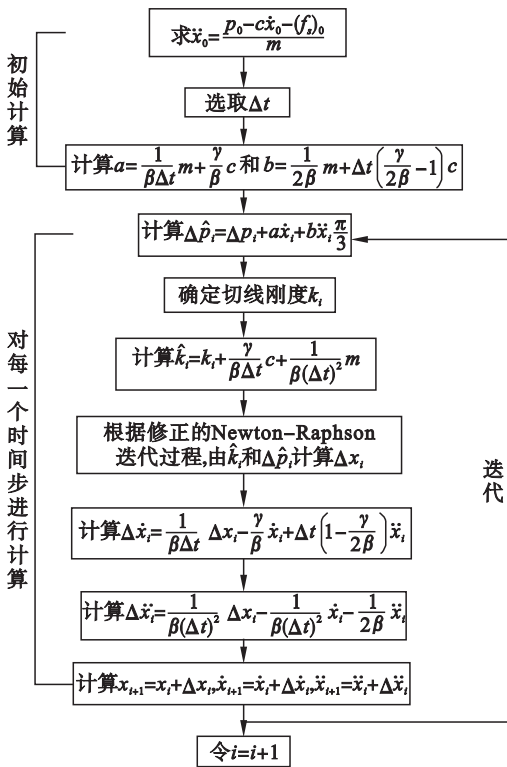


图 4 非线性系统 Newmark - β 法求解流程图
Fig. 4 Flow chart for solving the nonlinear system based on Newmark- β method

2 基于 Newmark - β 法的载荷识别

根据上述动力反应求解过程,由外力时间历程和体系特性参数,可求得非线性体系的位移、速度和加速度时间历程. 这是正向求解过程.

若已知非线性体系特性参数和体系位移时间历程,现推导非线性体系外力时间历程的反求过程:

选定时间步长 Δt ,由体系的特性 m, k_i 和 c , 算法参数 γ 和 β ,根据已知体系位移时间历程 u_i 由式(2)可得其增量形式 Δu_i .

由式(6)和式(5)进一步计算可得 $\Delta \dot{u}_i$ 和 $\Delta \ddot{u}_i$.

由式(14)可得 \hat{k}_i .

现选定一无限小量 ε , 确定一增量位移 $\Delta u^{(1)}$, 使得与 Δu 相比足够小, 即满足式(19).

由第 l 次迭代的增量位移 $\Delta u^{(l)}$ 确定第 l 次迭代的残余力为

$$\Delta R^{(l)} = \hat{k}_T \Delta u^{(l)}. \quad (21)$$

设第 $l-1$ 次迭代的增量位移 $\Delta u^{(l-1)}$, 则由增量位移确定迭代前的位移为

$$u_{i+1}^{(l-1)} = u_{i+1} - \Delta u^{(l)}, \quad (22)$$

$$u_{i+1}^{(l-2)} = u_{i+1}^{(l-1)} - \Delta u^{(l-1)}. \quad (23)$$

由 $u_{i+1}^{(l-1)}$ 和 $u_{i+1}^{(l-2)}$ 可分别确定 $f_s^{(l-1)}$ 和 $f_s^{(l-2)}$, 则根据修正的 Newton - Raphson 迭代过程计算可得 $\Delta f^{(l-1)}$ 为

$$\Delta f^{(l-1)} = f_s^{(l-1)} - f_s^{(l-2)} + \frac{a}{\Delta t} \Delta u^{(l-1)}. \quad (24)$$

由图 3 中的 $\Delta R^{(j+1)} = \Delta R^{(j)} - \Delta f^{(j)}$ 可得

$$\Delta R^{(l)} = \Delta R^{(l-1)} - \Delta f^{(l-1)}. \quad (25)$$

由图 3 中的 $\hat{k}_i \Delta x^{(j)} = \Delta R^{(j)}$ 可得

$$\Delta R^{(l-1)} = \hat{k}_T \Delta u^{(l-1)}. \quad (26)$$

将式(21), 式(24)和式(26)代入式(25)可得

$$\hat{k}_T \Delta u^{(l)} = \hat{k}_T \Delta u^{(l-1)} - \left[f_s^{(l-1)} - f_s^{(l-2)} + \frac{a}{\Delta t} \Delta u^{(l-1)} \right]. \quad (27)$$

上式中, 只有一个未知数 $\Delta u^{(l-1)}$, 因此可解得其值, 再由式(26)进一步求得 $\Delta R^{(l-1)}$.

以此类推, 一直迭代下去. 依次可求得 $\Delta u^{(l-2)}$, $\Delta u^{(l-3)}$, $\Delta u^{(l-4)}$, \dots 及 $\Delta R^{(l-2)}$, $\Delta R^{(l-3)}$, $\Delta R^{(l-4)}$ \dots

直至经过 m 次迭代, 所有增量位移的和无限接近 Δu_i 时迭代结束, 即满足

$$1 - \frac{\sum_{j=0}^m \Delta u^{(l-j)}}{\Delta u_i} \leq \varepsilon. \quad (28)$$

此时解得的 $\Delta R^{(l-m)}$, 即为采用迭代法求解得到的 $\Delta \hat{p}$.

由图 4 中的 $\Delta \hat{p}_i = \Delta p_i + a \dot{x}_i + b \ddot{x}_i$ 可得

$$\Delta p_i = \Delta \hat{p}_i - a \dot{u}_i - b \ddot{u}_i. \quad (29)$$

则由式(3)可得

$$p_{i+1} = p_i + \Delta p_i. \quad (30)$$

由上述迭代过程, 可依次求得体系外载荷时间历程.

3 算 例

现有一单自由度系统, 各个系统参数为: 质量

为 0.25 kg, 阻尼 0.15. 并且系统均为零初始条件. 由于该系统具有材料非线性, 其恢复力与变形关系如图 5 所示.

其非线性弹性力与变形关系式可以表示为

$$f_x = 2x + x^2. \quad (31)$$

已知该系统在施加一个动载荷

$$F = 10 \sin(\pi t / 0.6)$$

作用下前 1.5 s 的系统响应 $x(t)$, 现采用上述方法识别该动载荷.

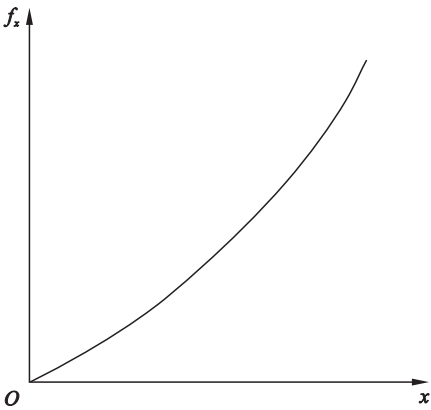


图 5 恢复力 - 变形关系
Fig. 5 Relation of restoring force and deformation

选取时间步长 Δt 为 0.1 s, 选取 Newmark - β 法中的计算参数 $\beta = 1/4$, $\gamma = 1/2$, 并进行初始计算:

$$\begin{aligned} m &= 0.25, k_0 = 2, c = 0.15, \\ x_0 &= 0, \dot{x}_0 = 0, \ddot{x}_0 = 0, \\ p_0 &= m\ddot{x}_0 + c\dot{x}_0 + k_0 x_0 = 0, \\ a &= \frac{4}{\Delta t} m + 2c = 10.3, \\ b &= 2m = 0.5. \end{aligned} \quad (32)$$

代入非线性系统动载荷识别迭代算法中, 可依次求得前 1.5 s 的载荷时间历程, 同时与采用无迭代方法求解得到的载荷识别结果进行比较, 如图 6 所示.

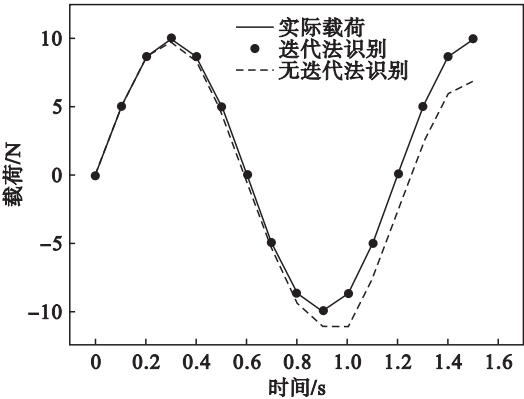


图 6 非线性系统载荷时间历程识别结果比较
Fig. 6 Comparison of load time history identification results for nonlinear systems

由图 6 结果分析可知,在刚度发生变化的非线性系统中,基于 Newmark- β 逐步积分法,采用修正的 Newton-Raphson 方法迭代求解所得动载荷识别结果比无迭代方法求解得到的动载荷识别结果更加接近实际作用载荷,消除了无迭代方法载荷识别的误差累积,具有更好的识别效果和更小的识别误差.

4 结 论

- 1) 本文基于 Newmark- β 数值仿真方法,在刚度变化的非线性体系中,利用修正的 Newton-Raphson 迭代方法使由切线刚度代替变化刚度带来的误差最小化,推导出在已知外部激励、体系特性下的动力响应迭代求解过程,在减小计算量的同时,增加了数值求解精度.
- 2) 基于动力反应正向求解过程,反向推导出在已知动力响应、体系特性下动载荷的反求迭代求解过程. 通过算例验证,该方法具有可行性,相比于无迭代的方法,本文基于 Newmark- β 法采用的修正 Newton-Raphson 迭代方法得到的识别结果更加接近实际动载荷,克服了无迭代方法的误差累积缺点.

参考文献:

[1] Lage Y E, Maia N M M, Neves M M, et al. Force

identification using the concept of displacement transmissibility[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2013, 332(7): 1674 - 1686.

[2] Ma C, Hua H X, Xiao F. The identification of external forces for a nonlinear vibration system in frequency domain[J]. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 2014, 228(9): 1531 - 1539.

[3] O'Brien E J, McGettrick P J, Gonzalez A. A drive-by inspection system via vehicle moving force identification[J]. *Smart Structures and Systems*, 2014, 13(5): 821 - 848.

[4] Law S S, Zhu X Q. Moving load identification problems and applications[J]. *Current Opinion in Infectious Diseases*, 2007, 20(1): 3 - 10.

[5] Ewins D J. Modal testing: theory, practice and application [M]. 2nd ed. Baldock: Research Studies Press, 2000.

[6] Fan Y C, Zhao C Y, Yu H Y. Research on dynamic load identification based on explicit Wilson- θ and improved regularization algorithm [J]. *Shock and Vibration*, 2019, 2019: 8756546.

[7] Liu J, Meng X, Jiang X, et al. Time-domain Galerkin method for dynamic load identification[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2016, 105(8): 620 - 640.

[8] Qiao B J, Zhang X, Wang C, et al. Sparse regularization for force identification using dictionaries[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2016, 368: 71 - 86.

[9] 徐菁, 张方, 姜金辉, 等. 运用数值迭代的动载荷识别算法[J]. *振动工程学报*, 2014(5): 702 - 707.
(Xu Jing, Zhang Fang, Jiang Jin-hui, et al. Dynamic load identification algorithm based on numerical iteration [J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2014(5): 702 - 707.)

[10] Chopra A K, Naeim F. Dynamics of structures—theory and applications to earthquake engineering [J]. *Earthquake Spectra*, 2001, 17(3): 549 - 550.