

doi: 10.12068/j.issn.1005-3026.2019.12.023

# 基于 $q$ 指数贴现函数的反按揭支付偏好研究

陆 阳, 王 健, 庄新田  
(东北大学 工商管理学院, 辽宁 沈阳 110169)

**摘 要:** 为研究人们对反按揭支付方式的偏好特征, 分别建立基于指数函数和  $q$  指数函数的反按揭模型并求解. 根据模型按照本金递减、本金不变和本金递增的还款方式设计三种反按揭合同并进行满意度调查, 三种还款方式按指数函数估值相同, 按  $q$  指数函数估值不同. 对调查结果进行 Kruskal-Wallis 非参数检验发现: 三种方式中, 人们最偏好本金递增的还款方式, 其次是本金不变, 最后是本金递减的还款方式. 结论显示金融企业可在不提高利率的情况下通过改变支付方式提高客户对反按揭的满意度.

**关 键 词:**  $q$  指数函数; 跨期决策; 反按揭; 经济物理学; 反按揭

**中图分类号:** F 830      **文献标志码:** A      **文章编号:** 1005-3026(2019)12-1796-04

## Research on Payment Preferences for Reverse Mortgage Based on $q$ -Exponential Discount Function

LU Yang, WANG Jian, ZHUANG Xin-tian

(School of Business Administration, Northeastern University, Shenyang 110169, China. Corresponding author: LU Yang, E-mail: ylu@mail.neu.edu.cn)

**Abstract:** In order to examine the payment preferences for reverse mortgage, the reverse mortgage models were established based on the exponential discount and  $q$ -exponential discount function, whose general solutions were obtained. Then, three reverse mortgages were designed with three different repayment plans (falling, constant, and rising). A satisfaction survey of the mortgage plans was conducted, and it was found that the values of the mortgages are the same using the exponential discount function but are different using the  $q$ -exponential discount function. The results showed that the rising profile is better evaluated than the other two options, and the falling profile is less evaluated than the other two. This indicates that financial institutions can improve their clients' satisfaction of reverse mortgage without any interest rate hike by changing payment preferences.

**Key words:**  $q$ -exponential function; intertemporal decision making; reverse mortgage; econophysics; reverse mortgage

经济物理学相关研究发现人们在进行跨期决策时需要将远期收入进行贴现<sup>[1-4]</sup>. 经典经济理论认为人们是理性决策者, 故其时间偏好不会变化, 即用指数函数以一个固定贴现率进行估值. 然而, 众多实证研究发现人们的心理贴现率并非常数, 瞬时贴现率随时间递减,  $q$  指数贴现函数是拟合度最高的贴现函数<sup>[5-14]</sup>.

跨期决策领域的研究进展对研究借贷决策有

明显意义. 实证研究发现人们在借贷决策时存在非理性借贷行为<sup>[15-18]</sup>, 这是由于人们在面临多时间维度借贷决策时会放弃计算总成本而仅通过该贷款的主要特征进行决策<sup>[17]</sup>. 由于金融企业使用指数函数估值, 而客户使用  $q$  指数函数估值, 故对于金融企业成本相同的贷款在其客户眼中有不同价值. 近期研究认为债务的偿还可视为一系列随时间变化的付款, 故可使用跨期决策理论解释借

收稿日期: 2019-03-12

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(71571038); 辽宁省自然科学基金资助项目(20180550441); 中央高校基本科研业务费专项资金资助项目(N180604006).

作者简介: 陆 阳(1978-), 男, 辽宁沈阳人, 东北大学讲师, 博士; 王 健(1980-), 女, 河北唐山人, 东北大学教授; 庄新田(1956-), 男, 吉林四平人, 东北大学教授, 博士生导师.

贷决策<sup>[15,18]</sup>. 该领域研究进展为提高反按揭的民众参与意愿提供了新思路. 反按揭是解决中国老龄化问题的重要补充途径, 但近年民众参与意愿低. 本文依托跨期选择理论, 尝试在不改变金融企业利率, 不提高其成本前提下, 根据  $q$  指数函数设计多种还款方式的反按揭合同, 观察人们满意度差异, 找出满意度最高的还款方式.

本文介绍考虑还款方式的反按揭基本模型及通解, 并基于  $q$  指数函数提出研究假说; 设计三种反按揭合同并进行满意度调查; 分析调查结果验证研究假说.

## 1 还本方式不同的反按揭模型

### 1.1 基于指数函数的模型及通解

反按揭俗称以房养老, 即与普通住房按揭贷款相反, 金融企业定期向住户支付本金和利息, 直至偿还等于房产现值的全部本金后取得房屋产权. 令总本金(房屋现值)为  $M$ , 反按揭利率为  $r$ , 令各年支付的本金为

$$A_n = A + (n-1)d. \quad (1)$$

其中:  $A$  为第一年支付本金; 常数  $d$  为邻近两年的本金偿还数之差. 每年的总支付额  $a_n$  为当年的本金  $A_n$  加利息  $R_n$ :

$$a_n = A_n + R_n. \quad (2)$$

其中利息等于剩余本金乘利率, 即

$$R_n = (M - \sum A_n)r. \quad (3)$$

将式(1), 式(3)代入式(2)可得

$$a_n = A + (n-1)d + (M - \sum_1^{n-1} A_n)r, \quad (4)$$

$$a_{n-1} = A + (n-2)d + (M - \sum_1^{n-1} A_n + A_{n-1})r. \quad (5)$$

比较式(4), (5)易知  $a_n = a_{n-1} + d - A_{n-1}r$ . 注意到,  $a_n - a_{n-1} = d - A_{n-1}r$ ,  $a_{n-1} - a_{n-2} = d - A_{n-2}r$ , 相减后有  $(a_n - a_{n-1}) - (a_{n-1} - a_{n-2}) = (d - A_{n-1}r) - (d - A_{n-2}r) = -dr$ .

因此  $a_n$  为二阶等差数列, 其通解为

$$a_n = a_1 + (n-1)(a_2 - a_1) + \frac{(n-1)(n-2)}{2} \times (-dr) = -\frac{dr}{2}n^2 + (d - Ar + \frac{3}{2}dr)n + A + Mr + Ar - d - dr. \quad (6)$$

代入式(3)得到利息通解为

$$R_n = (M - (n-1)A - \frac{(n-1)(n-2)}{2}d)r. \quad (7)$$

根据日常习惯, 反按揭被设计为按月支付并以等额本息原则令同一年 12 个月的月收入相同, 即将年支付款  $a_n$  平均分摊到月, 每月收到的月供  $MP_n$  为

$$MP_n = \frac{a_n}{(1+r)} \left[ \frac{\bar{r}(1+\bar{r})^n}{(1+\bar{r})^n - 1} \right]. \quad (8)$$

其中  $\bar{r} = r/12$  为月利率. 注意到  $a_n$  是年末数, 式(8)表示  $a_n$  在年初的现值  $a_n/(1+r)$  等于各月  $MP$  在年初的现值之和, 故年末数  $a_n$  和月末数  $MP_n$  分别使用年利率  $r$  和月利率  $\bar{r}$ .

### 1.2 基于 $q$ 指数函数的分析

$q$  指数函数是非广延热力学中常用的一种变形代数, 最早由 Tsallis 提出, 因此也被称为 Tsallis 统计量<sup>[14]</sup>. Cajueiro 首次将  $q$  指数函数引入跨期选择问题, 并定义  $q$  指数函数的倒数为  $q$  指数贴现函数<sup>[8]</sup>, 按  $q$  指数函数贴现则  $a_n$  的现值为

$$F(a_n) = \frac{a_n}{[1 + (1-q)nr_q]^{1/(1-q)}}. \quad (9)$$

反按揭合同现值  $M$  为

$$V(M) = \sum_1^n \frac{a_n}{[1 + (1-q)nr_q]^{1/(1-q)}}. \quad (10)$$

其中:  $V(M)$  为人们基于  $q$  指数函数的主观贴现值, 常数  $q$  和  $r_q$  为  $q$  指数函数的参数, 注意到使用指数贴现函数时,  $a_n$  现值为  $a_n/(1+r)$ , 所以对于同一款反按揭, 客户与金融企业估值不同. 易知, 当  $q \rightarrow 1$ ,  $q$  指数函数变为指数函数; 当  $q \rightarrow 0$ , 变为简单双曲线函数<sup>[8-9]</sup>. 当  $1-q > 0$  时,  $q$  指数函数贴现率呈现动态不一致性, 即短期高于指数函数贴现率, 但远期高于指数函数贴现率, 其瞬时贴现率  $DR(n) = -(dF(a_n)/dn)/F(a_n) = r_q/(1+r_q(1-q)n)$  随期限  $n$  递减. 而金融企业估值使用指数函数  $F'(a_n) = a_n \exp(-rn)$ , 其瞬时贴现率  $DR'(n) = -(dF'(a_n)/dn)/F'(a_n) = r$ , 是一个常数<sup>[12]</sup>. 因此,  $q$  指数函数的瞬时贴现率在近期高于指数函数的瞬时贴现率 ( $DR(n) > DR'(n)$ ), 但在远期则更低 ( $DR(n) < DR'(n)$ ).

可知对提供反按揭的金融企业, 只要本金  $M$  和反按揭利率  $r$  一样, 则不同还本方式的反按揭成本相同. 但对参与反按揭的客户, 其基于  $q$  指数函数的估值函数  $V(M)$  是  $d$  的增函数 ( $d$  越大意味着支付款越集中在远期, 在远期人们的主观贴现率低于金融企业的贴现率, 其主观估值高于金融企业估值). 因此, 对于本金递增 ( $d > 0$ ), 本金递减 ( $d < 0$ ) 和本金不变 ( $d = 0$ ) 三种反按揭合同, 显然有  $V(M)(d > 0) > V(M)(d = 0) > V(M)(d < 0)$ . 据此提出假说: 其他情况不变, 客户对本

金递增合同的估值最高,满意度最高。

## 2 三种反按揭合同满意度调查

假设总本金(房屋现值)  $M = 150$  万元,反按揭利率年息为  $r = 2\%$ ,期限 15 年,金融企业按月向客户支付款项,月利率  $\bar{r} = 2\% / 12$ . 令  $d$  代表相邻两年之间的还本差,即后一年偿还本金减前一年偿还本金之差. 根据还本方式不同设计三种反按揭合同,分别令  $d = 1$  万元,  $d = 0$ ,  $d = -1$  万元. 其中  $d = -1$  万元为本金递减型(记为  $P3$ ),第一年收到本金 17 万元,之后每年递减 1 万元;  $d = 0$  为本金不变型(记为  $P2$ ),每年收到本金为固定 10 万元(150 万元/15 年);  $d = 1$  万元为本金递增型(记为  $P1$ ),第一年收到本金 3 万元,之后每年递增 1 万元. 代入式(6)可得  $a_n$  通解,并根据式(8)可得三种合同每年的月支付款  $MP_n$ ,即客户在 15 年里每月收到的养老金(由于三种合同本金还款顺序不同,故各年收入不同,但每一年中各月相同,见表 1).

表 1 三种反按揭合同月支付款

Table 1 Monthly payment of three reverse mortgages 元

年份	本金递增( $P1$ )	本金不变( $P2$ )	本金递减( $P3$ )
2019	4 955.23	10 736.33	16 517.42
2020	5 731.55	10 571.15	15 410.76
2021	6 491.35	10 405.98	14 320.61
2022	7 234.63	10 240.80	13 246.97
2023	7 961.40	10 075.63	12 189.86
2024	8 671.65	9 910.45	11 149.26
2025	9 365.38	9 745.28	10 125.18
2026	10 042.59	9 580.11	9 117.62
2027	10 703.29	9 414.93	8 126.57
2028	11 347.47	9 249.76	7 152.05
2029	11 975.13	9 084.58	6 194.03
2030	12 586.28	8 919.41	5 252.54
2031	13 180.91	8 754.24	4 327.57
2032	13 759.01	8 589.06	3 419.11
2033	14 320.61	8 423.89	2 527.17

根据表 1 设计调查问卷,调查对象被告知在无子女继承房屋的假设下考虑将现值 150 万元的自住房屋进行 15 年反按揭作为补充养老金. 有三种反按揭合约可供选择,由于房主延迟取得房款,故提供反按揭的金融企业会对延迟部分支付利

息,房主在 15 年中收到的总款项将高于 150 万,三种合同的利率均为年息 2%,合同之间的惟一区别在于还本先后顺序不同. 问卷还列明三种合同月支付款详细信息(表 1),调查对象在仔细阅读合同内容和月支付款后需对三种方案进行满意度评分,分值范围 1~7,满意度越高,分值越高,7 表示最满意,1 表示完全不考虑.

## 3 调查结果分析

调查对象为某 985 大学的本科生 39 人(男 10 人,女 29 人),平均年龄 21.08(标准差为 1.26 岁). 表 2 汇总三种反按揭评分结果, $\mu$  为均值, $\sigma$  为标准差.

由于三种合同利率相同,对提供反按揭的金融企业没有任何区别. 但表 2 显示人们更偏好本金递增型的反按揭合同  $P1$  ( $\mu = 5.1$ ).  $P1$  满意度评分均值高于其他两种合同,男女两性均表现出相同趋势, $P1$  的女性评分均值  $\mu = 5.24$ ,男性评分均值  $\mu = 4.7$ ,均高于  $P2$  和  $P3$  的男性和女性评分.

表 2 三种反按揭评分

Table 2 Evaluation of three reverse mortgages

性别	$P1$		$P2$		$P3$	
	$\mu$	$\sigma$	$\mu$	$\sigma$	$\mu$	$\sigma$
男	4.70	1.16	4.30	2.41	3.10	1.60
女	5.24	1.72	4.10	2.48	3.55	2.18
平均	5.10	1.60	4.15	2.43	3.44	2.04

在描述性统计结果基础上进一步检验差异的显著性. 使用 SPSS 作 Kolmogorov-Smirnov 检验发现部分样本不符合正态分布,故采用 Kruskal-Wallis 进行非参数 ANOVA 检验. 表 3 结果显示组间值在 99% 置信度水平下差异显著 ( $\text{sig} = 3.74\text{E} - 3 < 0.01$ ).

表 3 Kolmogorov-Smirnov 和 Kruskal-Wallis 检验结果  
Table 3 Kolmogorov-Smirnov and Kruskal-Wallis test results

显著性	$P1$	$P2$	$P3$
K-S	8.71E-4	1.27E-4	0.06
K-W	—	3.74E-3	—

图 1 检验结果发现  $P1$  的平均秩为 3, $P2$  的平均秩为 2, $P3$  的平均秩为 1. 调查问卷评分的原始赋值在  $[1, 7]$  之间,分数越高满意度越高,而 Kruskal-Wallis 检验结果按升序排列结果,故平均

秩高代表统计意义上满意度显著高,即  $P1$  满意度显著高于  $P2$ ,  $P2$  满意度显著高于  $P3$ . 统计结果验证了假说,可得结论 1.

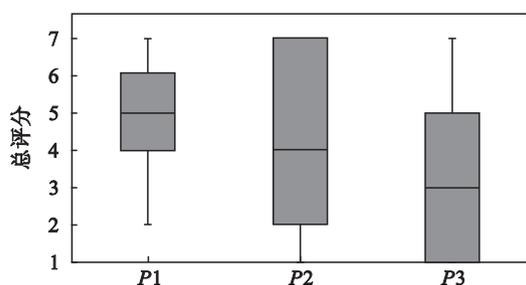


图 1 按反按揭类别的 Kruskal-Wallis 检验结果

Fig. 1 Results of Kruskal-Wallis test sorted by reverse mortgages types

结论 1 反按揭的本金支付越集中在前期,客户的满意度越高.

进一步按性别分析,图 2 和图 3 检验结果均显示  $P1$  平均秩为 3,  $P2$  平均秩为 2,  $P3$  平均秩为 1. 说明无论性别,本金递增反按揭的满意度评分在统计上显著高于本金不变和本金递减方案,即  $V(M)(d=1 \text{ 万元}) > V(M)(d=0) > V(M)(d=-1 \text{ 万元})$ . 显然客户对反按揭的主观估值是  $d$  的增函数,该结果符合  $q$  指数贴现函数的假设,因此有推论 1.

推论 1 研究客户对反按揭的主观估值时,  $q$  指数贴现函数优于指数贴现函数.

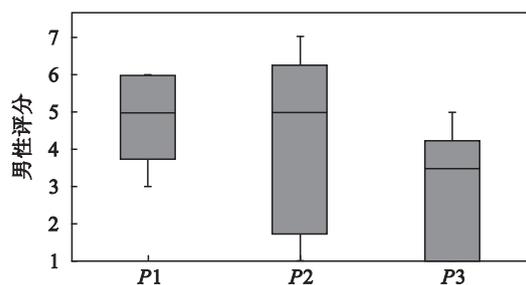


图 2 男性 Kruskal-Wallis 检验结果

Fig. 2 Results of Kruskal-Wallis test of male participants

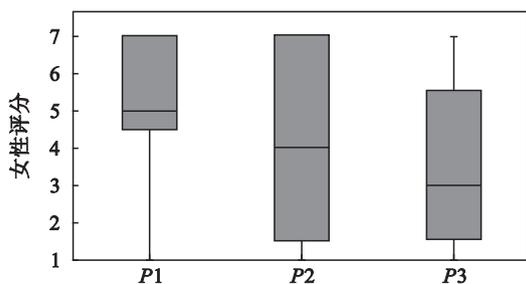


图 3 女性 Kruskal-Wallis 检验结果

Fig. 2 Results of Kruskal-Wallis test of female participants

## 4 结 论

1) 反按揭的本金支付越集中在前期,客户的满意度越高.

2) 研究客户对反按揭的主观估值时,  $q$  指数贴现函数优于指数贴现函数.

### 参考文献:

- [1] Loewenstein G F, Prelec D. Anomalies in intertemporal choice: evidence and an interpretation [J]. *Quarterly Journal of Economics*, 1992, 57(1): 573 - 598.
- [2] Laibson D. Golden eggs and hyperbolic discounting [J]. *Quarterly Journal of Economics*, 1997, 62(1): 443 - 478.
- [3] Diamond P, Koszegi B. Quasi-hyperbolic discounting and retirement [J]. *Journal of Public Economics*, 2003, 87(9): 1839 - 1872.
- [4] Angeletos G, Laibson D, Repetto A, et al. The hyperbolic consumption model: calibration, simulation, and empirical evaluation [J]. *Journal of Economic Perspectives*, 2001, 15(3): 47 - 68.
- [5] Lu Y, Wu D, Zhuang X T. Part-whole bias in intertemporal choice: An empirical study of additive assumption [J]. *Physica A*, 2016, 463(1): 231 - 235.
- [6] Lu Y, Zhuang X T. Impact of gender and working experience on intertemporal choices [J]. *Physica A*, 2014, 409(1): 146 - 153.
- [7] Strotz R H. Myopia and inconsistency in dynamic utility maximization [J]. *Review of Economic Studies*, 1955, 23(3): 165 - 180.
- [8] Cajueiro D O. A note on the relevance of the  $q$ -exponential function in the context of intertemporal choices [J]. *Physica A*, 2006, 364(1): 385 - 388.
- [9] Takahashi T. Theoretical frameworks for neuroeconomics of intertemporal choice [J]. *Journal of Neuroscience, Psychology, and Economics*, 2009, 2(1): 75 - 90.
- [10] Han R K, Takahashi T. Psychophysics of time perception and valuation in temporal discounting of gain and loss [J]. *Physica A*, 2012, 391(24): 6568 - 6576.
- [11] Gustman A L, Steinmeier T L. Policy effects in hyperbolic vs. exponential models of consumption and retirement [J]. *Journal of Public Economics*, 2012, 96(5/6): 465 - 473.
- [12] Takahashi T. A comparison of intertemporal choices for oneself versus someone else based on Tsallis' statistics [J]. *Physica A*, 2007, 385(2): 637 - 644.
- [13] Rambaud S C, Torrecillas M J. A generalization of the  $q$ -exponential discounting function [J]. *Physica A*, 2013, 392(14): 3045 - 3050.
- [14] Tsallis C. What are the numbers that experiments provide? [J]. *Química Nova*, 1994, 17(6): 468 - 471.
- [15] Hoelzl E, Kamleitner B, Kirchner E. Loan repayment plans as sequences of installments [J]. *Journal of Economic Psychology*, 2011, 32(4): 621 - 631.
- [16] Wonder N, Wilhelm W, Fewings D. The financial rationality of consumer loan choices: Revealed preferences concerning interest rates, down payments, contract length and rebates [J]. *Journal of Consumer Affairs*, 2008, 42(2): 243 - 270.
- [17] Thaler R. Mental accounting and consumer choice [J]. *Marketing Science*, 2008, 27(1): 15 - 25.
- [18] Rambaud S C, Pascual J L, Alvarez M. Preferences over sequences of payments: A new validation of the  $q$ -exponential discounting [J]. *Physica A*, 2019, 515(1): 332 - 345.