

一种基于失效概率相对误差估计的可靠性分析方法

张毅博, 孙志礼, 闫玉涛, 王 健
(东北大学 机械工程与自动化学院, 辽宁 沈阳 110819)

摘 要: 为更高效地分析复杂机械结构的可靠性,提出了一种新的基于 Kriging 模型和失效概率相对误差估计的自适应分析方法.采用泊松二项分布的近似正态分布推导了样本符号不确定区域内真实失效样本数的取值范围,并通过引入比例因子重新定义取值下限,以确保真实失效样本数准确落在确定的区间内,进而给出了一种更精确的失效概率相对误差的估计.采用学习函数 U 实现自适应试验设计.通过两个算例验证失效概率相对误差估计和自适应分析方法的准确性、通用性及高效性,结果表明:本文方法不仅能准确估计失效概率的相对误差,而且显著减少了功能函数的调用次数.

关 键 词: 结构可靠性分析;失效概率;相对误差;Kriging 模型;自适应试验设计

中图分类号: TB 114.3 **文献标志码:** A **文章编号:** 1005-3026(2020)02-0229-06

A Reliability Analysis Method Based on Relative Error Estimation of Failure Probability

ZHANG Yi-bo, SUN Zhi-li, YAN Yu-tao, WANG Jian
(School of Mechanical Engineering & Automation, Northeastern University, Shenyang 110819, China.
Corresponding author: ZHANG Yi-bo, E-mail: neuzyb@163.com)

Abstract: To analyze the reliability of complex mechanical structures more efficiently, an innovative adaptive analysis method is proposed based on the Kriging model and the relative error estimation of failure probability. The range of the number of actual failure samples in the region where the signs of samples are uncertain is derived using the normal distribution that approximates to the Poisson binomial distribution. The lower limit of the range is redefined by introducing a scale factor to ensure that the number of actual failure samples can accurately fall within the range. Then, a more accurate estimation of relative error of failure probability is provided. The adaptive design of experiments is implemented by the learning function U . Two examples are employed to verify the accuracy, generality and efficiency of the presented relative error estimation of failure probability and the adaptive analysis method. The results indicate that the as-introduced approach can not only accurately estimate the relative error of failure probability, but also significantly decrease the calls to performance function.

Key words: structural reliability analysis; failure probability; relative error; Kriging model; adaptive design of experiments

随着机械结构的日趋复杂,基于代理模型(如响应面 RSM^[1]、神经网络 NNs^[2]、支持向量机 SVM^[3]、Kriging^[4-7]等)的可靠性分析方法由于其高效性和准确性而越来越受到重视. Kriging 模型作为一种精确的内插方法,在提供预测响应的同时还给出了预测响应的方差,这使得 Kriging 模型在可靠性分析中得到了广泛应用并逐渐成为研究热点.

近年来,为改善 Kriging 模型的精度和可靠性分析效率,众多学者提出了各种自适应试验设计策略和可靠性分析方法,其中,基于学习函数的选点策略是研究最广泛的.例如, Bichon 等^[8]提出了学习函数 EFF,用以测量样本接近极限状态的程度; Echard 等^[9]定义了学习函数 U ,用以选

择最容易错分类的样本;Sun 等^[4]通过提出的学习函数 LIF 来选择对失效概率预测精度改善最大的样本.此外,学者们还从采样区域^[10]及交叉验证^[11]等方面发展了各种选点策略.然而,现有自适应试验设计的停止准则主要聚焦于单个样本满足学习函数的要求,而不是从预测的失效概率满足可靠性分析精度需求的角度出发,这往往会增加不必要的功能函数调用次数,降低可靠性分析效率.为此,Hu 等^[12]和 Wang 等^[13]基于失效概率的相对误差估计提出了两种新的停止准则;然而,由于保守或错误地估计真实失效样本数的取值范围,新的停止准则仍难以应用到工程实际中.

针对上述存在的问题,本文基于失效概率的相对误差估计提出了一种更精确的真实失效样本数的区间估计方法,从而有效地避免了不必要的功能函数调用和错误的失效概率评估结果,并采用两个实例来说明所提方法的通用性、准确性及高效性.

1 可靠性分析基本理论

在可靠性领域中,失效概率被定义为

$$P_f = \int_{G(\mathbf{x}) \leq 0} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (1)$$

式中: \mathbf{x} 为 N 维随机向量(即 N 个影响结构输出的随机输入因素); $f(\mathbf{x})$ 为 \mathbf{x} 的联合概率密度函数; $G(\mathbf{x})$ 为结构的功能函数且 $G(\mathbf{x})$ 将 \mathbf{x} 的空间分为两部分,即失效域 $\{\mathbf{x} | G(\mathbf{x}) \leq 0\}$ 和安全域 $\{\mathbf{x} | G(\mathbf{x}) > 0\}$.

在 Kriging 模型中, $G(\mathbf{x})$ 被表示为

$$G(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{x})^T \boldsymbol{\beta} + z(\mathbf{x}). \quad (2)$$

式中: $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ 为多项式回归基函数; $\boldsymbol{\beta}$ 为相应的回归系数,本文令 $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ 的阶次为 0; $z(\mathbf{x})$ 为高斯过程. $z(\mathbf{x})$ 具有如下特征:

$$E[z(\mathbf{x})] = 0, \text{Cov}[z(\mathbf{x}), z(\mathbf{w})] = \sigma^2 R(\mathbf{x}, \mathbf{w}; \boldsymbol{\theta}).$$

式中: σ 是高斯过程 $z(\mathbf{x})$ 的标准差; $R(\mathbf{x}, \mathbf{w}; \boldsymbol{\theta})$ 表示 $z(\mathbf{x})$ 和 $z(\mathbf{w})$ 间含未知参数 $\boldsymbol{\theta}$ 的相关系数.本文采用应用最广泛的高斯相关函数:

$$R(\mathbf{x}, \mathbf{w}; \boldsymbol{\theta}) = \exp \sum_{k=1}^N [-\theta^k (x^k - w^k)^2]. \quad (3)$$

式中: x^k, w^k, θ^k 分别表示 \mathbf{x}, \mathbf{w} 和 $\boldsymbol{\theta}$ 的第 k 个元素.

在给定含 M 个训练样本的初始 DoE (design of experiments) 下, $\boldsymbol{\beta}$ 和 σ 的估计分别为

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{g}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{g})^{-1} \mathbf{g}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{Y}, \quad (4)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{M} (\mathbf{Y} - \mathbf{g} \hat{\boldsymbol{\beta}})^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{Y} - \mathbf{g} \hat{\boldsymbol{\beta}}). \quad (5)$$

$$\text{式中: } \mathbf{g} = [g(\mathbf{x}_1), g(\mathbf{x}_2), \dots, g(\mathbf{x}_M)]^T, \mathbf{R} = [R(\mathbf{x}, \mathbf{w}; \boldsymbol{\theta})]_{N \times N}.$$

参数 $\boldsymbol{\theta}$ 由极大似然估计得到:

$$\max L(\boldsymbol{\theta}) = -\ln(|\mathbf{R}| \hat{\sigma}^{2M}). \quad (6)$$

为确保预测响应最小方差无偏性,样本 \mathbf{x} 处的 Kriging 预测响应及其方差分别为

$$\mu_G(\mathbf{x}) = \hat{G}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}^T \hat{\boldsymbol{\beta}} + \mathbf{r}(\mathbf{x}) \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{Y} - \mathbf{g} \hat{\boldsymbol{\beta}}), \quad (7)$$

$$\sigma_G^2(\mathbf{x}) = \hat{\sigma}^2 (1 + \mathbf{u}^T(\mathbf{x}) (\mathbf{g}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{g})^{-1} \mathbf{u}(\mathbf{x}) - \mathbf{r}(\mathbf{x})^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{r}(\mathbf{x})). \quad (8)$$

式中:

$$\mathbf{r}(\mathbf{x}) = [R(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}; \boldsymbol{\theta}), R(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}; \boldsymbol{\theta}), \dots, R(\mathbf{x}_M, \mathbf{x}; \boldsymbol{\theta})],$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{r}(\mathbf{x}) - 1.$$

因此,结构失效概率的估计值为

$$\hat{P}_f = \int_{\hat{G}(\mathbf{x}) \leq 0} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (9)$$

对复杂结构而言,直接求解积分(9)很困难,甚至是不可能的.因此,本文使用 Monte Carlo (MC)法近似估计 \hat{P}_f ,即

$$\hat{P}_f = \int_{\hat{G}(\mathbf{x}) \leq 0} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \approx \frac{1}{N_{MC}} \sum_{i=1}^{N_{MC}} I_{\hat{G}}(\mathbf{x}_i). \quad (10)$$

式中: N_{MC} 为 MC 样本数; \mathbf{x}_i 是第 i 个 MC 样本; $I_{\hat{G}}(\mathbf{x})$ 为失效指示函数,当 $\hat{G}(\mathbf{x}) \leq 0$ 时, $I_{\hat{G}}(\mathbf{x}) = 1$, 当 $\hat{G}(\mathbf{x}) > 0$ 时, $I_{\hat{G}}(\mathbf{x}) = 0$.

\hat{P}_f 的变异系数为

$$\delta_{\hat{P}_f} = \frac{\sqrt{\text{var}(\hat{P}_f)}}{\hat{P}_f} = \sqrt{\frac{1 - \hat{P}_f}{N_{MC} \hat{P}_f}}, \quad (11)$$

$$\text{var}(\hat{P}_f) = \frac{1}{N_{MC}} (\hat{P}_f - \hat{P}_f^2).$$

\hat{P}_f 的相对误差为

$$\varepsilon_{\hat{P}_f} = \frac{|\hat{P}_f - \hat{P}_f^{MCS}|}{\hat{P}_f^{MCS}}. \quad (12)$$

式中, \hat{P}_f^{MCS} 为通过 Monte Carlo Simulation (MCS) 和真实功能函数得到的结构失效概率.

2 失效概率的相对误差估计

2.1 学习函数 U

Echard 等^[9]从样本符号预测精度的角度出发定义了一个学习函数 U 来量化符号预测的不确定性,其表达式为

$$U(\mathbf{x}) = \left| \frac{\mu_G(\mathbf{x})}{\sigma_G(\mathbf{x})} \right|, \quad (13)$$

则该样本 \mathbf{x} 处符号预测错误的概率为

$$P_{\text{error}}(\mathbf{x}) = \Phi(-U(\mathbf{x})). \quad (14)$$

式中, $\Phi(\cdot)$ 为标准正态分布的累积分布函数.

显然, $\mu_G(\mathbf{x})$ 越小(样本 \mathbf{x} 越接近极限状态

$G(\mathbf{x}) = 0$) 或 $\sigma_G(\mathbf{x})$ 越大 (样本 \mathbf{x} 的不确定性越高) 或两者兼之, 则 $U(\mathbf{x})$ 值越小, 样本 \mathbf{x} 处符号越容易预测错误. 因此, 定义 $U(\mathbf{x})$ 最小的点为新训练样本, 即

$$\mathbf{x}^* = \operatorname{argmin}_{\mathbf{x}} U(\mathbf{x}). \quad (15)$$

基于函数 U 的自适应可靠性分析流程如下:

- ① 在 $[-5, 5]^N$ 空间内采用拉丁超立方抽样 (LHS) 定义初始训练样本集 Ω , 并应用 MC 法产生候补样本集 Ω_{CS} ;
- ② 基于样本集 Ω , 构建 Kriging 代理模型, 并根据式 (7)、式 (8) 和式 (13) 找到样本集 Ω_{CS} 中对应的最小 U 值 $\min(U(\mathbf{x}))$, 如果 $\min(U(\mathbf{x})) > 2$, 停止迭代, 由式 (10) ~ 式 (12) 计算可靠性结果, 否则继续步骤③;
- ③ 计算新训练样本 \mathbf{x}^* 处的功能函数值 G^* , 将其加入到初始训练样本集 Ω 中, 并返回步骤②.

2.2 相对误差估计方法

根据学习函数 $U, U(\mathbf{x}) > 2$ 的样本的符号可以认为是预测正确的. 因此, 式 (12) 中 \hat{P}_f 的相对误差可以改写为

$$\varepsilon_{\hat{P}_f} = \frac{|\hat{P}_f - \hat{P}_f^{\text{MCS}}|}{\hat{P}_f^{\text{MCS}}} = \frac{|N_{f2} - N_{f2}|}{N_{f1} + N_{f2}}. \quad (16)$$

式中: N_{f1}, N_{f2}, N_{f2} 分别表示域 Ω_{f1}, Ω_{f2} 和 Ω_{f2} 内的样本总数, 且域 Ω_{f1}, Ω_{f2} 和 Ω_{f2} 分别代表如下所示的样本点.

$$\begin{aligned} \Omega_{f1} &= \{\mathbf{x} | \hat{G}(\mathbf{x}) \leq 0, U(\mathbf{x}) > 2\}, \\ \Omega_{f2} &= \{\mathbf{x} | \hat{G}(\mathbf{x}) \leq 0, U(\mathbf{x}) \leq 2\}, \\ \Omega_{f2} &= \{\mathbf{x} | G(\mathbf{x}) \leq 0, U(\mathbf{x}) \leq 2\}. \end{aligned}$$

显然, N_{f2} 等于域 Ω_{f2} 内符号预测正确的样本数和域 $\Omega_{f2} = \{\mathbf{x} | \hat{G}(\mathbf{x}) > 0, U(\mathbf{x}) \leq 2\}$ 内符号预测错误的样本数之和. 类似于失效指示函数, 本文定义一个指示函数 $I_w(\mathbf{x})$, 用于识别样本符号是否预测错误, 即

$$I_w(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & |I_G(\mathbf{x}) - I_{\hat{G}}(\mathbf{x})| = 1; \\ 0, & |I_G(\mathbf{x}) - I_{\hat{G}}(\mathbf{x})| = 0. \end{cases}$$

因此, 域 Ω_{f2} 内符号预测正确的样本数 S_{fc} 和域 Ω_{f2} 内符号预测错误的样本数 S_{sw} 可分别表示为

$$S_{fc} = \sum_{j=1}^{N_{f2}} (1 - I_w(\mathbf{x}_j)), \quad S_{sw} = \sum_{i=1}^{N_{f2}} I_w(\mathbf{x}_i). \quad (17)$$

式中, N_{f2} 为域 Ω_{f2} 内的样本总数.

忽略 Kriging 预测之间的相关性, 则 S_{sw} 和 S_{fc} 均服从泊松二项分布, 其分布参数为

$$\mu_{sw} = \sum_{i=1}^{N_{f2}} \Phi(-U_i), \quad \sigma_{sw}^2 = \sum_{i=1}^{N_{f2}} \Phi(-U_i) \Phi(U_i). \quad (18)$$

$$\mu_{fc} = \sum_{j=1}^{N_{f2}} \Phi(U_j), \quad \sigma_{fc}^2 = \sum_{j=1}^{N_{f2}} \Phi(U_j) \Phi(-U_j). \quad (19)$$

式中: $U_i = U(\mathbf{x}_i); U_j = U(\mathbf{x}_j)$.

随着 Kriging 模型精度的逐渐改善, $U(\mathbf{x}) \leq 2$ 的样本数逐渐减少, 文献 [13] 采用的林德伯格 - 费勒中心极限定理不再适用. 此外, 根据 Le cam 定理定义的误差界限可知, 只有在样本符号预测正确或错误的概率较小时, 泊松分布才能较好地近似泊松二项分布. 因此, 本文采用适用性更广泛且近似效果优于泊松分布的正态分布来模拟 S_{sw} 和 S_{fc} 的分布, 即

$$\left. \begin{aligned} S_{sw} &= \sum_{i=1}^{N_{f2}} I_w(\mathbf{x}_i) \sim N(\mu_{sw} - 0.5, \sigma_{sw}^2), \\ S_{fc} &= \sum_{j=1}^{N_{f2}} (1 - I_w(\mathbf{x}_j)) \sim N(\mu_{fc} - 0.5, \sigma_{fc}^2). \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

因此, N_{f2} 的分布为

$$N_{f2} = S_{sw} + S_{fc} \sim N(\mu_{N_{f2}}, \sigma_{N_{f2}}^2). \quad (21)$$

式中: $\mu_{N_{f2}} = \mu_{sw} + \mu_{fc} - 1; \sigma_{N_{f2}}^2 = \sigma_{sw}^2 + \sigma_{fc}^2$.

在置信水平为 0.95 时, N_{f2} 的置信区间为

$$[\mu_{N_{f2}} - 1.96\sigma_{N_{f2}}, \mu_{N_{f2}} + 1.96\sigma_{N_{f2}}]. \quad (22)$$

文献 [12] 将 N_{f2} 的取值区间定义为

$$N_{f2} \in [0, N_{f2} + N_{f2}]. \quad (23)$$

显然, 式 (23) 是极端情况下 (域 Ω_{f2} 内的样本符号全部预测错误且域 Ω_{f2} 内样本符号全部预测正确, 即 N_{f2} 取值为 0; 域 Ω_{f2} 内的符号全部预测正确且域 Ω_{f2} 内符号全部预测错误, 即 N_{f2} 取值为 $N_{f2} + N_{f2}$) 得到的 N_{f2} 的取值区间, 因此过于保守.

文献 [13] 将 N_{f2} 的取值区间定义为

$$\begin{aligned} N_{f2} &\in [\mu_{fc} - 0.5 + 1.96\sigma_{fc}, \\ &N_{f2} + \mu_{sw} - 0.5 + 1.96\sigma_{sw}]. \end{aligned} \quad (24)$$

显然, 式 (24) 中的取值下限忽略了域 Ω_{f2} 内符号预测错误的样本数, 取值上限则认为域 Ω_{f2} 内样本符号全部预测正确, 因此式 (24) 中 N_{f2} 的取值区间不精确.

此外, 在 Kriging 模型精度较差时, 由于域 Ω_{f2}, Ω_{f2} 内样本 (即 $U(\mathbf{x}) \leq 2$ 的样本) 总数较多, 导致式 (22) 和式 (24) 中 N_{f2} 的下限过高, 即 $U(\mathbf{x}) \leq 2$ 区域内的真实失效样本数没有落在 N_{f2} 的取值区间内, 从而错误地估计相对误差和失效概率.

随着 Kriging 模型精度逐渐改善, 域 Ω_{f1} 内的样本数 N_{f1} 基本呈增长趋势且逐渐收敛于整个样本空间内真实的失效样本数 N_f , 即 N_{f2} 与 N_{f1} 间的比值逐渐减小. 因此, 为使 $U(\mathbf{x}) \leq 2$ 内的真实失效样本数落在 N_{f2} 的取值区间内, 本文提出引入一个比例因子 α , 通过 αN_{f1} 重新定义 N_{f2} 的取值下限, 即

$$N_{f2}^{\alpha} \triangleq [\mu_{N_{f2}} - 1.96\sigma_{N_{f2}}, \mu_{N_{f2}} + 1.96\sigma_{N_{f2}}],$$
$$\mu_{N_{f2}} - 1.96\sigma_{N_{f2}} < \alpha N_{f1};$$
$$N_{f2}^{\alpha} \triangleq [\alpha N_{f1}, \mu_{N_{f2}} + 1.96\sigma_{N_{f2}}],$$
$$\mu_{N_{f2}} - 1.96\sigma_{N_{f2}} \geq \alpha N_{f1}.$$

(25)

本文令 $\alpha = 0.1$, 则失效概率估计值的相对误差为

$$\varepsilon_{\hat{P}_f} = \frac{|N_{f2} - N_{f2}^{\alpha}|}{N_{f1} + N_{f2}} \leq \max_{N_{f2} \in N_{f2}^{\alpha}} \left(\frac{|N_{f2} - N_{f2}^{\alpha}|}{N_{f1} + N_{f2}} \right) = \varepsilon_{\max}. \quad (26)$$

因此, 只要式(26)中失效概率的最大相对误差 ε_{\max} 满足式(27)中的条件, 就说明满足可靠性分析的精度要求.

$$\varepsilon_{\max} \leq \varepsilon_{\text{thr}}. \quad (27)$$

式中, ε_{thr} 为最大相对误差的阈值, 工程实际中 ε_{thr} 一般为 $0.01 \sim 0.05$ ^[12-13], 本文取 $\varepsilon_{\text{thr}} = 0.03$.

2.3 基于相对误差估计的可靠性分析

基于相对误差估计的自适应可靠性分析方法的基本步骤如下:

步骤 1 采用 LHS 法产生初始训练样本集 S_{DoE} , 并计算相应的真实功能函数值 G_{DoE} . 初始训练集 S_{DoE} 一般只需少量的样本, 在后续迭代选点过程中不断更新训练集.

步骤 2 基于现有 DoE 和 MATLAB 中的 DACE 工具箱构建 Kriging 模型, 并应用 MC 法产生候补样本集 Ω_{CS} .

步骤 3 计算候补样本集 Ω_{CS} 相应的 $\mu_G(\mathbf{x})$, $\sigma_G(\mathbf{x})$ 和 $U(\mathbf{x})$; 根据式(26)获取失效概率估计值的最大相对误差 ε_{\max} , 如果不满足式(27), 将样本集 Ω_{CS} 中最小 U 值 $\min(U(\mathbf{x}))$ 对应的样本作为新训练样本加入到 DoE 中并返回步骤 2; 否则, 继续下一步.

步骤 4 应用 MC 法估计失效概率及其变异系数, 如果变异系数满足式(28), 则停止迭代并输出可靠性分析结果; 否则, 扩大 MC 样本数并重复步骤 2~4, 直至满足式(28).

$$\delta_{\hat{P}_f} = \sqrt{\frac{1 - \hat{P}_f}{N_{\text{MC}} \hat{P}_f}} \leq 0.03. \quad (28)$$

3 算例验证

3.1 算例 1

选取文献[8]中的二元非线性功能函数作为研究对象, 其表达式为

$$G(x_1, x_2) = 1.2 - \frac{1}{20}(x_1^2 + 4)(x_2 - 1) + \sin\left(\frac{5}{2}x_1\right).$$

(29)

式中, $x_1 \sim N(0, 1)$, $x_2 \sim N(0, 1)$, 且相互独立.

初始 LHS 训练样本点设置为 6 个, 并采用 10^6 个 MC 样本点计算该二元函数的失效概率. 由不同真实失效样本数 N_f 取值范围的估计方法及相应停止条件得到的可靠性分析结果如表 1 所示, 其中 N_{call} 为功能函数调用次数. 显然, 本文的可靠性分析方法在满足精度要求的同时, 比其他方法需要更少的功能函数调用次数.

表 1 不同方法的分析结果

Table 1 Results of different methods

方法	N_{call}	$\hat{P}_f \times 10^3$	$\delta_{\hat{P}_f}/\%$	$\varepsilon_{\hat{P}_f}/\%$
MCS	10^6	4.732	1.45	
U 函数	44	4.751	1.45	0.40
文献[12]	38	4.788	1.44	1.18
文献[13]	20	3.061	1.80	35.31
本文方法	27	4.805	1.44	1.54

图 1、图 2 分别显示了由不同估计方法得到的 N_f 和失效概率相对误差 $\varepsilon_{\hat{P}_f}$ 随迭代次数 N_{it} 的变化. 可以发现, 本文所估计的 N_f 的取值范围和失效概率的最大相对误差比文献[12]和文献[13]的更精确.

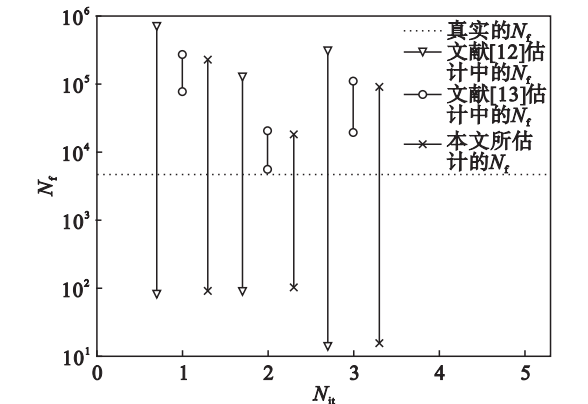


图 1 由不同方法得到的 N_f 的取值范围
Fig. 1 Range of N_f obtained by different methods

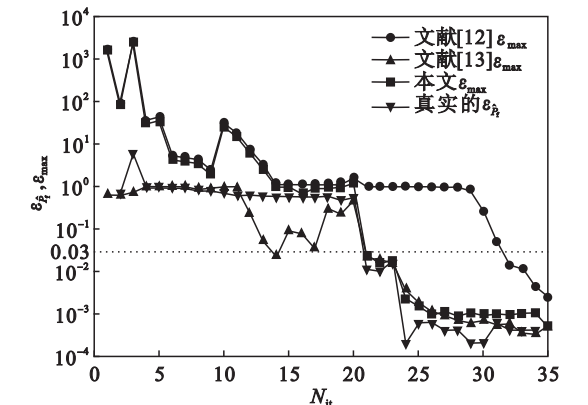


图 2 采用不同方法 $\varepsilon_{\hat{P}_f}$ 和 ε_{\max} 随 N_{it} 的变化
Fig. 2 Variation of $\varepsilon_{\hat{P}_f}$ and ε_{\max} with N_{it} using different methods

3.2 算例 2

以图 3 所示的具有 9 个随机变量的悬臂式管结构^[14]为分析对象,其功能函数为结构屈服强度 S 和最大应力 σ_{\max} 之差,即

$$G(t,d,L_1,L_2,F_1,F_2,P,T,S)=S-\sigma_{\max} \quad (30)$$

式中各随机变量的分布特征如表 2 所示, σ_{\max} 为原点处悬臂管上表面所受的最大等效应力:

$$\sigma_{\max}=\sqrt{\sigma_x^2+3\tau_{zx}^2} \quad (31)$$

式中

$$\sigma_x=\frac{P+F_1\sin\theta_1+F_2\sin\theta_2}{A}+\frac{Md}{2I},$$

$$\tau_{zx}=\frac{Td}{4I},$$

$$\theta_1=5^\circ,\theta_2=10^\circ,$$

$$M=F_1L_1\cos\theta_1+F_2L_2\cos\theta_2,$$

$$A=\frac{\pi}{4}[d^2-(d-2t)^2],$$

$$I=\frac{\pi}{64}[d^4-(d-2t)^4].$$

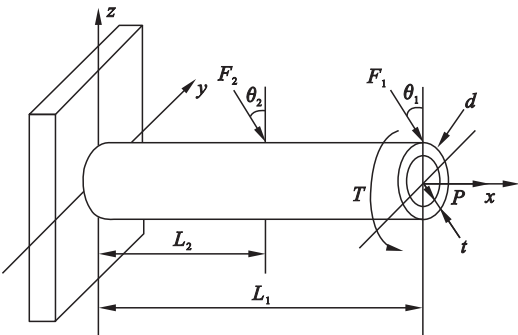


图 3 悬臂管
Fig. 3 Cantilever tube

表 2 各随机变量的分布特征

Table 2 Distribution of random variables			
变量	参数 1	参数 2	分布
t/mm	5(均值)	0.1(标准差)	正态
d/mm	42(均值)	0.5(标准差)	正态
L_1/mm	119.75(下限)	120.25(上限)	均匀
L_2/mm	59.75(下限)	60.25(上限)	均匀
F_1/kN	3.0(均值)	0.3(标准差)	正态
F_2/kN	3.0(均值)	0.3(标准差)	正态
P/kN	27.0(均值)	2.7(标准差)	Gumbel
$T/(\text{N}\cdot\text{m})$	90.0(均值)	9.0(标准差)	正态
S/MPa	220(均值)	22(标准差)	正态

初始 LHS 训练样本点设置为 12 个,并采用 2.0×10^5 个 MC 样本点计算该悬臂管的失效概

率.表 3 和图 4 列举了采用不同方法得到的结果.相较于其他方法,在满足可靠性分析精度要求时,本文方法在效率上更具优势.

表 3 不同方法的分析结果
Table 3 Results of different methods

方法	N_{call}	$\hat{P}_f\times10^3$	$\delta_{\hat{P}_f}/\%$	$\varepsilon_{\hat{P}_f}/\%$
MCS	2.0×10^5	7.302	2.61	—
U	92	7.335	2.60	0.45
文献[12]	69	7.186	2.63	1.59
文献[13]	25	6.935	2.68	5.03
本文方法	38	7.173	2.63	1.77

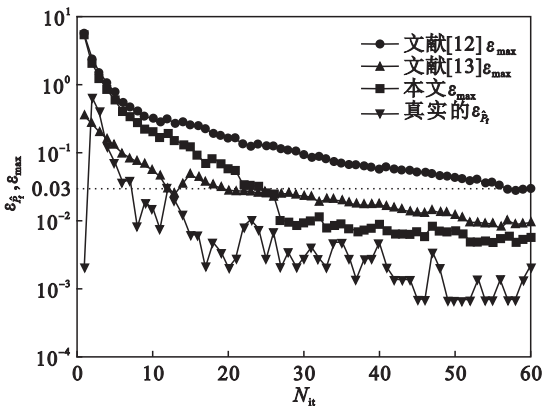


图 4 采用不同方法得到的 $\varepsilon_{\hat{P}_f}$ 和 ε_{\max} 随 N_{it} 的变化
Fig. 4 Variation of $\varepsilon_{\hat{P}_f}$ and ε_{\max} with N_{it} obtained by different methods

4 结 论

1) 通过两个算例表明,本文确定的取值区间不仅能够准确地包含真实失效样本数,而且还能得到更精确的失效概率相对误差估计结果.

2) 本文提出的基于失效概率相对误差估计的自适应可靠性分析方法在满足分析精度要求的同时极大地减少了功能函数的调用次数,为解决实际工程中复杂结构的可靠性问题提供了一种切实可行的分析方法.

参考文献:

[1] Roussouly N, Petitjean F, Salaun M. A new adaptive response surface method for reliability analysis [J]. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2013, 32: 103–115.
[2] Golzari A, Sefat M H, Jamshidi S. Development of an adaptive surrogate model for production optimization [J]. *Journal of Petroleum Science & Engineering*, 2015, 133: 677–688.
[3] Pan Q, Dias D. An efficient reliability method combining adaptive support vector machine and Monte Carlo simulation [J]. *Structural Safety*, 2017, 67: 85–95.