

X型准零刚度隔振器的隔振特性分析

姚国¹, 于永恒¹, 张义民², 武志花¹
(1. 东北大学 机械工程与自动化学院, 辽宁 沈阳 110819; 2. 沈阳化工大学 装备可靠性研究所, 辽宁 沈阳 110142)

摘 要: 将一种 X 型结构应用于准零刚度隔振器以改善其低频隔振性能. 根据牛顿运动定律建立了系统的动力学方程. 利用增量谐波平衡法对非线性常微分方程进行求解, 得到系统的幅频响应曲线. 讨论了等同约化刚度 γ 值对系统传递率的影响. 研究表明: 水平弹簧的无量纲预压缩长度的合理区间为 $(0, 2)$. 在共振区时, γ 值的增大可以减小力传递率. 在较高频率激励下, γ 值的变化对系统隔振性能影响较弱. 随着 γ 值减小, 共振区的位移传递率急剧减小. 此外, γ 值的减小也会引起共振频率减小, 并且使得跳跃现象消失. 因此, X 型准零刚度隔振器的等同约化刚度 γ 值是一个可以有效反映系统低频隔振效果的理想参数.

关 键 词: X 型结构; 准零刚度 (QZS); 隔振器; 增量谐波平衡法 (IHB); 等同约化刚度; 传递率

中图分类号: TH 113.1; TB 535; O 322; O 328 **文献标志码:** A **文章编号:** 1005-3026(2020)05-0662-05

Vibration Isolation Characteristics Analysis of X-shaped Quasi-Zero Stiffness Vibration Isolator

YAO Guo¹, YU Yong-heng¹, ZHANG Yi-min², WU Zhi-hua¹
(1. School of Mechanical Engineering & Automation, Northeastern University, Shenyang 110819, China; 2. Equipment Reliability Institute, Shenyang University of Chemical Technology, Shenyang 110142, China. Corresponding author: YAO Guo, E-mail: yaoguo@me.neu.edu.cn)

Abstract: An X-shaped structure is applied to quasi-zero stiffness isolator to improve its low frequency isolation performance. The dynamic equation of the system is established by using the Newton's motion law. The amplitude-frequency response curves of the system are obtained by using the incremental harmonic balance method. The effect of equivalent reduced stiffness γ on system transmissibility is discussed. Research results show that the reasonable numerical interval of dimensionless pre-compression length of horizontal spring is $(0, 2)$. In the resonant region, the increase of γ can significantly reduce the force transmissibility. At higher excitation frequencies, the effect of the change of γ on the vibration isolation performance of the system is weak. With the decrease of γ , the displacement transmissibility in the resonance region decreases sharply. In addition, the decrease of γ will also reduce the resonance frequency and make the jump phenomenon disappear. Therefore, the equivalent reduced stiffness γ of the X-shaped quasi-zero stiffness isolator is an ideal parameter which can effectively reflect the effect of low-frequency vibration isolation of the system. The effect of equivalent reduced stiffness γ is discussed in detail.

Key words: X-shaped structure; quasi-zero stiffness (QZS); vibration isolator; incremental harmonic balance method (IHB); equivalent reduced stiffness; transmissibility

在许多工程领域中, 非线性隔振通常是一个关键问题. 非线性隔振分为主动式和被动式, 被动隔振器^[1]由于具有可靠性高、外部能量零输入、结构简单等优点在许多领域得到了广泛应用, 如车辆^[2]、航天器^[3]和精密仪器^[4]等. 近几年, 准零刚度 (quasi-zero stiffness, QZS) 非线性隔振器以其优异的综合性能吸引了众多学者的关注^[5]. 典型的非线性 QZS 隔振器在设计载荷质量 m 下, 在

其平衡位置处将正刚度 k_v 和负刚度 k_h 单元组合起来。QZS 隔振器在静平衡位置具有高静低动的刚度特性,QZS 隔振器具有较低的主共振频率和较小的静挠度,从而实现了高承载能力的低频隔振。

QZS 隔振器可由多种方式实现,近些年,学者们提出了多种具有 QZS 特性的隔振系统模型。Cheng 等^[5]提出了一种几何非线性阻尼器,并将其应用于 QZS 隔振器中,以提高其低频隔振性能。Zhou 等^[6]提出了一种具有准零刚度特性的扭转隔振器,用于衰减轴系中扭转振动的传递,同时也起到了轴系间的耦合作用。Sun 等^[7]提出了一种多方向 QZS 剪刀形结构,并与已有的 QZS 隔振器进行了隔振效果对比。

为了提高 QZS 隔振器的低频隔振性能,本文采用了一种 X 型结构并将其应用于 QZS 型隔振器的设计中。首先,应用静力学和泰勒公式得到了弹簧的刚度特性曲线,得出了准零刚度产生的条件。其次,通过对 X 型结构的受力分析建立了系统的动力学方程,利用增量谐波平衡法 (incremental harmonic balance method, IHBM) 对非线性常微分方程进行半解析求解,并通过 Runge – Kutta 法对比验证了解的一致性。最后,对系统的幅频响应、力传递率及位移传递率特性进行了分析及参数讨论。结果表明:本系统具有良好的隔振性能,可为结构振动的被动控制提供一种新的解决方案。

1 QZS 系统及建模

如图 1 所示,QZS 隔振器主要由两个竖直弹簧和两个 X 型结构的调节器组成。X 型结构的调节器由支架、连杆、铰链轴和水平弹簧组成。所有连杆的长度均为 L ,水平弹簧的两端与铰链轴连接,竖直弹簧两端经支架与加载支架和基座连接,在垂直导杆的作用下,加载支架只能沿垂直方向移动。水平弹簧的弹性系数为 K_h ,竖直弹簧的弹性系数为 $K_v/2$,线性阻尼器的阻尼系数为 C 。加载支架上放置质量为 m 的质量块。

在质量块重力作用下,整个系统处于静平衡状态,所有连杆重叠并且是处于水平状态,质量块的位移为

$$\Delta x = mg / K_v. \tag{1}$$

为了提供负刚度,两个刚度系数都为 K_h 的水平弹簧预先压缩的长度为 d ,水平弹簧的弹性恢复力经连杆和支架传递到加载支架上,与竖直弹

簧所产生的弹性恢复力方向相反。因此隔振器处于静平衡状态时,当负刚度与正刚度相等时,系统实现了准零刚度特性。

首先分析弹性恢复力,当上支架受到外力 f 作用时,加载支架会偏离静平衡位置并产生位移 x ,此时,QZS 系统的结构模型如图 1 所示。

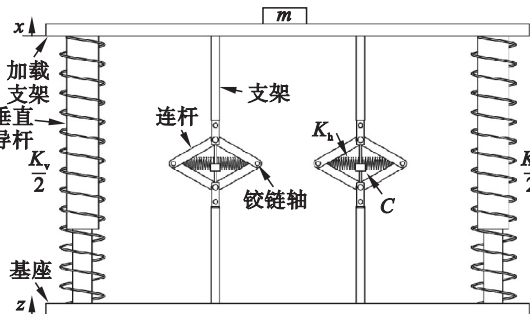


图 1 QZS 系统的任意时刻模型图
Fig. 1 Model diagram of QZS system at any time

如图 2 所示,所施加的力与位移的关系为

$$f(x) = f_v + mg - f_t. \tag{2}$$

其中: $f_v = K_v (x - \Delta x)$ 表示竖直弹簧的系统弹性恢复力; $f_t = 2f_h \tan \alpha$ 表示水平弹簧的系统弹性恢复力; α 表示连杆与水平面之间的夹角,并且 $\tan \alpha = x / \sqrt{4L^2 - x^2}$ 。施加外激励可以表示为

$$f(x) = K_v x - 2K_h x \left(\frac{d - 2L}{\sqrt{4L^2 - x^2}} + 1 \right). \tag{3}$$

对式(3)无量纲化处理,得到

$$h(u) = u - 2\beta u \left(\frac{\delta - 2}{\sqrt{4 - u^2}} + 1 \right). \tag{4}$$

其中: $h = f / (K_v L)$; $u = x / L$; $\beta = K_h / K_v$; $\delta = d / L$ 。

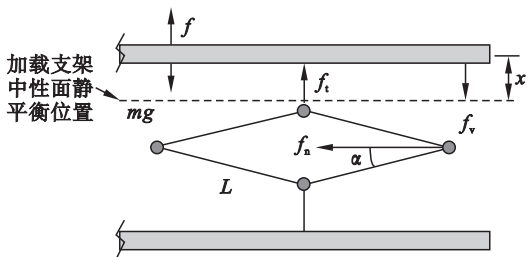


图 2 单侧结构的受力分析图
Fig. 2 Force analysis diagram of unilateral structures

QZS 系统的无量纲刚度为式(4)对 u 的微分

$$k(u) = 1 - 2\beta \left(\frac{4(\delta - 2)}{(4 - u^2)^{\frac{3}{2}}} + 1 \right). \tag{5}$$

令 $k(u = 0) = 0$,则准零刚度产生的条件为

$$\delta_{qzs} = \frac{1}{\beta}. \tag{6}$$

将式(6)代入式(4)得到

$$h_{qzs}(u) = u - \frac{2}{\delta_{qzs}} \left(\frac{\delta_{qzs} - 2}{\sqrt{4 - u^2}} + 1 \right) u, \tag{7}$$

$$k(u) = 1 - \frac{2}{\delta_{\text{qzs}}} \left(\frac{4(\delta_{\text{qzs}} - 2)}{(4 - u^2)^{\frac{3}{2}}} + 1 \right). \quad (8)$$

对于不同无量纲预压缩长度 δ_{qzs} , 随着加载支架位移的变化, 无量纲刚度曲线见图 3.

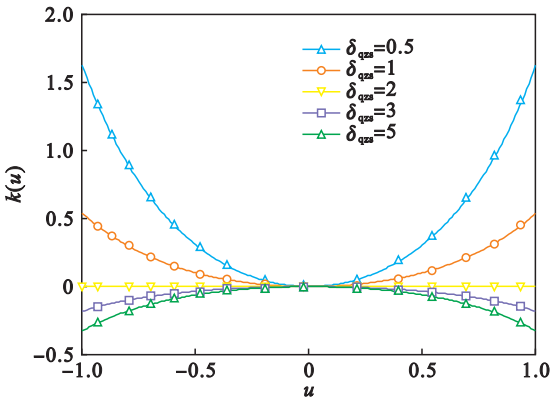


图 3 QZS 系统对于不同 δ_{qzs} 的无量纲刚度
Fig. 3 Dimensionless stiffness of QZS system for different δ_{qzs}

从图 3 可以观察到, 当 $\delta_{\text{qzs}} < 2$, QZS 系统的刚度都为正刚度, 并且随着 δ_{qzs} 的增大, 刚度曲线趋于平缓. 当 $\delta_{\text{qzs}} = 2$ 时, QZS 系统的刚度恒为零, 这表明隔振系统失去承载能力. 如果 $\delta_{\text{qzs}} > 2$, 刚度为负值, 在实际工程中是不允许发生的. 因此, δ_{qzs} 的合理区间是 $(0, 2)$.

将式(4)在 $u = 0$ 处展开为四阶泰勒级数, 即

$$h(u) = -2\beta \left(\frac{\delta}{16} - \frac{1}{8} \right) u^3 + (1 - \beta\delta)u. \quad (9)$$

将准零刚度条件即式(6)代入到式(9)中, 得到 $h_{\text{qzs}}(u) = \gamma u^3$, 其中定义 γ 为等同约化刚度, 其值可以通过改变水平弹簧与竖直弹簧的刚度比来进行调节, γ 的具体表达式为

$$\gamma = \frac{2 - \delta_{\text{qzs}}}{8 \cdot \delta_{\text{qzs}}} = \frac{K_h}{4 \cdot K_v} - \frac{1}{8}. \quad (10)$$

原始刚度表达式(7)和其泰勒展开式(9)的对比如图 4 所示. 可以观察到泰勒展开式结果与原始表达式结果吻合良好, 因此, 本文采用四阶泰勒级数展开是合理的.

典型 QZS 隔振器和本文设计的 X 型隔振器都具有准零刚度特性, 图 5 为这两种隔振器的无量纲刚度对比情况, 图中两条曲线都是在水平弹簧与竖直弹簧的刚度系数之比为 1 的情况下计算得到的. 可以看出本文设计的 X 型 QZS 隔振器相比于典型 QZS 隔振器具有更小的无量纲刚度 k , 特别是当 u 在区间 $(-1, -0.5)$ 和 $(0.5, 1)$ 时, 两者的 k 值差异更为明显. 较小的系统刚度意味着系统的共振频率较低^[1], 因此本文设计的 X 型隔振器可以有效地提高其低频隔振性能.

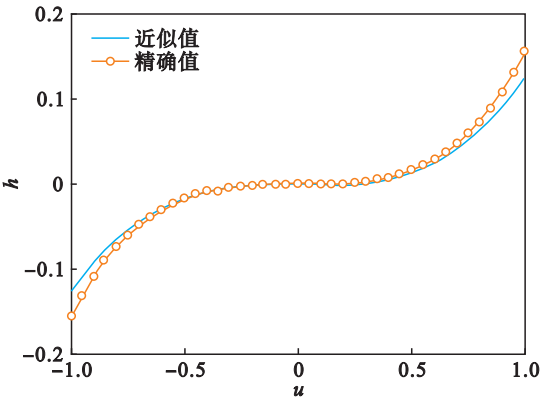


图 4 h 精确值与近似值对比图
Fig. 4 Comparison of exact and approximate values of h

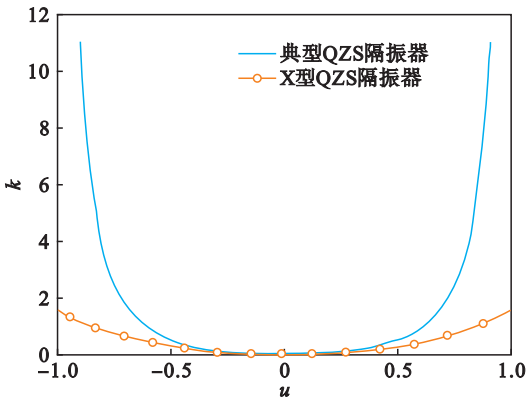


图 5 典型 QZS 隔振器与 X 型 QZS 隔振器的无量纲刚度 k 对比图
Fig. 5 Comparison of dimensionless stiffness k between a typical QZS isolator and an X-shaped QZS isolator

2 力传递率

2.1 幅频响应

简谐力作用下系统的运动方程为

$$m\ddot{x} + 2C\dot{x} + f(x) = F_e \cos(\omega t). \quad (11)$$

其中, F_e 和 ω 分别表示外部激励的幅值和频率, 引入无量纲参数, 并将已知表达式代入式(11)得到

$$\ddot{u} + 2\zeta\dot{u} + \gamma u^3 = f_e \cos(\Omega \tau). \quad (12)$$

式中: $u = x/L$; $\omega_0 = \sqrt{\frac{K_v}{m}}$; $\tau = \omega_0 t$; $\zeta = \frac{C}{2m\omega_0}$; $f_e = \frac{F_e}{K_v L}$; $\Omega = \frac{\omega}{\omega_0}$.

增量谐波平衡法 (IHB) 具有移植性强、改变参数灵活的许多优点, 下面将应用 IHB 法求解系统的动力学方程.

首先, 对方程(12)进行时间尺度变换, 即令

$t^* = \Omega \tau$, 式(12)关于新的时间变量 t^* 的微分方程为

$$\Omega^2 \ddot{u} + 2\zeta \Omega \dot{u} + \gamma u^3 = f_e \cos(t^*). \quad (13)$$

其次为 Newton - Raphson 增量步骤, 设 u_0 和 Ω_0 是方程(12)的解, 则其相邻位置的解可以用增量表示为

$$u = u_0 + \Delta u, \Omega = \Omega_0 + \Delta \Omega. \quad (14)$$

将式(14)代入式(13)并省略去高阶小量, 整理增量方程为

$$\Omega_0^2 \Delta u'' + 2\zeta \Omega_0 \Delta u' + 3\gamma u_0^2 \Delta u = \text{Re} - (2\Omega_0 u_0'' + 2\zeta \Omega_0 u_0') \Delta \Omega. \quad (15)$$

式中, Re 表示不平衡力,

$$\text{Re} = f_e \cos(t^*) - (\Omega_0^2 u_0'' + 2\zeta \Omega_0 u_0' + \gamma u_0^3). \quad (16)$$

当 $\text{Re} = 0$ 时, 求得 u_0 和 Ω_0 的精确解.

最后为谐波平衡过程, 设方程(13)的周期解 u 为

$$u = U A_0. \quad (17)$$

式中, $U = [1, \cos t^*, \dots, \cos i t^*, \sin t^*, \dots, \sin i t^*]$;

$$A_0 = [a_0, a_1, \dots, a_i, b_1, \dots, b_i]^T; \quad (18)$$

$$\Delta u = U \Delta A; \quad (19)$$

$$\Delta A = [\Delta a_0, \Delta a_1, \dots, \Delta a_i, \Delta b_1, \dots, \Delta b_i]^T. \quad (20)$$

将式(17) ~ 式(20)代入式(15), 并对式(15)在一个周期 2π 内进行 Galerkin 积分:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \delta \Delta u (\Omega_0^2 \Delta u'' + 2\zeta \Omega_0 \Delta u' + 3\gamma u_0^2 \Delta u) dt^* &= \\ \int_0^{2\pi} \delta \Delta u \text{Re} dt^* - \int_0^{2\pi} \delta \Delta u ((2\Omega_0 u_0'' + 2\zeta \Omega_0 u_0') \Delta \Omega) dt^*. \end{aligned} \quad (21)$$

由式(21)可以得到以 ΔA 和 $\Delta \Omega$ 为未知量的线性迭代方程为

$$K \Delta A = R + R_m \Delta \Omega. \quad (22)$$

式中:

$$\begin{aligned} K &= \int_0^{2\pi} U^T (\Omega_0^2 \ddot{U} + 2\zeta \Omega_0 \dot{U} + 3\gamma u_0^2 U) dt^*; \\ R_m &= - \int_0^{2\pi} U^T ((2\Omega_0 \ddot{U} + 2\zeta \dot{U}) A_0) dt^*; \\ R &= \int_0^{2\pi} U^T \text{Re} dt^*. \end{aligned}$$

为了验证增量谐波平衡法的有效性, 进行了基于 Runge - Kutta 的数值模拟, 两种方法得到的结果如图 6 所示. 可以看出, 解析解与数值解吻合较好, 这表明 IHB 法对于本文所研究的问题是有效且可靠的. 需要注意的是, Runge - Kutta 法无法得到不稳定解. 此外, 本文在求解系统的幅频曲线时还进一步结合了弧长法^[8], 由此可以获得完整的响应曲线, 从幅频曲线中还可以观察到系统鞍点分岔引起的跳跃现象^[9].

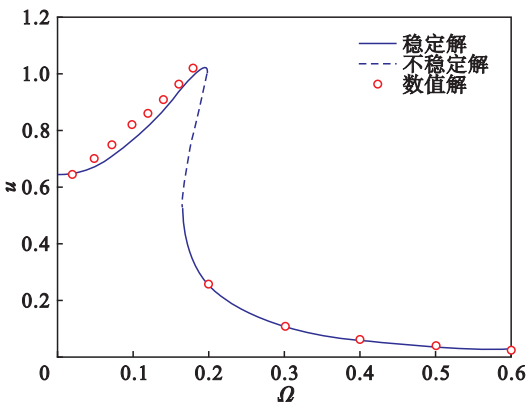


图 6 幅频曲线 ($\delta_{\text{qzs}} = 1.4, \zeta = 0.025, f_e = 0.01$)
Fig. 6 Amplitude-frequency curve ($\delta_{\text{qzs}} = 1.4, \zeta = 0.025, f_e = 0.01$)

2.2 力传递率

力的传递率^[10]是评估隔振器好坏的一个重要指标. 本系统的传递力表达式为

$$f_t = 2\zeta \dot{u} + \gamma u^3. \quad (23)$$

传递力的幅值可通过 IHB 求得的解 (即 u) 代入式(23)求出

$$F_t = \sqrt{\left(-2\zeta a_1 \Omega + \frac{3}{4} \gamma b_1^3 + \frac{3}{4} \gamma a_1^2 b_1\right)^2 + \left(2\zeta b_1 \Omega + \frac{3}{4} \gamma a_1^3 + \frac{3}{4} \gamma a_1 b_1^2\right)^2}. \quad (24)$$

因此, 本系统的力传递率可写成为

$$T_f = 10 \lg (F_t / f_e). \quad (25)$$

对于不同 γ 值, 系统的力传递率如图 7 所示. 从图中可以观察到, 在主共振区时, 等同约化刚度 γ 值的增大可以有效地减小力传递率, 而在较高的激励频率下, 等同约化刚度 γ 值的变化对系统隔振性能的影响不大.

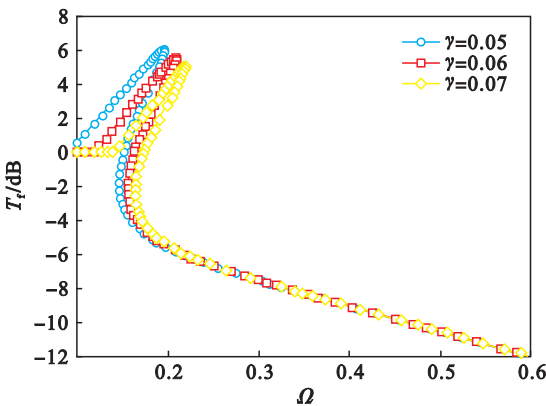


图 7 不同 γ 值对应的力传递率 ($\zeta = 0.025, f_e = 0.01$)
Fig. 7 Force transmissibility corresponding to different γ ($\zeta = 0.025, f_e = 0.01$)

3 位移传递率

3.1 幅频响应

在分析系统的位移传递率时,应去掉加载支架的外激励,这时应施加位移激励 $z = Z_e \cos(\omega t)$ 并且加载到基座上,见图 1,加载支架的位移是 x ,加载支架的相对运动方程为

$$m \ddot{y} + 2C \dot{y} + f(y) = mZ_e \omega^2 \cos(\omega t). \quad (26)$$

其中: $y = x - z$; Z_e 表示基座激励的幅值.

对式(26)进行无量纲化,并且采用前述的无量纲参数,得到

$$\ddot{\eta} + 2\zeta \dot{\eta} + \gamma \eta^3 = z_e \Omega^2 \cos(\Omega \tau). \quad (27)$$

其中: $\eta = y/L$; $z_e = Z_e/L$.

应用与 2.1 小节相同的分析过程,得到加载支架的幅频曲线,如图 8 所示,所采用的参数为 $\gamma = 0.065, \zeta = 0.0225, z_e = 0.2$. 从图中可以看出,由于非线性刚度的存在,使得曲线有向右弯的现象,这也说明本系统具有硬式非线性特性.

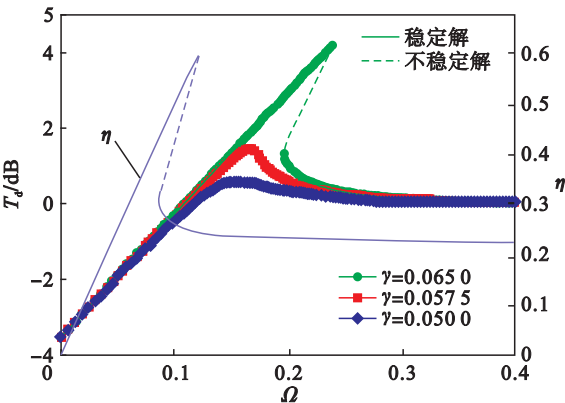


图 8 不同 γ 值对应的位移传递率及 $\gamma = 0.065$ 时的幅频曲线 ($\zeta = 0.0225, z_e = 0.2$)
Fig. 8 Displacement transmissibility corresponding to different γ ($\zeta = 0.0225, z_e = 0.2$)

3.2 位移传递率

位移传递率的定义为传递到加载支架的位移与基座位移幅值的比率,即

$$T_d = 10 \lg(A/z_e). \quad (28)$$

对于不同的 γ 值,本系统的位移传递率 T_d 如图 8 所示. 从图中可以观察到:随着等同约化刚度 γ 值减小,在共振区,系统的位移传递率急剧减小,而在较高的激励频率下位移传递率不受影响. 此外,等同约化刚度 γ 值的减小可以引起共振频率的减小,并且使得跳跃现象(不稳定解)消失.

4 结 论

1) 通过对系统的整体刚度分析,得出了准零

刚度产生的条件,即无量纲预压缩长度与无量纲刚度比的乘积为 1. 结果表明:无量纲预压缩长度 δ_{qzs} 的合理区间为 $(0, 2)$, 并定义了一个可以有效反映系统低频隔振效果的重要参数,即等同约化刚度 γ . 与典型 QZS 隔振器相比,本文设计的 X 型 QZS 隔振器具有更好的低频隔振性能.

2) 讨论了不同 γ 值对力传递率的影响,等同约化刚度 γ 值的增大可以显著地减小力传递率,而在较高的激励频率下,等同约化刚度 γ 值的变化对系统隔振性能的影响较弱.

3) 讨论了不同 γ 值对位移传递率的影响. 随着等同约化刚度 γ 值的减小,共振区的位移传递率急剧减小,而在较高的激励频率下的位移传递率不受其影响. 此外,等同约化刚度 γ 值的减小可以引起共振频率的减小,并且使得跳跃现象(不稳定解)消失.

参考文献:

[1] Jing X, Zhang L, Feng X, et al. A novel bio-inspired anti-vibration structure for operating hand-held jackhammers[J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2019, 118: 317 – 339.

[2] Naude A F, Snyman J A. Optimisation of road vehicle passive suspension systems. part 1. optimisation algorithm and vehicle model[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2003, 27(4): 249 – 261.

[3] Kamesh D, Pandiyan R, Ghosal A. Passive vibration isolation of reaction wheel disturbances using a low frequency flexible space platform[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2012, 331(6): 1310 – 1330.

[4] Yao G C, Huang W. Performance of a guideway seismic isolator with magnetic springs for precision machinery[J]. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 2010, 38(2): 181 – 203.

[5] Cheng C, Li S, Wang Y, et al. Force and displacement transmissibility of a quasi-zero stiffness vibration isolator with geometric nonlinear damping[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2016, 87(4): 1 – 13.

[6] Zhou J, Xu D, Bishop S. A torsion quasi-zero stiffness vibration isolator[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2015, 338: 121 – 133.

[7] Sun X, Jing X. Analysis and design of a nonlinear stiffness and damping system with a scissor-like structure[J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2016, 66/67: 723 – 742.

[8] Wu Z, Zhang Y, Yao G. Nonlinear primary and super-harmonic resonances of functionally graded carbon nanotube reinforced composite beams[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2019, 153/154: 321 – 340.

[9] Mirzaei M, Kiani Y. Snap-through phenomenon in a thermally postbuckled temperature dependent sandwich beam with FG-CNTRC face sheets[J]. *Composite Structures*, 2015, 134: 1004 – 1013.

[10] Lu Z, Brennan M J, Chen L. On the transmissibilities of nonlinear vibration isolation system[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2016, 375: 28 – 37.