

一种自适应 PC - Kriging 模型的结构可靠性分析方法

于震梁, 孙志礼, 张毅博, 王 健
(东北大学 机械工程与自动化学院, 辽宁 沈阳 110819)

摘 要: 为提高小失效概率及耗时的复杂结构可靠性评估精度和效率,提出了一种基于 PC - Kriging (polynomial-chaos-based Kriging)模型与自适应 k - means 聚类分析相结合的结构可靠性分析方法. PC - Kriging 的回归基函数采用稀疏多项式最优截断集合来近似数值模型全局行为,并用 Kriging 来处理模型输出的局部变化.在基函数的建立上,PC - Kriging 采用最小角回归(LAR)计算功能函数可能的多项式基函数集的数量,同时用 Akaike 信息准则(AIC)来确定最优多项式形式.自适应 k -means 聚类分析确保每次迭代添加若干个对失效概率贡献较大的样本点.通过两个数值算例分析,结果表明所提出方法在能够保证失效概率估计值的有效性和准确性的同时减小结构功能函数的评估次数.

关 键 词: PC - Kriging;可靠性分析; k - means 聚类分析;自适应试验设计;蒙特卡罗方法
中图分类号: TB 114.3 **文献标志码:** A **文章编号:** 1005 - 3026(2020)05 - 0667 - 06

A Structural Reliability Analysis Method Based on Adaptive PC-Kriging Model

YU Zhen-liang, SUN Zhi-li, ZHANG Yi-bo, WANG Jian
(School of Mechanical Engineering & Automation, Northeastern University, Shenyang 110819, China.
Corresponding author: YU Zhen-liang, E-mail: yuzhenliang_neu@163.com)

Abstract: To improve the accuracy and efficiency of reliability assessment for complex structures with small failure probability and time-consuming model, a structural reliability analytical method based on PC-Kriging (polynomial-chaos-based Kriging) model and adaptive k -means clustering analysis was proposed. PC-Kriging's regression basis function approximated the global behavior of the numerical model by using the sparse polynomial optimal truncation set, and Kriging was used to deal with the local variation of the output of the model. PC-Kriging used least angle regression (LAR) to calculate the number of possible polynomial basis function sets of performance function, and adopted Akaike information criterion (AIC) to determine the optimal polynomial form. The adaptive k -means clustering analysis ensured that some of the significant contribution sample points toward the failure probability can be added as the new training samples in each iteration. The results of two numerical examples indicated that the proposed method can not only guarantee the validity and accuracy of the estimation of failure probability but also reduce structural performance function evaluation times.

Key words: PC-Kriging (polynomial-chaos-based Kriging); reliability analysis; k -means clustering analysis; adaptive design of experiment; Monte Carlo method

随着结构可靠性评估和稳健性设计概念在现代工程可靠性分析中的日益深入,可靠性分析法也得到了广泛发展和进一步研究.由于在实际工程问题中其功能函数往往是隐式的(强非线性

或耗时的),采用经典分析技术如一阶可靠度法(FORM)、二阶可靠度法(SORM)^[1]、蒙特卡罗模拟法(MCS)在精度和时间成本上往往难以接受.因此,采用代理模型法(如响应面法^[2]、人工神经网络^[3]、支持向量机^[4]、Kriging^[5]等)来近似功能函数计算可靠性得到了迅速发展.

Kriging 代理模型^[6]是一种精确的插值方法且具有随机性,不仅能提供未采样点的预测值,还能对预测方差进行估计.因此,该方法在结构可靠性分析中得到了广泛应用.为了进一步提高模型的计算精度和效率,一些学者对传统的 Kriging 模型进行了改进研究,如在建立 Kriging 模型的过程中加入样本点函数值的同时也考虑了其函数值的梯度信息值,这种模型被称为 Co-Kriging 模型^[7]或梯度增强 Kriging (gradient-enhanced Kriging, GEK)^[8],在此基础上, Han 等^[9]为进一步提高 GEK 的计算效率,提出了改进的梯度增强 Kriging 方法(weighted gradient-enhanced Kriging, WGEK). Schoebi 等^[10]提出了一种基于多项式混沌展开 (polynomial-chaos-expansion, PCE) 和 Kriging 模型相结合的可靠性方法 (polynomial-chaos-based Kriging, PC-Kriging). 在分析比较复杂工程结构问题时,往往采用试验设计的思想.因此,若干种自适应试验设计 (DoE) 策略已被构建,如 Bichon 等^[11]通过所提的 EFF 函数选择距极限状态最近的样本点作为新增训练点. Echard 等^[12]提出 U 函数来衡量未测点符号预测错误的概率,并将 U 值最小的点定义为最佳样本点.

上述这些基于自适应 DoE 策略的学习函数能够有效地提高 Kriging 模型的准确性和效率.然而,由文献[13]可知具有不同基函数的 Kriging 模型的准确性是不同的,使得 Kriging 模型在高阶的可靠性分析中难以计算.为了解决这类问题,提出了一种基于 PC-Kriging 和自适应 k -means 相结合的结构可靠性分析方法 (APC-Kriging). 首先,PC-Kriging 是一种改进的 Kriging 算法,其回归基函数采用稀疏多项式最优截断集合来近似数值模型全局行为,而用 Kriging 来处理模型输出的局部变化,在保证精度的同时提高了计算效率.其次,常见的可靠性方法的采集样本点为逐个采集,而本文的自适应 k -means 聚类分析将空间分成若干个区域,并从每个区域选取一个最佳样本点,从而使多个区域同时达到提高 PC-Kriging 模型精度的目的,从而再次提升模型的计算效率.

1 PC-Kriging 模型

在构造结构功能函数 $G(\mathbf{x})$ 的近似代理模型时, Kriging 将其假定为由确定性 $\mathbf{g}(\mathbf{x})^T \boldsymbol{\beta}$ 和随机性 $\mathbf{z}(\mathbf{x})$ 两部分组成,即

$$G(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{x})^T \boldsymbol{\beta} + \mathbf{z}(\mathbf{x}). \quad (1)$$

其中:向量 \mathbf{x} 为包含 M 个对结构状态(即功能函数)产生影响的基本随机变量的集合; $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ 为模型基函数,即在 PC-Kriging 模型中改进的部分; $\boldsymbol{\beta}$ 为基函数的系数矢量; $\mathbf{z}(\mathbf{x})$ 为均值为 0 的高斯随机过程,其协方差为

$$\text{Cov}[\mathbf{z}(\mathbf{x}_i), \mathbf{z}(\mathbf{x}_j)] = \sigma^2 R(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j; \boldsymbol{\theta}). \quad (2)$$

式中: σ 为 $\mathbf{z}(\mathbf{x})$ 的标准差; $R(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j; \boldsymbol{\theta})$ 为 $\mathbf{z}(\mathbf{x}_i)$ 和 $\mathbf{z}(\mathbf{x}_j)$ 间的带有参数 $\boldsymbol{\theta}$ 的相关系数,通常为应用最广泛的高斯相关函数.

$$R(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j; \boldsymbol{\theta}) = \prod_{m=1}^M \exp[-\theta_m (x_i^m - x_j^m)^2]. \quad (3)$$

式中, θ_m, x_i^m, x_j^m 分别为矢量 $\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j$ 的第 m 个元素.

给定 N 个训练样本 $\mathbf{S}_{\text{DoE}} = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N]$ 及其对应的结构状态值 $\mathbf{Y} = [y_1, y_2, \dots, y_N]$, $G(\mathbf{x})$ 预测值的无偏估计及其方差为

$$\mu_G(\mathbf{x}) = \hat{G}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{x})^T \hat{\boldsymbol{\beta}} + \mathbf{r}(\mathbf{x})^T \boldsymbol{\gamma}, \quad (4)$$

$$\sigma_G^2(\mathbf{x}) = \hat{\sigma}^2 (1 + \mathbf{u}(\mathbf{x})^T (\mathbf{G}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{G})^{-1} \mathbf{u}(\mathbf{x}) - \mathbf{r}(\mathbf{x})^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{r}(\mathbf{x})). \quad (5)$$

式中:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{G}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{Y},$$

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{Y} - \mathbf{G} \hat{\boldsymbol{\beta}}),$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N} (\mathbf{Y} - \mathbf{G} \hat{\boldsymbol{\beta}})^T \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{Y} - \mathbf{G} \hat{\boldsymbol{\beta}}),$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{G}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{r}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{x}),$$

$$\mathbf{R} = (R(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j; \boldsymbol{\theta}))_{N \times N},$$

$$\mathbf{G} = [\mathbf{g}(\mathbf{x}_1), \dots, \mathbf{g}(\mathbf{x}_N)]^T.$$

其中,参数向量 $\boldsymbol{\theta}$ 需采用极大似然估计获取.

$$\max L(\boldsymbol{\theta}) = -(N \ln(\hat{\sigma}^2) + \ln[\det(\mathbf{R})]).$$

PC-Kriging 采用多项式混沌展开替代传统 Kriging 模型的回归基函数来增强预测模型的全局近似精度,并利用 Kriging 模型来捕捉预测模型局部特征的能力.采用最小角回归(LAR)构建回归基函数的最优多项式数量集,同时用 Akaike 信息准则(AIC)来确定最优的截断集合.

令 $\pi_j^{(m)} (j = 1, 2, \dots)$ 表示希尔伯特空间 $L^2(\mathbf{R}, f_{X_i})$ 的完全正交基,这意味着 $\pi_j^{(m)} (j = 1, 2, \dots)$ 是 f_{X_i} 上的正交函数系列.

$$\int \pi_i^{(m)}(\mathbf{x}) \pi_j^{(m)}(\mathbf{x}) f_{X_i}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \begin{cases} 0, i \neq j; \\ 1, i = j. \end{cases} \quad (6)$$

式中, $f_{X_i}(\mathbf{x})$ 为 \mathbf{x} 的第 i 个边缘概率密度函数.

一个完备的 Hilbert 空间 $L^2(\mathbf{R}, f)$ 的标准正交基(f 表示 \mathbf{x} 的联合概率密度函数)是

$$\psi_{\alpha}(\mathbf{x}) = \prod_{m=1}^M \pi_{\alpha_m}^{(m)}(x_m).$$

其中, $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_M]$ 是一个自然数的 M 维向量. 这里, 满足总项数 $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_M$ 不超过给定阈值 T_0 的项将被保留作为 Kriging 模型基函数的候选项. 基函数的候选项 A^{M, T_0} 可表示为 $A^{M, T_0} = \{\alpha \in \mathbf{N}^M, |\alpha| \leq T_0\}$, A^{M, T_0} 中项数的数量可由 P 表示:

$$P = \text{card}(A^{M, T_0}) = \binom{M + T_0}{T_0}. \quad (7)$$

然后, 考虑基函数的所有候选项的“完备”设计矩阵:

$$\mathbf{G}^{M, T_0} = [\psi_{\alpha_0}, \psi_{\alpha_2}, \dots, \psi_{\alpha_{P-1}}],$$

$$\psi_{\alpha_i} = [\psi_{\alpha_i}(\mathbf{x}_1), \psi_{\alpha_i}(\mathbf{x}_2), \dots, \psi_{\alpha_i}(\mathbf{x}_N)]^T.$$

式中: $\alpha_i \in A (i = 0, 1, \dots, P - 1)$; $\mathbf{x}_n \in S_{\text{DoE}} (n = 1, 2, \dots, N)$.

根据式(7), 如果将 A^{M, T_0} 中的所有候选函数用作 Kriging 模型的基函数, 则函数调用的次数将随着 T_0 的增加而急剧增加. 为了避免这类问题, 在构造稀疏多项式 Kriging 模型的基函数时, 采用 LAR^[14] 理论定义了函数的基函数集个数, 并用 AIC^[15] 准则来确定哪一个最佳的. 最后, 保留中间的候选项以确保 Kriging 模型的准确性, 同时大大减少函数调用的数量(即保留对模型贡献更多的候选项). 选择 Kriging 模型基函数的主要步骤:

步骤 1 设置相关参数值, 即保留多项式 T_0 的最大阶次和基函数 p_{\max} 的最多项数, 本文设 $T_0 = 3, p_{\max} = 0.5 \text{card}(S_{\text{DoE}})$. $H = \min\{P, p_{\max}\}$.

步骤 2 初始化所有候选项中的系数 $a_{\alpha_i} = 0 (i = 0, 1, \dots, P - 1)$. 根据 LAR 理论, 初始化后的剩余项等于结构响应 \mathbf{Y} .

步骤 3 找出 $\psi_{\alpha_i} (i = 0, 1, \dots, P - 1)$ 与当前残差之间相关系数最大的矢量 $\psi_{\alpha_1}, \mathbf{G}_1 = \psi_{\alpha_1}$.

步骤 4 $h = 2$. 调整 a_{α_1} 在 \mathbf{G}_1 上当前残差的最小二乘系数的方向, 直到另一个向量 ψ_{α_2} 与 \mathbf{G}_1 具有相同的相关系数. $\mathbf{G}_h = [\mathbf{G}_1, \psi_{\alpha_2}], \mathbf{a} = [a_{\alpha_1}, a_{\alpha_2}]$.

步骤 5 $h = h + 1$. 共同移动 \mathbf{a} 朝向当前残差为 \mathbf{G}_{h-1} 的联合最小二乘系数, 直到向量 ψ_{α_h} 与当

前残差 \mathbf{G}_{h-1} 具有相同的相关系数.

$$\mathbf{G}_h = [\mathbf{G}_{h-1}, \psi_{\alpha'_h}], \mathbf{a} = [a_{\alpha'_1}, a_{\alpha'_2}, \dots, a_{\alpha'_h}].$$

步骤 6 重复步骤 5, 直到满足 $h = H$.

步骤 7 计算 $\mathbf{G}_h (h = 1, \dots, H)$ 的 AIC 值:

$$\text{AIC}_h = M \ln(\text{SSE}_h) + 2h.$$

其中, $\text{SSE}_h = [\mathbf{G}_h (\mathbf{G}_h^T \mathbf{G}_h)^{-1} \mathbf{G}_h \mathbf{Y} - \mathbf{Y}]^T \times [\mathbf{G}_h (\mathbf{G}_h^T \mathbf{G}_h)^{-1} \mathbf{G}_h \mathbf{Y} - \mathbf{Y}]$.

步骤 8 找到最小的 $\text{AIC}_h (h = 1, \dots, H), p = \arg \min_h \{\text{AIC}_h; h = 1, \dots, H\}$, 对于 S_{DoE} 和 \mathbf{Y} , PC - Kriging 模型的最优基函数为

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = [\psi_{\alpha'_1}(\mathbf{x}), \psi_{\alpha'_2}(\mathbf{x}), \dots, \psi_{\alpha'_p}(\mathbf{x})]^T. \quad (8)$$

2 自适应 PC - Kriging 方法

构造完近似代理模型后, 结构的失效概率可通过式(9)近似计算:

$$\hat{P}_f \approx \frac{1}{N_{\text{MC}}} \sum_{i=1}^{N_{\text{MC}}} I_{\hat{G} \leq 0}(\mathbf{x}_{\text{MC}, i}). \quad (9)$$

式中: N_{MC} 为蒙特卡罗样本数; $I_{\hat{G}}(\mathbf{x})$ 为失效指示函数, 当 $\hat{G}(\mathbf{x}) \leq 0$ 时, $I_{\hat{G}}(\mathbf{x}) = 1$; 否则, $I_{\hat{G}}(\mathbf{x}) = 0$.

然而, 失效概率估计值 \hat{P}_f 的精度取决于 $\hat{G}(\mathbf{x}) = 0$ 与 $G(\mathbf{x}) = 0$ 间的“距离”, 在 $\hat{G}(\mathbf{x}) \neq 0$ 的区域, 只要 $\hat{G}(\mathbf{x})$ 与 $G(\mathbf{x})$ 的符号相同, 就不会对 \hat{P}_f 的精度产生影响; 当 $\hat{G}(\mathbf{x}) = 0$ 与 $G(\mathbf{x}) = 0$ 完全重合时, $\hat{P}_f = P_f$. 因此, 本文提出自适应策略的思想是在 $\hat{G}(\mathbf{x}) = 0$ 上选取对失效概率贡献大的若干个, 并计算出所选若干个点的结构响应值, 在迭代过程中不断更新 $\hat{G}(\mathbf{x}) = 0$, 进而使 $\hat{G}(\mathbf{x}) = 0$ 逐渐接近 $G(\mathbf{x}) = 0$ 直至满足收敛条件.

2.1 自适应 PC - Kriging 方法

所提出的 k - means 聚类分析自适应策略选取样本点方法步骤:

步骤 1 $t = 0$, 最初的试验设计样本点是由拉丁超立方随机采样生成的, 并精确地计算出相应的功能函数响应值, 即计算 $\hat{G}_0(\mathbf{x}), \bar{P}_{f, 0}$. 设初始样本点个数为 M_0 , 则有

$$\Omega_0 = \{(\mathbf{x}_{0,i}, \mathbf{y}_{0,i}), i = 1, 2, \dots, M_0\},$$

$$\mathbf{X}_0 = \{\mathbf{x}_{0,1}, \mathbf{x}_{0,2}, \dots, \mathbf{x}_{0,M_0}\}.$$

步骤 2 $t = t + 1$, 在 $\hat{G}_{t-1}(\mathbf{x}) = 0$ 上通过马尔科夫链蒙特卡罗模拟法(MCMC)产生 K 个点. 给定 $\hat{G}_{t-1}(\mathbf{x})$, 采用 MCMC 法生成 M 维服从 $f(\mathbf{x})$ ($f(\mathbf{x})$ 为 \mathbf{x} 的联合概率密度函数)且满足式(10)的随机向量, 则认为随机抽取的点在 $\hat{G}_{t-1}(\mathbf{x}) = 0$ 上. 当抽取的点的数量达到 K 个时随机抽取过程停止, 则生成的随机向量为 $\tilde{\mathbf{X}}_{t-1} = \{\tilde{\mathbf{x}}_{t-1,1}, \tilde{\mathbf{x}}_{t-1,2},$

$\cdots, \tilde{\mathbf{x}}_{t-1,K}\}$, 本文令 K 为 2 000, $[\varepsilon]$ 为 0.01.

$|\hat{G}_{t-1}(\mathbf{x})| \leq [\varepsilon]. \tag{10}$

步骤 3 采用 k -means 聚类分析方法将 $\tilde{\mathbf{X}}_{t-1}$ 分成 k 个类别, 并将这 k 类别的中心点映射到 $\hat{G}_{t-1}(\mathbf{x}) = 0$ 上. 令 $\{s_{t-1,1}, s_{t-1,2}, \cdots, s_{t-1,k}\}$ 表示 k 个聚类中心. 当 $\hat{G}_{t-1}(\mathbf{x}) = 0$ 为非线性曲面时, 则不能保证这 k 类别的中心点都在 $\hat{G}_{t-1}(\mathbf{x}) = 0$ 上, 这时就需要将未在 $\hat{G}_{t-1}(\mathbf{x}) = 0$ 上的中心点映射到 $\hat{G}_{t-1}(\mathbf{x}) = 0$ 上. 映射方法为找到满足式(11)的点, 并得到 $S_{t-1} = \{\hat{s}_{t-1,0}, \hat{s}_{t-1,1}, \cdots, \hat{s}_{t-1,k}\}$, 其中 $\hat{s}_{t-1,0}$ 为 $\hat{G}_{t-1}(\mathbf{x})$ 的设计点.

$$\begin{aligned} \min \|\mathbf{x} - s_{t-1,i}\|, \\ \text{s. t. } \hat{G}(\mathbf{x}) = 0. \end{aligned} \tag{11}$$

其中, $i = 1, 2, \cdots, k$.

步骤 4 调整集合 S_{t-1} 中各点位置. 定义距离 D_0 , 如式(12)所示. 假设在集合 S_{t-1} 中如果任意两个样本点之间的距离小于 D_0 时可视为是不能接受的, 此时需要将集合 S_{t-1} 中个别点位置进行调整.

$$D_0 = e \cdot \left(\frac{2}{M(M-1)} \sum_{i < j} \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\| \right). \tag{12}$$

式中 e 为给定常数.

集合 S_{t-1} 中各点可能出现两种情况: ① S_{t-1} 内部某些点间的距离可能过小. $\hat{s}_{t-1,0}$ 与 $\hat{s}_{t-1,1}, \cdots, \hat{s}_{t-1,k}$ 中某些点距离很小的可能性较大; ② S_{t-1} 中的某个点与 \mathbf{X}_{t-1} 中某些点间的距离过小. 若出现情况①, 比如 $\hat{s}_{t-1,1}$ 与 $\hat{s}_{t-1,2}$ 的距离小于 D_0 , 则要改变概率密度函数较小点的位置, 概率密度函数较大点的位置不变; 若出现情况②, 则改变 S_{t-1} 中对应点. 样本点位置调整的方法为, 假设先要改变 $\hat{s}_{t-1,1}$ 的位置, 将 $\tilde{\mathbf{X}}_{t-1}$ 中点按照与 $\hat{s}_{t-1,1}$ 距离升序排列, 依次将 $\hat{s}_{t-1,1}$ 变换至新序列各点位置, 直至满足 $\hat{s}_{t-1,1}$ 与所有 S_{t-1} 及 \mathbf{X}_{t-1} 中所有点距离都大于 D_0 .

步骤 5 计算出集合 S_{t-1} 中各样本点相对应的功能函数值. $\Omega_{t-1}^0 = \{(\hat{s}_{t-1,i}, y_{t-1,i}), i = 0, 1, \cdots, k\}$, $\Omega_t = \Omega_{t-1} \cup \Omega_{t-1}^0$.

步骤 6 根据 Ω_t 并结合式(4)、式(8)和式(9)计算 $\hat{G}(\mathbf{x})$, $\tilde{P}_{f,t}$. 若满足式(13)的收敛条件, 则迭代过程停止, $\tilde{P}_{f,t}$ 即为 P_f 估计值; 否则返回步骤 2, 直至 $\tilde{P}_{f,t}$ 满足收敛条件.

2.2 收敛条件

收敛条件采用文献[16]中的学习停止条件, 其基本思想为随着迭代过程进行, 符号预测错误的样本点数占总失效样本点数的比重很小时, 失效概率估计值满足精度要求, 学习过程停止, 其表达式为

$$\frac{N_{\text{un}}}{N_{\text{fail}}} \leq e'. \tag{13}$$

式中: N_{un} 为符号预测错误的样本总数; N_{fail} 则代表总失效样本数, e' 为 \hat{P}_f 的许用误差, 其中

$$\begin{aligned} N_{\text{un}} &= 2 \left(\frac{N_{U < P}}{2} + N_{P \leq U \leq Q} \cdot \Phi(-U) \right), \\ N_{\text{fail}} &= \sum_{i=1}^{N_{\text{MC}}} I_G(\mathbf{x}_i). \end{aligned} \tag{14}$$

式中, 用 $N_{U < P}$ 表明符号预测错误概率高的样本点, 这样的点可以看作一定失效的点. 用 $N_{P \leq U \leq Q}$ 表明符号预测错误概率较高的样本点, 这样的样本点可用 $N_{P \leq U \leq Q} \cdot \Phi(-U)$ 表明其失效预测错误的总个数. 本研究中, $P = 1, Q = 2, e' = 0.03$.

3 算 例

3.1 算例 1

选取文献[12]中具有多个设计点的状态函数, 其表达式为

$$G(\mathbf{x}) = \min \begin{cases} 3 + 0.1(x_1 - x_2)^2 - (x_1 + x_2)/\sqrt{2}; \\ 3 + 0.1(x_1 - x_2)^2 + (x_1 + x_2)/\sqrt{2}; \\ (x_1 - x_2) + 6/\sqrt{2}; \\ (x_2 - x_1) + 6/\sqrt{2}. \end{cases}$$

其中, x_1, x_2 为服从标准正态 $N(0, 1)$ 的独立同分布随机变量.

适当抽取构建初始 PC-Kriging 模型时所需样本点数, 设 $N_0 = 6$. 为取得分布较为均匀的初始样本点, 采用拉丁超立方抽样 (Latin hypercube sampling, LHS) 在 $[-5, 5]$ 区域内抽取初始样本点. 通过 Matlab 中的工具箱根据所提算法建立 PC-Kriging 预测模型, 并通过主动学习, 更新样本空间 DoE, 并不断提高模型精度, 重复该过程, 直到满足迭代停止条件, 结果见图 1、表 1. 其中, N_{it} 表示迭代次数, N_{call} 为调用样本点数, ε 为失效概率估计值与标准值的相对误差, 失效概率标准值由 MCS 方法计算得到.

通过图 1 和表 1 的结果对比, 可以发现 N_{call} 项所提方法需要最少的样本点就可以达到足够高精度, 而通过对 N_{it} 项, 因为应用到聚类分析, 使得在满足精度的要求下迭代次数得到大幅度的降低, 从而提高计算效率.

3.2 算例 2

选用文献[17]悬臂式圆柱筒结构(图 2), 它是一个拥有 9 个随机变量的高维非线性的工程结构实例, 该结构的 9 个输入随机变量分别为 $t, d,$

$L_1, L_2, F_1, F_2, P, T, S$. 其分布特征如表 2 所示.

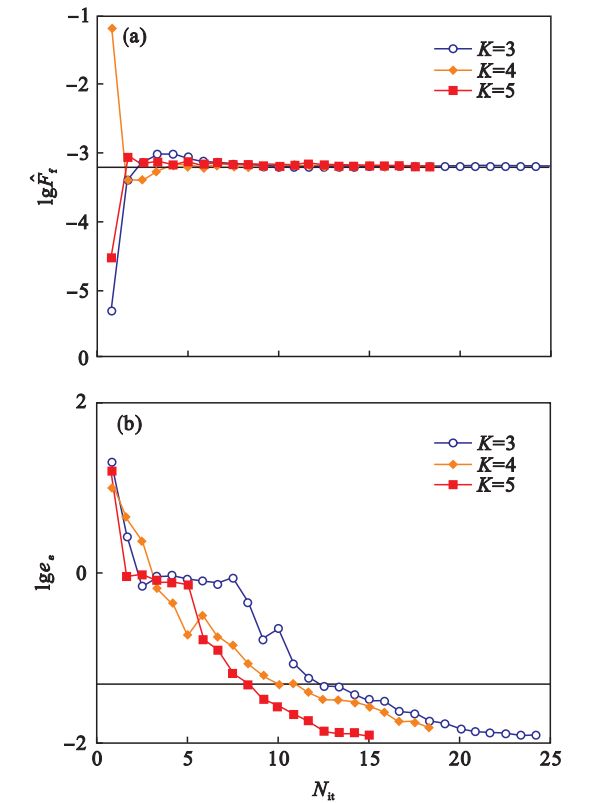


图 1 失效概率与相对误差变化趋势

Fig. 1 Failure probability and relative error trend
(a)—失效概率; (b)—相对误差.

表 1 二维算例结果对比

Table 1 Comparison of two-dimensional numerical results					
方法	N_{it}	N_{call}	$\hat{P}_f \times 10^3$	$\varepsilon \times 10^2$	
MCS	—	2.5×10^6	4.497	—	
AK – MCS + U	45	6 + 44	4.42	1.6	
AK – MCS + EFF	55	6 + 54	4.41	2	
AK – SSIS + H	59	6 + 58	4.38	2.5	
本文方法	$K = 3$	13	6 + 36	4.44	1.2
	$K = 4$	11	6 + 40	4.46	0.8
	$K = 5$	8	6 + 35	4.43	1.5

表 2 随机变量的分布特征

Table 2 Distribution of random variables			
变量	参数 1	参数 2	分布
t	5 mm(均值)	0.1(标准差)	正态
d	42 mm(均值)	0.5 mm(标准差)	正态
L_1	119.75 mm(下限)	120.25 mm(上限)	均匀
L_2	59.75 mm(下限)	60.25 mm(上限)	均匀
F_1	3.0 kN(均值)	0.3 kN(标准差)	正态
F_2	3.0 kN(均值)	0.3 kN(标准差)	正态
P	12.0 kN(均值)	1.2 kN(标准差)	耿贝尔
T	90.0 Nm(均值)	9.0 Nm(标准差)	正态
S	220 MPa(均值)	22 MPa(标准差)	正态

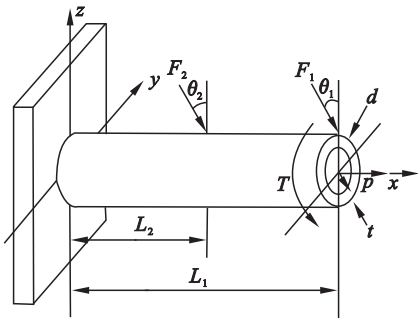


图 2 悬臂式圆筒结构
Fig. 2 Cantilever cylinder structure

图 2 中悬臂式圆筒结构受到外力 F_1, F_2, P 和扭矩 T 的作用,其功能函数表示为屈服强度 S 和最大应力 σ_{\max} 的差:

$$g(\boldsymbol{x}) = S - \sigma_{\max}.$$

其中: σ_{\max} 表示在 原点处筒上表面所受的最大等效应力; σ_x 为正应力; τ_{zx} 为扭应力.

$$\sigma_{\max} = \sqrt{\sigma_x^2 + 3\tau_{zx}^2},$$
$$\sigma_x = \frac{P + F_1 \sin \theta_1 + F_2 \sin \theta_2}{A} + \frac{Mc}{l}.$$

其中: $\theta_1 = 5^\circ; \theta_2 = 10^\circ, M$ 为弯矩, $M = F_1 L_1 \cos \theta_1 + F_2 L_2 \cos \theta_2; A = \frac{\pi}{4} [d^2 - (d - 2t)^2]; c = d/2;$

$$l = \frac{\pi}{64} \times [d^4 - (d - 2t)^4]; \tau_{zx} = \frac{Td}{2J}; J = 2l.$$

首先,采用 Nataf 变换将上述随机变量映射到标准正态空间,并在 $[-5, 5]^9$ 立方体内抽取 $N_0 = 11$ 个拉丁超立方随机样本点,再应用所提算法评估悬臂式圆柱筒的可靠性.所提算法与其他现有算法所得失效概率估计值随迭代次数的变化趋势如图 3 所示,其中横坐标为迭代次数 N_{it} ,纵坐标为失效概率估计值的对数形式.此外,表 3 列举了本文算法与其他方法所得结果.通过比较,不难发现本文算法相较于其他方法在效率和精度方面更具优势.

表 3 九维算例结果对比

方法	N_{it}	N_{call}	$\hat{P}_f \times 10^4$	$\varepsilon \times 10^3$	
MCS	—	10^{10}	1.500	—	
EGRA	94	105	1.502	0.13	
AK – MCS + U	72	83	1.503	0.2	
本文方法	$K=4$	16	11 + 60	1.502	0.13
	$K=5$	13	11 + 60	1.501	0.067
	$K=6$	12	11 + 66	1.501	0.067

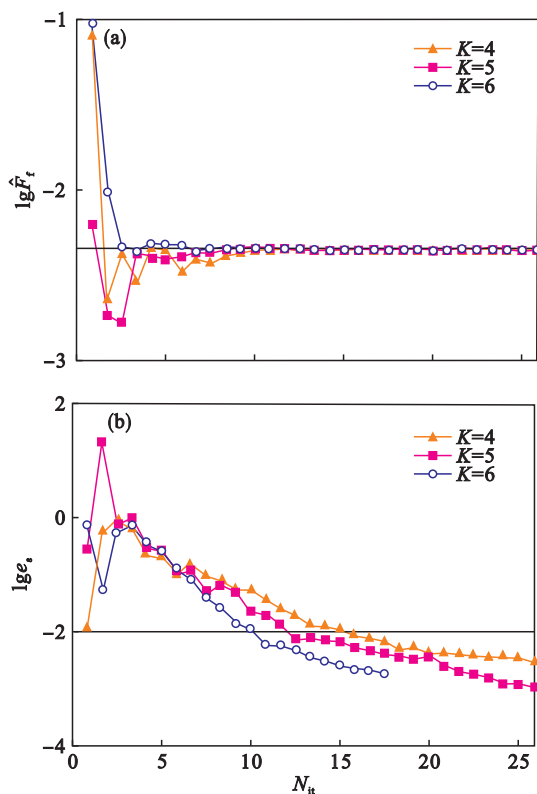


图 3 失效概率与相对误差变化趋势

Fig. 3 Failure probability and relative error trend

(a) —失效概率; (b) —相对误差.

4 结 论

1) 本文提出了一种新的改进 Kriging 基函数与 k -means 聚类分析相结合的可靠性分析方法. 使得 PC-Kriging 方法在基函数回归方面具有更大的灵活性. 结合 k -means 聚类分析方法的自适应策略在每次迭代时添加多个新增样本来提高计算效率.

2) 通过与两个算例中 MCS 抽样计算的结果对比可知, 所提出的算法与 MCS 模拟较为接近, 从而验证了本文所提算法计算精度的正确性.

3) 通过对比的可靠性分析结果可以发现, 所提方法相对于 AK-MCS+U 和 AK-MCS+EFF 将迭代次数降低同时提高了估计精度, 说明所提方法具有更快的效率以及更高的精度.

4) 所提方法亦可适用于解决功能函数为隐式多维非线性问题, 这为解决实际工程中的可靠性评估问题提供了重要的参考价值.

参考文献:

[1] Zhao Y G, Ono T. A general procedure for first/second-order reliability method (FORM/SORM) [J]. *Structural Safety*, 1999, 21(2): 95–112.

[2] Xiong F, Liu Y, Ying X. A double weighted stochastic response surface method for reliability analysis [J]. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 2012, 26(8): 2573–2580.

[3] Schueremans L, Gemert D V. Benefit of splines and neural networks in simulation based structural reliability analysis [J]. *Structural Safety*, 2005, 27(3): 246–261.

[4] Alibrandi U, Alani A M, Ricciardi G. A new sampling strategy for SVM-based response surface for structural reliability analysis [J]. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2015, 41: 1–12.

[5] Kaymaz I. Application of Kriging method to structural reliability problems [J]. *Structural Safety*, 2005, 27(2): 133–151.

[6] Qiu Y S, Bai J Q. Stationary flow fields prediction of variable physical domain based on proper orthogonal decomposition and Kriging surrogate model [J]. *Chinese Journal of Aeronautics*, 2015, 28(1): 44–56.

[7] Han Z H, Zimmerman R, Görtz S. Alternative co-Kriging method for variable-fidelity surrogate modeling [J]. *AIAA Journal*, 2012, 50(5): 1205–1210.

[8] Han Z H, Görtz S, Zimmermann R. Improving variable-fidelity surrogate modeling via gradient-enhanced Kriging and a generalized hybrid bridge function [J]. *Aerospace Science & Technology*, 2013, 25(1): 177–189.

[9] Han Z H, Zhang Y, Song C X, et al. Weighted gradient-enhanced Kriging for high-dimensional surrogate modeling and design optimization [J]. *AIAA Journal*, 2017, 55(12): 4330–4346.

[10] Schoebi R, Sudret B, Wiart J. Polynomial-chaos-based-Kriging [J]. *International Journal for Uncertainty Quantifications*, 2015, 5(2): 171–193.

[11] Bichon B J, Eldred M S, Swiler L P, et al. Efficient global reliability analysis for nonlinear implicit performance functions [J]. *AIAA Journal*, 2008, 46(10): 2459–2468.

[12] Echard B, Gayton N, Lemaire M. AK-MCS: an active learning reliability method combining Kriging and Monte Carlo simulation [J]. *Structural Safety*, 2011, 33(2): 145–154.

[13] Gaspar B, Teixeira A P, Soares C G. Assessment of the efficiency of Kriging surrogate models for structural reliability analysis [J]. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2014, 37(4): 24–34.

[14] Efron B, Hastie T, Johnstone I, et al. Least angle regression [J]. *Annals of Statistics*, 2004, 32(2): 407–451.

[15] Arnold T W. Uninformative parameters and model selection using Akaike's information criterion [J]. *Journal of Wildlife Management*, 2011, 74(6): 1175–1178.

[16] 孙志礼, 李瑞, 王健, 等. 一种用于结构可靠性分析的 Kriging 学习函数 [J]. 哈尔滨工业大学学报, 2017, 49(7): 146–151.

(Sun Zhi-li, Li Rui, Wang Jian, et al. A Kriging based learning function for structural reliability analysis [J]. *Journal of Harbin Institute of Technology*, 2017, 49(7): 146–151.)

[17] Wen Z, Pei H, Liu H, et al. A sequential Kriging reliability analysis method with characteristics of adaptive sampling regions and parallelizability [J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2016, 153: 170–179.