

熔丝加工成型薄板的动力学特性及响应

姜世杰, 孙明宇, 董天阔, 陈丕峰
(东北大学 机械工程与自动化学院, 辽宁 沈阳 110819)

摘 要: 通过熔丝加工成型(fused filament fabrication, FFF)理论与实验相结合,研究了悬臂边界条件下 FFF 薄板的固有特性和振动响应. 首先,针对 FFF 薄板的分层和正交各向异性等特点,基于正交多项式法对其进行理论建模. 然后,通过 Ritz 法获取 FFF 薄板的固有特性,再利用频域振动方程解析研究薄板内任意一点的振动响应. 最后,以聚乳酸(PLA)FFF 薄板为例,实验研究了其固有特性和动态响应,以分析验证理论模型的正确性. 结果表明:本文建立的 FFF 薄板理论模型,能够准确预测出薄板的固有特性和动态响应结果,理论模型可靠.

关 键 词: 熔丝加工成型;固有特性;振动响应;正交多项式法;实验研究

中图分类号: TB122 **文献标志码:** A **文章编号:** 1005-3026(2020)05-0673-06

Dynamic Characteristics and Responses of Fused Filament Fabrication Thin Plates

JIANG Shi-jie, SUN Ming-yu, DONG Tian-kuo, CHEN Pi-feng
(School of Mechanical Engineering & Automation, Northeastern University, Shenyang 110819, China.
Corresponding author: SUN Ming-yu, E-mail:1870183@stu.neu.edu.cn)

Abstract: The inherent characteristics and vibration responses of thin plates by FFF (fused filament fabrication) under cantilever boundary conditions were studied by combining FFF theory with experiments. Firstly, considering the property of lamination and orthogonal anisotropy, the fused filament fabricated thin plate(fused plate) was theoretically modeled based on the orthogonal polynomial method. Then, the dynamic characteristics of the fused plate were worked out by Ritz method, and the vibration response of any point in the fused plate was analyzed by using the frequency domain vibration equation. Finally, Poly lactic acid (PLA) thin plate was studied experimentally to determine its measured dynamic characteristics and vibration responses. It was found through the comparison that the developed theoretical model of the fused plate based on orthogonal polynomial method was capable to give accurate predictions on the dynamic characteristics and vibration response, thus validating the feasibility of the model.

Key words: fused filament fabrication (FFF); inherent characteristics; vibration response; orthogonal polynomial method; experimental study

熔丝加工成型(fused filament fabrication, FFF)技术广泛应用于快速成型制造和特定产品加工,能生产任意复杂几何形状的设计结构^[1]. 其工作原理是利用驱动齿轮将丝状原材料输送到热熔喷嘴中,根据计算机辅助设计出的轮廓,喷嘴将熔融状态的材料挤出,逐层累加堆积,并之前挤出的材料凝固粘结,形成最终的零件^[2-3]. 然而,由于诸如孔之类以及逐层累加堆积引起的无层间压力等缺陷,FFF 生产的工件的机械性能还远不如传统加工工件,减缓了 FFF 技术的发展速度.

目前,FFF 技术被广泛应用到航空航天、汽车船舶和医疗卫生等实际工作领域中,随着工作环境越来越严苛,尤其是在动态循环载荷的作用下,

亟需对制品进行更为实际的动力学分析以准确判定和预测 FFF 零件的稳定性和可靠性. Arivazhagan 等^[4]利用 DMA 2980 设备对 FFF 样件进行了 0 ~ 100 Hz 频率范围内的动力学特性参数的扫频试验,结果表明储能模量随温度的升高而增加,黏度随温度的升高而降低. Mohamed 等^[5-6]采用相似的方法研究了纤维角度、打印间隙等 FFF 工艺参数对动态弹性模量的影响,结果表明动态弹性模量随着光栅角、打印间隙、路径宽度及打印方向等参数的增加而减小;且通过实验验证了最佳处理参数.然而,以上研究都是基于实验测试开展的,缺乏理论依据;尽管实验是在循环振动载荷条件下进行的,但是研究中只考虑了杨氏模量、储能模量等参数的变化情况,未超出材料力学特性的研究范畴.鲜有学者针对 FFF 工件进行固有特性(固有频率和模态振型)、振动响应等动力学方面的研究.

本研究针对 FFF 薄板结构的动力学特性及振动响应建立了理论模型,以深入了解 FFF 薄板尤其在动态载荷作用下的稳定性和可靠性,为改善 FFF 产品的动力学性能提供理论基础.因此,研究 FFF 薄板的固有特性和振动响应有着重要的理论价值和实际意义^[7].

截至目前,研究人员在不同结构薄板的固有特性和振动响应方面进行了大量的研究与论证. Mochida 等^[8]利用叠加法和有限差分法计算了自由矩形薄板的固有频率.其中,叠加法给出了上限结果,有限差分法给出了下限结果. Ramu 等^[9]基于基尔霍夫理论,使用有限元法计算了简支矩形薄板的刚度矩阵和质量矩阵,通过研究这些矩阵的特征值问题确定了薄板的固有频率.研究结果表明,该方法可以成功应用于任何矩形薄板结构的自由振动分析. Zhong 等^[10]利用有限积分方法推导了矩形悬臂薄板的固有频率和模态振型.该方法具有计算简便、速度快、精度高等特点,为得到薄板准确的固有特性结果提供了高效、便捷的方法. Lin 等^[11]利用双余弦积分变换解析方法研究了自由边界条件下加筋板的振动特性,理论分析了加筋板的自由和受迫振动响应.

由于 FFF 成型过程的特殊性,其成型薄板具有多层、工艺参数复杂、高度各向异性等结构特点,使得相应的固有特性及振动响应研究变得十分复杂.为此,本文首次开展了悬臂边界条件下 FFF 薄板的固有特性及振动响应研究,研究成果可以为改善 FFF 产品动力学性能提供理论基础和技术支持.

1 FFF 薄板动力学特性及响应分析

1.1 固有特性理论分析

本文所研究的 FFF 薄板由多层聚乳酸 (PLA) 纤维材料组成,具有明显的正交各向异性特征,图 1 为矩形板的几何模型,其长度 L_g 为 150 mm,宽度 W_d 为 50 mm,总厚度 h 为 2.4 mm (每层的厚度为挤出长丝的挤出宽度).以板的中心平面为 xoy 平面,建立三维坐标系($o-xyz$),长度、宽度和厚度方向由 x, y 和 z 表示.

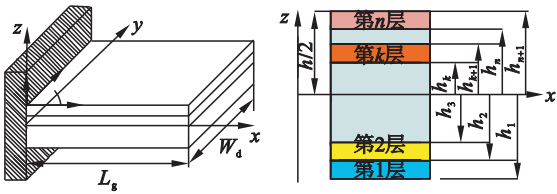


图 1 FFF 薄板理论模型
Fig. 1 The theoretical model of FFF thin plate

基于经典层合板理论^[12],可将 FFF 薄板的位移场写为

$$\left. \begin{aligned} u(x,y,z,t) &= u_0(x,y,t) - z \frac{\partial w_0(x,y,t)}{\partial x}, \\ v(x,y,z,t) &= v_0(x,y,t) - z \frac{\partial w_0(x,y,t)}{\partial y}, \\ w(x,y,z,t) &= w_0(x,y,t). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中: u, v, w 代表板内任意一点的位移; u_0, v_0, w_0 代表板中面位移; t 表示时间.

假设悬臂边界条件下的 FFF 薄板 x 方向的弹性模量为 E_1 , y 方向的弹性模量为 E_2 , xoy 平面内的剪切弹性模量为 G_{12} , x 方向与 y 方向上的泊松比为 ν_{12}, ν_{21} . 基于经典层合板理论:只需考虑薄板的横向振动,即中面位移 u_0 和 v_0 可忽略不计,正应变 ε_z 和剪应变 γ_{yz}, γ_{xz} 都为 0, 亦即 $\varepsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0$, FFF 薄板内任意一点的应变可以表示为

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}, \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

FFF 薄板中面弯曲挠曲率和扭曲率可表示为

$$\kappa_x = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}, \kappa_y = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}, \kappa_{xy} = -2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}. \quad (3)$$

因此,FFF 薄板内任意一点的应变也可写为

$$\varepsilon_x = z\kappa_x, \varepsilon_y = z\kappa_y, \gamma_{xy} = z\kappa_{xy}. \quad (4)$$

由于本文讨论的 FFF 薄板具有明显的正交

各向异性特征,则主轴方向的应力 - 应变关系可写为

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix}. \quad (5)$$

其中,

$$\left. \begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, Q_{12} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \\ Q_{22} &= \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, Q_{66} = G_{12}, \nu_{21} = \nu_{12}\frac{E_2}{E_1}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

当主轴方向与所设平面的坐标系之间有夹角 θ 时,考虑 FFF 薄板的分层特点,可得第 k 层板在坐标系下的应力 - 应变关系:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}. \quad (7)$$

其中,

$$\left. \begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= Q_{11} \cos^4 \theta_k + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta_k \cos^2 \theta_k + Q_{22} \sin^4 \theta_k, \\ \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 \theta_k \cos^2 \theta_k + Q_{12} (\sin^4 \theta_k + \cos^4 \theta_k), \\ \bar{Q}_{22} &= Q_{11} \sin^4 \theta_k + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta_k \cos^2 \theta_k + Q_{22} \cos^4 \theta_k, \\ \bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin \theta_k \cos^3 \theta_k + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin^3 \theta_k \cos \theta_k, \\ \bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^3 \theta_k \cos \theta_k + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin \theta_k \cos^3 \theta_k, \\ \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^2 \theta_k \cos^2 \theta_k + Q_{66} (\sin^4 \theta_k + \cos^4 \theta_k). \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

式中: k 表示 FFF 薄板的第 k 层; θ_k 表示薄板第 k 层的纤维方向与所设平面坐标系下 x 方向的夹角.

FFF 薄板所受弯矩和扭矩为

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix}. \quad (9)$$

式中,

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})^{(k)} (z_k^3 - z_{k-1}^3), i, j = 1, 2, 6. \quad (10)$$

FFF 薄板振动的动能可以表示为

$$T = \frac{\rho h}{2} \iint_A \left(\frac{\partial w_0}{\partial t} \right)^2 dA. \quad (11)$$

式中: A 为 FFF 薄板的表面积; ρ 为薄板的密度; h

为薄板的厚度.

FFF 薄板弯曲储存的应变能表示为

$$U = \frac{1}{2} \iint_A [M_x \kappa_x + M_y \kappa_y + M_{xy} \kappa_{xy}] dA. \quad (12)$$

基于正交多项式法获得 FFF 薄板振动的振型函数:

$$W(\xi, \eta) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N c_{mn} P_m(\xi) P_n(\eta). \quad (13)$$

式中: c_{mn} 是待定参数; $P_i(\xi)$ ($i = 1, \dots, M$) 和 $P_j(\eta)$ ($j = 1, \dots, N$) 为一系列的正交多项式.

$$\left. \begin{aligned} P_1(x) &= x^p (1-x)^q, P_1(y) = y^r (1-y)^s; \\ P_2(\zeta) &= (\zeta - B_2) P_1(\zeta); \\ P_k(\zeta) &= (\zeta - B_k) P_{k-1}(\zeta) - C_k P_{k-2}(\zeta); \\ \zeta &= x, y; k > 2. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

式中 B_k 和 C_k 为系数函数,其表达式分别为

$$\left. \begin{aligned} B_k &= \frac{\int_0^1 w(\zeta) [P_{k-1}(\zeta)]^2 \zeta d\zeta}{\int_0^1 w(\zeta) [P_{k-1}(\zeta)]^2 d\zeta}, \\ C_k &= \frac{\int_0^1 w(\zeta) [P_{k-1}(\zeta)] [P_{k-2}(\zeta)] \zeta d\zeta}{\int_0^1 w(\zeta) [P_{k-2}(\zeta)]^2 d\zeta}. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

式中, $w(\zeta)$ 是权函数,通常取 $w(\zeta) = 1$. 而 $P_1(x)$ 和 $P_1(y)$ 是满足固支、简支、自由等边界条件的多项式函数,且

$$\left. \begin{aligned} x &= X/a, \\ y &= Y/b. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

将式(13)代入动能公式(11)和应变能公式(12)中,可以得到用待定参数 c_{ij} 表示的最大动能 $E_{k_{\max}}$ 和最大应变能 $U_{k_{\max}}$ 分别为

$$E_{k_{\max}} = \frac{\rho h \omega^2}{2} \iint_A (W)^2 dA. \quad (17)$$

$$\left. \begin{aligned} U_{k_{\max}} &= \frac{1}{2} \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 \left[\bar{Q}_{11} \left(\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N c_{mn} P_n \frac{d^2 P_m}{dx^2} \right)^2 + \right. \\ &2\bar{Q}_{12} \left(\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N c_{mn} P_n \frac{d^2 P_m}{dx^2} \right) \left(\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N c_{mn} P_m \frac{d^2 P_n}{dy^2} \right) + \\ &4\bar{Q}_{16} \left(\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N c_{mn} P_n \frac{d^2 P_m}{dx^2} \right) \left(\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N c_{mn} \frac{dP_m}{dx} \frac{dP_n}{dy} \right) + \\ &4\bar{Q}_{26} \left(\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N c_{mn} P_m \frac{d^2 P_n}{dy^2} \right) \left(\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N c_{mn} \frac{dP_m}{dx} \frac{dP_n}{dy} \right) + \\ &\left. \bar{Q}_{22} \left(\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N c_{mn} P_m \frac{d^2 P_n}{dy^2} \right)^2 + \right. \\ &\left. 4\bar{Q}_{66} \left(\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N c_{mn} \frac{dP_m}{dx} \right)^2 \right] dA dz. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

然后将能量函数 L 表示成

$$L = E_{k_{\max}} - U_{k_{\max}}. \tag{19}$$

求解 FFF 薄板的固有特性问题,根据最小势能原理,待定参数 c_{mn} 应使总能量函数 L 为极值,即有

$$\frac{\partial L}{\partial c_{mn}} = 0, m = 1, 2, \cdots, M; n = 1, 2, \cdots, N. \tag{20}$$

将式(19)代入式(20)中,可以得到特征值问题:

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\mathbf{a} = 0. \tag{21}$$

式中: \mathbf{K} 和 \mathbf{M} 分别为 FFF 薄板的刚度矩阵和质量矩阵; $\mathbf{a} = [c_{11}, c_{12}, \cdots, c_{mn}]$.

\mathbf{K} 和 \mathbf{M} 中的元素是所有待定参数 c_{mn} 的系数,为保证式(21)有解,则系数矩阵行列式为 0,即

$$\det(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) = 0. \tag{22}$$

由式(22)即可求得其各阶模态的固有频率值.然后,将计算获得各阶特征向量 \mathbf{a} 以及所建立的薄板模型的各个节点坐标带回振型函数 $W(\xi, \eta)$ 中,即可获得 FFF 薄板的各阶模态振型.

1.2 振动响应理论分析

向薄板输入垂直于中面的外部激励,其表达式为

$$f(t) = A \sin(\omega t + \varphi). \tag{23}$$

根据 1.1 节所述,基于正交多项式法表示振型函数,采用 Ritz 法可以求解获得 FFF 薄板的最大动能 $E_{k_{\max}}$ 和应变能 $U_{k_{\max}}$ 的表达式(17)和式(18),并且可以获得等效黏性阻尼做功最大值 W_{\max} 为

$$W_{\max} = c \iint_A W^2 dA. \tag{24}$$

式中, c 为黏性阻尼系数.

然后,定义拉格朗日能量函数 L 的表达式为

$$L = E_{k_{\max}} + W_{\max} - U_{k_{\max}}. \tag{25}$$

通过待定参数 c_{mn} 应使总能量函数 L 为极值,即

$$\frac{\partial L}{\partial c_{mn}} = 0, m = 1, 2, \cdots, M; n = 1, 2, \cdots, N. \tag{26}$$

即可获得 FFF 薄板的频域振动方程

$$(\mathbf{K} + i\omega \mathbf{C} - \omega^2 \mathbf{M})\mathbf{a} = f(t). \tag{27}$$

式(27)给出了外部激励下 FFF 薄板振动响应的求解表达式,由此可以预测 FFF 薄板任意一点的振动响应.

1.3 实验研究

为验证上述模型的正确性,搭建了如图 2 所示的测试系统,并以 PLA 材料 FFF 薄板为研究对象,对其固有特性和振动响应等动力学参数进行实验研究.测试系统主要包括模态力锤、数据采集卡和加速度传感器等设备.其中,加速度传感器质

量为 0.6 g,可忽略其对实验的误差.FFF 薄板样件整体长、宽、厚度尺寸分别为 150 mm × 50 mm × 2.4 mm, x 方向的弹性模量 $E_1 = 3\,500$ MPa,切变模量 $G_{12} = 1\,287$ MPa, y 方向的弹性模量 $E_2 = 3\,400$ MPa,泊松比 $\nu_{12} = 0.36$,密度 $\rho = 1\,252$ kg/m³,该类型 FFF 薄板共有 6 层,每层具有相同的厚度.

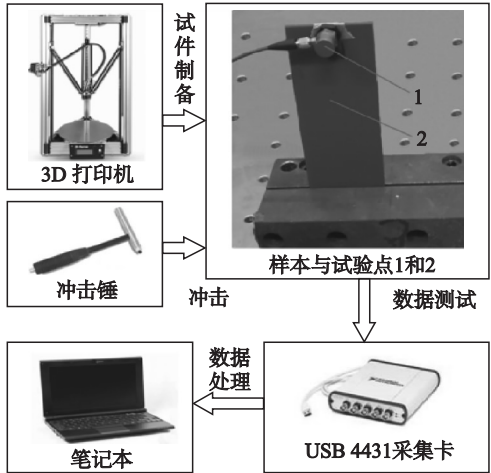


图 2 测定 FFF 样件动力学特性的实验系统
Fig. 2 Experimental system for determining the dynamic property of FFF parts

实验过程中,首先利用夹具固定保持 FFF 薄板样件的悬臂状态,薄板被夹持长度为 20 mm,激励点位于夹持位置上方约 10 mm,加速度传感器固定在薄板样件顶部和中部,该处的振动响应较大,以获取准确的测试结果.然后,通过力锤将脉冲激励施加到样件上,并且由加速度传感器测试由脉冲激励引起的薄板的动态响应,并通过数据采集卡实时收集激励信号和响应信号,确定薄板的频响函数(FRF).再次,采用单点拾振法完成对样件的参数识别,即将加速度传感器固定在振动较大的测量点处,分别对其余各测点进行激励,获得薄板的模态振型.最后,针对频响函数曲线进行分析和计算,以获取 FFF 薄板动力学特性和振动响应等参数的测试结果.每个样件选择 2 个测点,针对每个测点,进行 10 组实验,以保证测试结果的准确性.

2 结果分析

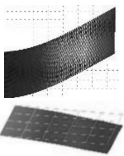
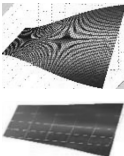
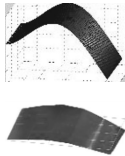

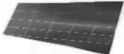

本节对比分析了 FFF 薄板的动力学特性及响应等参数的理论与测试结果,以验证所提出的动力学模型的正确性.

2.1 固有特性对比

根据 1.1 和 1.3 节的内容,以悬臂边界条件下的 FFF 薄板为研究对象,其固有特性的对比结果如表 1 所示. 通过对比验证可知,基于正交多项式法的 FFF 3D 打印薄板计算振型和测试结果一致,其中一阶振型为一阶弯曲振动,二阶振型为一阶扭转振动,三阶振型为二阶弯曲振动. 固有频率

的计算结果与实验结果吻合度较好,前三阶数值分别为 31.2,185,521 Hz 和 29.27,188.3,517.7 Hz,误差随着阶次的增加而减小,范围仅为 0.44% ~ 2.49%. 上述分析可知,利用本文所建立的理论模型可以准确地分析和预测出 FFF 3D 打印薄板的固有特性参数,即固有频率和模态振型,验证了理论模型的正确性.

表 1 FFF 3D 打印薄板前 3 阶固有特性的理论和实验结果
Table 1 Theoretical and experimental results of the first three orders inherent characteristics of the FFF 3D printed sheets

项目	模态阶次		
	第一阶	第二阶	第三阶
计算频率 A/Hz	31.2	185	521
测试频率 B/Hz	29.27	188.3	517.7
误差/%	2.49	1.75	0.44
计算振型			
测试振型			

2.2 振动响应对比

基于 1.2 和 1.3 节,确定 FFF 薄板振动响应的理论与实验结果如图 3 所示. 第一、三阶的振动响应理论值为 0.382 6 和 0.045 4 mm,实验结果分别为 0.353 4 和 0.041 0 mm,最大误差仅为

13.17%. 由此可知,本文所建立的动力学模型能够准确预测 FFF 薄板的振动响应结果.

2.3 阻尼比对比

利用半功率带宽法分析 FFF 薄板的振动响应曲线,分别获得了阻尼比的理论与实验结果,如图 4 所示. 由图可知,阻尼比的理论与实验结果趋势基本一致,其中第一阶阻尼比的理论与实验结果分别为 0.010 25 和 0.013 76,误差为 25.4%;第二阶分别为 0.027 35 和 0.025 24,误差为 8.36%;第三阶为 0.039 24 和 0.034 83,误差为 12.66%,可见,FFF 薄板的阻尼比的理论与实验结果吻合较好,进一步验证了动力学模型的正确性.

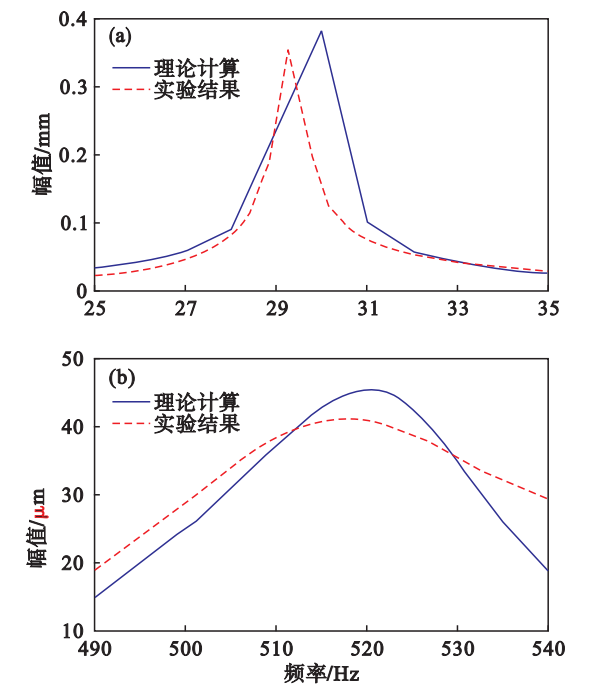


图 3 FFF 薄板的一、三阶振动响应曲线
Fig. 3 The 1st and 3rd order frequency response curves of the FFF thin plate
(a)—第一阶;(b)—第三阶.

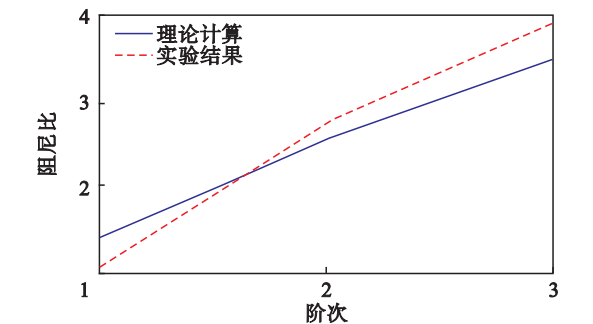


图 4 FFF 薄板的前 3 阶阻尼比
Fig. 4 The first three orders of damping ratio of the FFF thin plate

综上可知,利用本文所提出的计算方法可有效计算悬臂边界条件下 FFF 3D 打印薄板的固有

频率、模态振型、振动响应及阻尼比等动力学参数,为改善 FFF 产品的质量提供了理论基础.但是仍有必要分析上述误差产生的原因,其中实验误差客观存在,例如测试时的边界条件、仪器灵敏度、实验方法等造成的影响;理论建模误差包括在建模过程中未考虑纤维不规则、粘合缺陷和残余应力等的影响.

3 结 论

1) 基于经典层合板理论对悬臂条件下 FFF 薄板进行了建模,分析和验证了 FFF 薄板的固有特性和振动响应.

2) 总结了利用 Matlab 求解 FFF 薄板固有特性和振动响应的步骤.包括输入薄板各项参数、基于正交多项式法表示振型函数、通过 Ritz 法求解固有频率以及通过频域振动方程求解振动响应等步骤.

3) 以 PLA 纤维 FFF 薄板为研究对象,将固有特性和动态响应的理论计算结果与实验测试结果进行了对比,固有频率计算结果与实验结果的误差在 0.44% ~ 2.49% 之间,且前 3 阶模态振型也完全一致,动态响应计算结果与实验结果的误差在 8.35% ~ 13.17% 之间,模态阻尼比趋势吻合度较好,处于误差允许的范围内,进而验证了动力学模型的正确性.

4) 本研究虽然选用 PLA 材料的 FFF 薄板来验证理论模型,但基于相同机理,所得到的解析公式适用于任何材料的 FFF 薄板结构的动态特性参数研究.

参考文献:

[1] Lee K-M, Park H, Kim J, et al. Fabrication of a superhydrophobic surface using a fused deposition modeling (FDM) 3D printer with poly lactic acid (PLA) filament and

dip coating with silica nanoparticles [J]. *Applied Surface Science*,2019,467/468:979 – 991.

[2] Boschetto A,Bottini L. Design for manufacturing of surfaces to improve accuracy in fused deposition modeling [J]. *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*,2016,37: 103 – 114.

[3] Daver F, Lee K P M, Brandt M, et al. Cork-PLA composite filaments for fused deposition modelling [J]. *Composites Science and Technology*,2018,168:230 – 237.

[4] Arivazhagan A,Masood S H. Dynamic mechanical properties of ABS material processed by fused deposition modelling [J]. *International Journal of Engineering Research and Applications*,2014,2(3):2009 – 2014.

[5] Mohamed O A,Masood S H,Bhowmik J L. Investigation of dynamic elastic deformation of parts processed by fused deposition modeling additive manufacturing [J]. *Advances in Production Engineering & Management*,2016,11(3):227 – 238.

[6] Mohamed O A,Masood S H,Bhowmik J L, et al. Effect of process parameters on dynamic mechanical performance of FDM PC/ABS printed parts through design of experiment [J]. *Journal of Materials Engineering and Performance*, 2016,25(7):2922 – 2935.

[7] Farah S, Anderson D G, Langer R. Physical and mechanical properties of PLA, and their functions in widespread applications—a comprehensive review [J]. *Advanced Drug Delivery Reviews*,2016,107:367 – 392.

[8] Mochida Y, Ilanko S. Bounded natural frequencies of completely free rectangular plates [J]. *Journal of Sound and Vibration*,2008,311(1/2):1 – 8.

[9] Ramu I, Mohanty S C. Study on free vibration analysis of rectangular plate structures using finite element method [J]. *Procedia Engineering*,2012,38:2758 – 2766.

[10] Zhong Y, Zhao X F, Li R. Free vibration analysis of rectangular cantilever plates by finite integral transform method [J]. *International Journal for Computational Methods in Engineering Science and Mechanics*, 2013, 14 (3): 221 – 226.

[11] Lin T R,Zhang K. An analytical study of the free and forced vibration response of a ribbed plate with free boundary conditions [J]. *Journal of Sound and Vibration*,2018,422: 15 – 33.

[12] 曹志远. 板壳振动理论 [M]. 北京:中国铁道出版社,1989. (Cao Zhi-yuan. Vibration theory of plate and shell [M]. Beijing:China Railway Publishing House,1989.)