

进给系统成对安装的角接触球轴承热分析

赵春雨, 侯森林, 李朕均

(东北大学 机械工程与自动化学院, 辽宁 沈阳 110819)

摘 要: 考虑轴承的离心力、陀螺力矩等因素建立滚珠的动载荷平衡模型, 利用牛顿-拉弗逊法求解。然后对轴承、丝杠轴、轴承座取温度节点, 考虑轴承热节点之间的接触热阻并利用轴承内部温度变化结合润滑剂的黏温效应实时修正轴系热源发热量、热边界条件等特性参数, 建立机床进给轴承系统成对安装角接触球轴承的瞬态热网络模型。利用差分矩阵结合 Matlab 软件数值求解预测出不同进给速度下轴承座表面等重要节点的瞬态温升曲线, 分析不同转速下轴系温度场的变化。并对不同进给速度下的轴系安排实际工况下的试验验证, 证明了预测模型的有效性。

关 键 词: 数控机床进给系统; 成对安装角接触球轴承; 瞬态热特性; 热网络法; 差分矩阵

中图分类号: TH 113

文献标志码: A

开放科学(资源服务)标识码(OSID):

文章编号: 1005-3026(2020)05-0700-06



Thermal Analysis Toward Pair-Installed Angular Contact Ball Bearings in Feed Systems

ZHAO Chun-yu, HOU Sen-lin, LI Zhen-jun

(School of Mechanical Engineering & Automation, Northeastern University, Shenyang 110819, China.

Corresponding author: ZHAO Chun-yu, E-mail: chyzhao@mail.neu.edu.cn)

Abstract: Considering the centrifugal force of the bearing and the gyro moment, the dynamic load balance model of the ball was established and solved by the Newton-Raphson method. Then a transient thermal network model of the paired angular contact ball bearings of machine tool feed system was created with temperature nodes selected from bearings, the screw shafts and the bearing housings, considering the contact thermal resistance between the thermal nodes of the bearings. In this model, the internal temperature change of the bearing and the viscosity-temperature effect of the lubricant were used to modify the heat generation and thermal boundary conditions of the bearing heat source in real time. The transient temperature rise curves of important nodes such as bearing housing surface at different feed rates were predicted with differential matrix using Matlab software. The temperature field of the bearing system at different speeds was analyzed. The experimental verification under the actual working conditions of the bearing system at different feed rates was carried out to prove the validity of the prediction model.

Key words: CNC machine feed system; paired angular contact ball bearings; transient thermal characteristics; thermal network method; difference matrix

随着国内制造业的发展越来越迅速,对加工精度的要求越来越高,因此提高机床的加工精度以及工作稳定性是促进机床发展的关键。滚珠丝杠广泛用于机床等各类精密设备中,通常加工精度在很大程度上会受到系统温升的影响,而轴承温升占很大一部分,所以,对丝杠轴承进行温度分

析具有重要意义。而机床进给系统的几个主要热源中轴承发热量最大,也就是对滚珠丝杠等关键进给部件的影响最大,所以对丝杠轴承进行热分析在研究机床进给系统热误差中具有重要意义。

Palmgren^[1]采用试验方法推导出计算轴承摩擦力矩的经验公式。Bossmanns等^[2]建立了高速

电主轴的有限差分热分析模型. Lin 等^[3]研究了轴承预紧力对轴承刚度的影响, 分析高速旋转效应下离心力和陀螺力矩对主轴的影响. Xu 等^[4]基于有限元方法对机床主轴系统进行温度分析, 考虑接触热阻和热功率随着温度变化带来的影响, 并对机床壳体系统的热膨胀进行分析. Pouly 等^[5]建立了油-气润滑推力球轴承的热网络模型, 预测了推力球轴承的功率损失和温度分布. Ma 等^[6]运用热网络法研究脂润滑圆柱滚子轴承瞬态温度场, 并分析不同转速及润滑脂填充量的温度变化. Zheng 等^[7]分析轴承热特性时充分考虑了润滑剂、径向和轴向结构约束和装配约束, 提出了一种新的角接触球轴承多节点热网络模型.

本文建立了进给系统轴承的瞬态热网络模型, 基于隐格式差分法, 推导出网络各节点温度计算的递推算法, 并通过试验进行了验证.

1 轴承系统的热源发热率计算

1.1 轴承运动分析

外圈滚道曲率中心 B 及轴承运行前后内圈滚道曲率中心 C 和 C' 位置如图1所示. O 与 O' 分别为轴承运行前后滚珠中心; δ_r, δ_a 分别为轴承内外圈中心径向和轴向位移, α_{ij}, α_{oj} 分别为滚珠与内外圈的接触角.

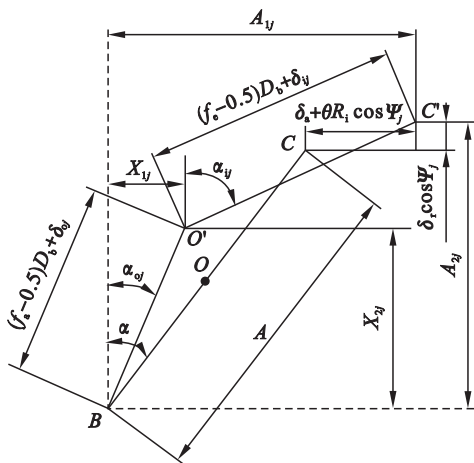


图1 滚动体中心和滚道曲率中心的位置变化
Fig. 1 Position changes of the roller center and the raceway curvature center

由图可知:

$$A_{ij} = A \sin \alpha + \delta_a + \theta R_i \cos \psi_j, \quad (1)$$

$$A_{oj} = A \cos \alpha + \delta_r \cos \psi_j. \quad (2)$$

其中: α 是轴承的初始接触角; ψ_j 为滚珠角位置; θ 为角位移; R_i 为内圈滚道曲率中心相对于轴承轴线的距离.

几何协调方程为

$$\left. \begin{aligned} (A_{ij} - X_{ij})^2 + (A_{oj} - X_{oj})^2 - \\ ((f_i - 0.5)D_b + \delta_{ij})^2 &= 0, \\ X_{ij}^2 + X_{oj}^2 - ((f_o - 0.5)D_b + \delta_o)^2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

滚珠所载荷荷如图2所示, 滚珠的法向载荷与法向接触变形的关系为

$$Q_{oj} = K_{oj} \delta_{oj}^{1.5}, \quad (4)$$

$$Q_{ij} = K_{ij} \delta_{ij}^{1.5}. \quad (5)$$

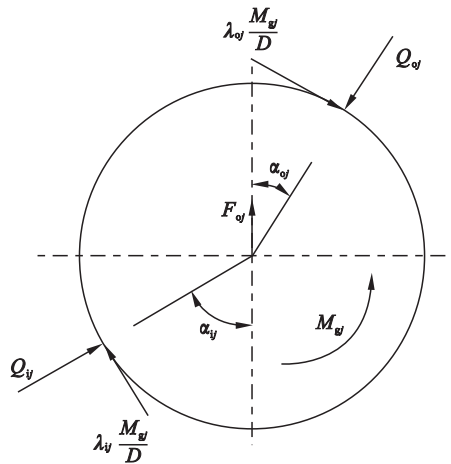


图2 滚动体所载荷荷
Fig. 2 Load on one roller

其中, K_{ij} 和 K_{oj} 是内外圈的弹性变形系数, 与相互接触的材料属性和几何形状有关, 由赫兹接触理论求出.

对图建立水平和垂直方向上力的平衡方程:

$$\begin{aligned} & \frac{K_{ij} \delta_{ij}^{1.5} (A_{ij} - X_{ij}) - \frac{\lambda_{ij} M_{gj}}{D} (A_{oj} - X_{oj})}{(f_i - 0.5)D + \delta_{ij}} + \\ & \frac{\frac{\lambda_{oj} M_{gj} X_{oj}}{D} - K_{oj} \delta_{oj}^{1.5} X_{oj}}{(f_o - 0.5)D + \delta_{oj}} = 0, \quad (6) \\ & \frac{\frac{\lambda_{oj} M_{gj} X_{oj}}{D} - K_{oj} \delta_{oj}^{1.5} X_{oj}}{(f_o - 0.5)D + \delta_{oj}} - \\ & \frac{K_{ij} \delta_{ij}^{1.5} (A_{oj} - X_{oj}) - \frac{\lambda_{ij} M_{gj}}{D} (A_{ij} - X_{ij})}{(f_i - 0.5)D + \delta_{ij}} = 0. \quad (7) \end{aligned}$$

在只受轴向力作用时, 整个轴承的受力平衡方程:

$$F_a - \sum_{j=1}^{j=z} (Q_{ij} \sin \alpha_{ij} - \frac{\lambda_{ij} M_{ij}}{D} \cos \alpha_{ij}) = 0. \quad (8)$$

联立式(3), 式(6)~式(8)五个非线性方程对未知量 $\delta_a, \delta_{ij}, \delta_{oj}, X_{ij}, X_{oj}$ 进行求解, 求解采用牛顿-拉弗逊法. 根据求解得到的变形量可求解轴承在工作期间滚珠与内外圈的接触角.

1.2 发热率计算

轴承引起的功率损失为摩擦力矩与轴承转速的乘积. 轴承总的摩擦力矩由接触区域的轴承摩擦力矩 M 和滚珠与沟道接触的自旋摩擦力矩 M_s 组成^[1], 即轴承的发热量为

$$H = \frac{2\pi}{60} nM + M_s \omega_s. \tag{9}$$

其中: H 为单位时间发热量; n 为轴承转速; M_s 为滚珠与滚道之间的自旋摩擦力矩; ω_s 为滚珠的自旋角速度.

摩擦力矩 M 是由两部分组成:

$$M = M_1 + M_2. \tag{10}$$

M_1 为与轴承负荷有关的项:

$$M_1 = f_1 P_1 d_m. \tag{11}$$

其中: f_1 为与轴承类型和所受负荷有关的系数; P_1 为确定轴承负荷; d_m 为轴承节圆.

M_2 为黏性摩擦力矩:

$$M_2 = \begin{cases} 10^{-7} f_o (v_o n)^{2/3} d_m^3, & v_o n > 2\,000; \\ 160 \times 10^{-7} f_o d_m^3, & v_o n \leq 2\,000. \end{cases} \tag{12}$$

其中: f_o 为与轴承类型和润滑方式有关的系数; v_o 为工作温度下润滑剂的运动黏度.

依据琼斯的沟道控制理论^[8]: 滚珠在与轴承内、外圈接触过程中, 在一个滚道上同时存在滚动和自旋, 而在另一个滚道上作纯滚动. 对于高速球轴承, 由于离心力的作用, 轴承为外滚道控制, 滚珠在外滚道上运动为纯滚动, 即自旋分量 $M_{so} = 0$. 在此仅考虑球体与内滚道之间的自旋摩擦力矩 M_{si} :

$$M_{si} = \frac{3\mu_i Q_i a \varepsilon}{8}. \tag{13}$$

其中: Q_i 为滚珠与滚道之间的法向载荷; μ_i 为摩擦系数; a 为接触椭圆的长轴长度; ε 为第二类椭圆积分.

球与内圈接触的自旋角速度为

$$\omega_{si} = -\omega_b \sin(\beta - \alpha_i) + (\omega - \omega_c) \sin \alpha_i. \tag{14}$$

其中: ω 为轴的角速度; ω_b 为滚珠的自转角速度; ω_c 为滚珠的公转角速度; α_i 为球与内滚道的接触角; β 为姿态角^[9].

$$\frac{\omega_b}{\omega} = \left(\left(\frac{\cos \alpha_o + \tan \beta \sin \alpha_o}{1 + \gamma' \cos \alpha_o} + \frac{\cos \alpha_i + \tan \beta \sin \alpha_i}{1 - \gamma' \cos \alpha_i} \right) \gamma' \cos \beta \right)^{-1}, \tag{15}$$

$$\frac{\omega_c}{\omega} = \frac{1 - \gamma' \cos \alpha_i}{1 + \cos(\alpha_i - \alpha_o)}, \tag{16}$$

$$\beta = a \tan \frac{\sin \alpha_o}{\gamma' + \cos \alpha_o}. \tag{17}$$

其中: $\gamma' = D_w/d_m$; D_w 为滚珠直径.

在工作过程中, 轴承摩擦力矩产生的热一半进入滚动体, 另一半进入轴承内外圈; 而滚珠与沟道的自旋摩擦力矩产生的热平均分配到滚动体和轴承内圈中^[10].

2 轴系热网络分析模型

2.1 热节点布置

依据轴承系统结构, 选择典型的温度节点建立其热网络. 节点之间阻碍热量交换的阻力设为热阻, 依据轴系结构和材料参数确定各热阻值, 计算轴承瞬态温度场. 本文建立具有 9 个温度节点的数控机床进给系统丝杠轴承热网络, 轴承系统的结构及温度节点的布置如图 3 所示. “①”代表节点 1 位置, 其余类推. 热温度节点定义和连接方式如表 1 和表 2 所示.

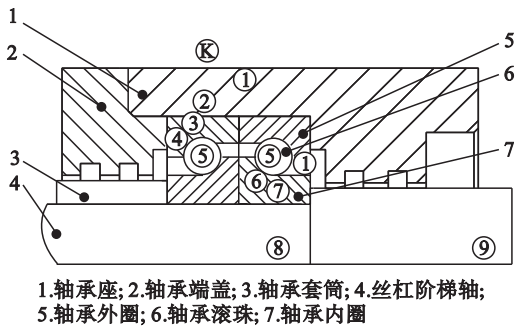


图 3 轴承系统结构及温度节点布置
Fig. 3 Structure of the bearing system and distribution of temperature nodes

表 1 轴承系统温度节点定义
Table 1 Definition of temperature nodes for the bearing system

节点编号	温度节点名称
①	轴承座外表面温度节点
②	轴承座温度节点
③	轴承外圈温度节点
④	轴承外滚道接触处温度节点
⑤	滚珠温度节点
⑥	轴承内滚道接触处温度节点
⑦	轴承内圈温度节点
⑧	安装轴承的轴颈温度节点
⑨	丝杠起始端温度节点
K	环境温度
L	润滑剂温度

2.2 热传递分析

热传导、热对流和热辐射是轴承热传递主要

表 2 温度节点间的热传导关系
Table 2 Heat transfer relation among the temperature nodes

温度节点	K	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	L
①	对流	—	传导	—	—	—	—	—	—	—	—
②	—	传导	—	传导	—	—	—	—	—	—	—
③	—	—	传导	—	传导	—	—	—	—	—	—
④	—	—	—	传导	热源	传导	—	—	—	—	—
⑤	—	—	—	—	传导	热源	传导	—	—	—	对流
⑥	—	—	—	—	—	传导	热源	传导	—	—	对流
⑦	—	—	—	—	—	—	传导	—	传导	—	—
⑧	—	—	—	—	—	—	—	传导	—	传导	—
⑨	对流	—	—	—	—	—	—	—	传导	—	—

形式. 热辐射对轴承元件之间的热传递影响很小, 可以忽略热辐射影响^[11]. 在工作过程中, 轴承座、轴承内外圈、滚珠、丝杠阶梯轴之间发生热传导. 在此, 将轴承内外圈和轴承座简化为圆筒, 丝杠阶梯轴简化为圆柱. 若仅考虑其径向热传递, 可处理为一维热传导模型, 其热阻值为

$$R_c = \frac{L_s}{A\lambda}.$$

(18)

其中: λ 为物体的导热系数; L_s 为物体的特征长度; A 为物体导热面积.

轴承座的外表面与空气之间产生自然对流换热, 旋转的丝杠轴与空气之间发生强制对流换热, 在轴承内部, 热量也在轴承零件和润滑脂之间传递.

热对流阻值计算模型为

$$R = \frac{1}{Ah_v} = \frac{1}{A} \left(\frac{L}{KNu} \right).$$

(19)

其中: h_v 为对流换热系数; Nu 为无量纲的 Nusselt 数; K 为流体的导热系数; A 为物体壁面面积; L 为物体对流换热特征长度.

以上传热热阻及对流换热热阻经过多年试验及理论研究总结出大量经验公式, 根据换热的具体情况, 通过查表得到零件材料及尺寸参数, 选取相应的经验公式进行计算^[8,11].

2.3 结合面接触热阻

结合面的接触阻力表示^[12]为

$$R = \frac{1}{Ah_c}.$$

(20)

其中: A 为接触区域的表现接触面积; h_c 为接触导热系数.

轴承外圈与轴承座孔的结合一般采用间隙配合, 其接触导热系数为

$$h_{co} = \frac{1}{h_{ring}/\lambda_{ring} + h_{gap}/\lambda_{air}}.$$

(21)

其中: λ_{ring} 和 λ_{air} 分别为轴承外圈和空气的导热系数; h_{ring} , h_{gap} 分别为轴承外圈和周向空气厚度^[2].

轴承内圈与丝杠轴表面的接触导热系数为

$$h_{ci} = \frac{1}{L_g} \left(\frac{A_c}{A} \frac{2k_1k_2}{k_1 + k_2} + \frac{A_v}{A} k_f \right).$$

(22)

其中: L_g 是两个接触面的空隙厚度; A_c 是接触处的真实接触面积; A_v 为接触处的空气面积; k_1 , k_2 , k_f 分别是两部分接触材料及空气的导热系数. 接触导热系数的具体数值见表 3.

表 3 结合面接触导热系数^[11]
Table 3 Contact thermal conductivity at joint surface

轴承接触部位	油气润滑	脂润滑
内圈和轴颈	10 100	12 900
外圈和轴承座	5 670	8 510

2.4 瞬态平衡方程建立

节点的能量变化满足热流平衡原理, 在热平衡之前, 每个节点流入的热流量等于流出的热流量. 图 4 为一个节点上的对流与传导热流示意图.

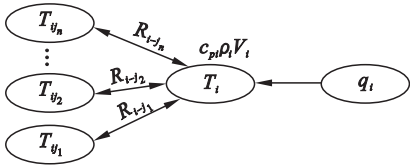


图 4 热流示意图
Fig. 4 Heat flow diagram

根据热通量平衡原理, 节点 i 的瞬态温度平衡方程可以表示为

$$q_i - c_{pi}\rho_i V_i \frac{dT_i}{dt} = \sum_{j=1}^{j_n} \frac{(T_i - T_{ij})}{R_{i-ij}}, i = 1, 2, \dots, 9.$$

(23)

其中: q_i 为节点 i 热流量; ρ_i 为节点 i 材料密度; c_{pi} 为材料的比热容; V_i 为节点 i 相关材料体积; T_i

为节点 i 的温度; dT_i/dt 为节点 i 处的升温率.

利用一阶差分格式,则

$$T_i^{k+1} = T_i^k + \frac{dT_i}{dt} \Delta t_k.$$

(24)

其中, $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$ 是计算的步长.

对于式(23),右端传热项在 $[t_k, t_{k+1}]$ 区间内传热值取为两时间点的均值,即

$$(T_i - T_{i-j})_{k+1} = \frac{1}{2}(T_i^k + T_i^{k+1}) - \frac{1}{2}(T_{i-j}^k + T_{i-j}^{k+1}).$$

(25)

将式(24)、式(25)代入式(23)得

$$(C_i + \sum_{j=1}^n \Delta h_{ij}) T_i^{k+1} - \sum_{j=1}^n \Delta h_{ij} T_{ij}^{k+1} =$$
$$(C_i - \sum_{j=1}^n \Delta h_{ij}) T_i^k + \sum_{j=1}^n \Delta h_{ij} T_{ij}^k + q_i \Delta t.$$

(26)

其中: $C_i = c_{pi} \rho_i V_i$; $\Delta h_{ij} = \Delta t / (2R_{ij})$.

利用表 2,依据式(24)~式(26),推导出系统温度变化的计算方程组为

$$A X^{k+1} = B X^k + D.$$

(27)

其中: $X = [T_1 \ T_2 \ \cdots \ T_9]^T$; A 和 B 为 9×9 阶方阵; D 为 9 维常值列向量, $D = [d_1 \ d_2 \ \cdots \ d_9]^T$.

依据表 2,节点 1 和 9 无热源,与环境热交换,而变量 X 中含环境变量,将其并入 D 中,则

$$d_1 = T_K / R_{1K}, d_9 = T_K / R_{9K}.$$

节点 2,3 和 7,8 无热源,其值皆为 0,即

$$d_2 = d_3 = d_7 = d_8 = 0.$$

节点 5 为滚珠,与内外圈接触摩擦生热,存在两个热源,分别记为 q_{5i} 和 q_{5e} ;同时,与油膜间存在热交换.若滚珠与内外圈接触生热的 50% 传入滚珠,则

$$d_5 = T_L / R_{5-L} + 0.5 q_{5i} + 0.5 q_{5e}.$$

内外圈 4 和 6 也与油膜产生热交换,即

$$d_4 = T_L / R_{4-L} + 0.5 q_{5i}, d_6 = T_L / R_{6-L} + 0.5 q_{5e}.$$

3 试验及计算结果

试验机床型号为 HTC 2050i,具体试验设备有: PC104 总线工业控制计算机;铂热电阻温度传感器 4 个;红外热像仪 1 台;激光干涉仪 1 台;笔记本电脑 2 台,1 台用于记录温度传感器测量的温度数据,1 台用于记录激光干涉仪测量的误差数据.具体试验设备如图 5 所示^[9].

Z 轴进给系统轴承为 NSK 公司的 25TAC62B 滚珠丝杠专用轴承,轴向预紧力为 1 kN.当电机转速为 500,1 000 和 1 500 r/min 时,

对进给系统工作过程远离电机的轴承表面温度进行了测试.测试温度分为系统工作和自然冷却两个阶段.



图 5 实验设备

Fig. 5 Experimental equipment

利用上述热网络算法对轴承温度进行了计算,计算过程润滑剂黏度随温度变化规律按表 4 数据线性插值处理.对应热阻值根据图纸结构和材料参数确定.图 6 为计算与试验结果的对比.由图 6 可见,模型预测与试验测试最大误差值 1.3℃,出现在进给速度 1 500 r/min,机床工作 40 min 时,模型预测温度为 36.9℃,试验测量温度为 35.6℃.此试验结果证明了本文热网络算法的有效性.

表 4 润滑剂的黏温特性^[4]

Table 4 Viscosity-temperature characteristic of lubricant

温度/℃	运动黏度/(mm ² ·s ⁻¹)
25	30
40	40
23	20

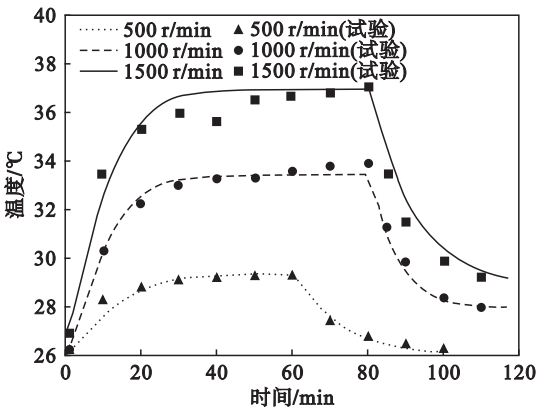


图 6 轴承座表面温度计算与试验结果的对比

Fig. 6 Comparison of the calculated values and the experimental results for the bearing housing surface temperatures

图 7 为进给电机转速 1 000 r/min 时轴承各节点温度随工作时间的变化.由图 7 可见,轴承各

节点温度随时间推移呈指数上升,并在轴系达到热平衡后趋于稳定. 模型预测最高温度在轴承内滚道,这与实际工况相吻合;停机后轴承内滚道温度冷却速度最快,这是由于轴承密封方式为直通式迷宫密封,停机后轴承内空气与外界相通,润滑剂冷却速度较快导致. 当机床停机之后,丝杠轴端温度有小幅度的上升,这是由于停机初始阶段高温区的热量传过丝杠轴端,停机后丝杠轴与空气为自然对流散热,故符合轴承工作情况. 图8为不同进给速度时轴承节点温升曲线比. 由图可见,轴承内滚道温升比外滚道迅速,温度随进给系统的转速增加而升高.

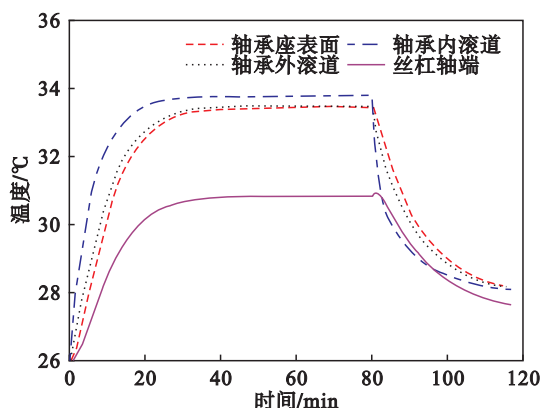


图7 转速1000 r/min 轴系典型温度节点的瞬态温升曲线

Fig. 7 Bearing system transient temperature rise curve of typical temperature node at 1000 r/min

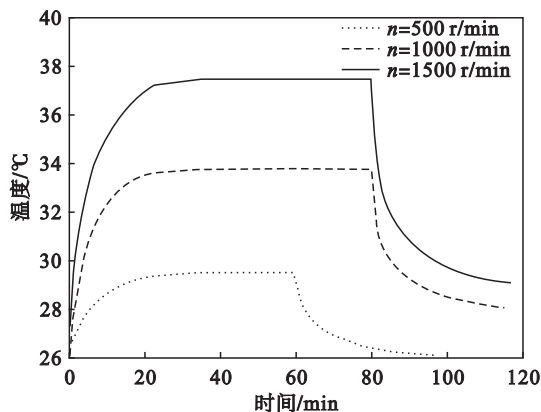


图8 不同转速下轴承内滚道的瞬态温升曲线

Fig. 8 Transient temperature rise curve of bearing inner raceway at different rotational speeds

4 结 论

1) 基于进给系统轴承特点,考虑接触热阻及润滑剂黏温效应的影响,建立成对安装角接触球轴承瞬态热网络模型,并给出考虑轴承自旋摩擦力的轴承生热计算模型.

2) 基于热网络中单节点换热过程的微分方

程,推导出轴承系统温度场的隐格式差分方程组的计算方法,描述轴承热网络节点温度的时变规律.

3) 利用本文计算方法,计算出了进给系统工作过程轴承温度随时间的变化,并通过试验验证了其有效性;通过数值计算,分析了进给速度对轴承系统各节点时变特性的影响.

参考文献:

- [1] Palmgren A. Ball and roller bearing engineering [M]. Philadelphia: SKF Industries Inc, 1959.
- [2] Bossmanns B, Tu J F. A thermal model for high speed motorized spindles [J]. *International Journal of Machine Tools & Manufacture*, 1999, 39(9): 1345 - 1366.
- [3] Lin C W, Tu J F, Kamman J. An integrated thermo-mechanical-dynamic model to characterize motorized machine tool spindles during very high speed rotation [J]. *International Journal of Machine Tools & Manufacture*, 2003, 43(10): 1035 - 1050.
- [4] Xu M, Jiang, S Y. An improved thermal model for machine tool bearings [J]. *International Journal of Machine Tools & Manufacture*, 2007, 47(1): 53 - 62.
- [5] Pouly F, Changenet C, Ville F, et al. Power loss predictions in high-speed rolling element bearings using thermal networks [J]. *Tribology Transactions*, 2010, 53(6): 957 - 967.
- [6] Ma F B, Li Z M, Qiu S C, et al. Transient thermal analysis of grease-lubricated spherical roller bearings [J]. *Tribology International*, 2016, 93: 115 - 123.
- [7] Zheng D, Chen W, Li M. An optimized thermal network model to estimate thermal performances on a pair of angular contact ball bearings under oil-air lubrication [J]. *Applied Thermal Engineering*, 2018, 131: 328 - 339.
- [8] Jones A B. Ball motion and sliding friction in ball bearing [J]. *Journal of Basic Engineer*, 1959, 81(3): 1 - 12.
- [9] 李铁军, 赵春雨, 张义民. 数控机床进给系统热误差自适应解析模型 [J]. *东北大学学报 (自然科学版)*, 2018, 39(6): 834 - 839.
(Li Tie-jun, Zhao Chun-yu, Zhang Yi-min. Adaptive analytical model of thermal error prediction for the ball screw feed drive systems in CNC machine tools [J]. *Journal of Northeastern University (Natural Science)*, 2018, 39(6): 834 - 839.)
- [10] Harria T A, Kotzalas M N. 滚动轴承分析: 轴承技术的高等概念 [M]. 北京: 机械工业出版社, 2009: 43 - 163.
(Harria T A, Kotzalas M N. Analysis of rolling bearings: the advanced concept of bearing technology [M]. Beijing: Mechanical Industry Press, 2009: 43 - 163.)
- [11] Burton R A, Staph H E. Thermally activated seizure of angular contact bearings [J]. *ASLE Transactions*, 1967, 10: 408 - 417.
- [12] 杨佐卫, 殷国富, 尚欣, 等. 高速电主轴热态特性与动力学特性耦合分析模型 [J]. *吉林大学学报 (工学版)*, 2011, 41(1): 100 - 105.
(Yang Zuo-wei, Yin Guo-fu, Shang Xin, et al. Coupling analysis model of thermal and dynamic characteristics for high-speed motorized spindle [J]. *Journal of Jilin University (Engineering and Technology Edition)*, 2011, 41(1): 100 - 105.)