第41卷第6期 东北大学学报(自然科学版) Vol.41,No.6
2020年6月 Journal of Northeastern University(Natural Science) Jun. 2020
doi:10.12068/j.issn.1005-3026.2020.06.025

三维 Minkowski 空间中的 k-型伪零螺线

钱金花, 刘 杰
(东北大学 理学院, 辽宁 沈阳 110819)

摘　　要: 在三维 Minkowski 空间中定义 k-型伪零螺线,并结合结构函数讨论 k-型伪零螺线的几何性质.首先,根据伪零曲线的概念定义伪零曲线的结构函数,进而得到伪零曲线的结构表达式以及结构函数与伪零曲线的曲率函数之间满足的关系.然后,讨论 k-型伪零螺线的几何性质.结果表明,三维 Minkowski 空间中任意伪零曲线都是 1-型伪零螺线,不存在 2-型伪零螺线以及得到了 3-型伪零螺线的曲率函数满足的微分方程等结论.与此同时,给出 k-型伪零螺线的轴的表达式以及轴的类型(类空轴、类时轴、类光轴).

关 键 词: Minkowski 空间;伪零曲线;k-型伪零螺线;结构函数;曲率;轴
中图分类号: O 186　　**文献标志码:** A　　**文章编号:** 1005-3026(2020)06-0909-04

K-Type Pseudo Null Helixes in the 3D Minkowski Space

QIAN Jin-hua, *LIU Jie*
(School of Sciences, Northeastern University, Shenyang 110819, China. Corresponding author: QIAN Jin-hua, E-mail: qianjinhua@mail.neu.edu.cn)

Abstract: The k-type pseudo null helixes in the 3D Minkowski space are defined, and then the geometric properties of such kind of curves are discussed via the new defined structure functions of pseudo null curves. Firstly, the structure functions of pseudo null curves are defined according to the concept of pseudo null curves, then the representation forms of pseudo null curves are obtained and the relationship between the structure functions and the curvature functions of pseudo null curves is revealed by the defined structure functions. Secondly, the geometric properties of k-type pseudo null helixes in the 3D Minkowski space are discussed. The results show that any pseudo null curve is a 1-type pseudo null helix, there does not exist 2-type pseudo null helix, and a differential equation satisfying the curvature function of a 3-type pseudo null helix can be obtained. Meanwhile, the expressing forms and types (spacelike axis, timelike axis, lightlike axis) of axes for k-type pseudo null helixes are given.

Key words: Minkowski space; pseudo null curve; k-type pseudo null helix; structure function; curvature; axis

在三维欧氏空间中,若一条曲线的切线和固定方向成固定角,则称其为一般螺线[1].近年来,欧氏空间中一般螺线的定义已经被推广到 Lorentz-Minkowski 空间中[2-4].本文给出 k-型($k=1,2,3$)伪零螺线及其轴的定义,并根据定义的伪零曲线的结构函数,讨论各种伪零螺线的几何性质.

1 预备知识

设 E_1^3 是三维 Minkowski 空间,其中的内积定义为

$$\langle\ ,\ \rangle=-\mathrm{d}x_1^2+\mathrm{d}x_2^2+\mathrm{d}x_3^2.$$

设 E_1^3 中的任意非零向量 $\boldsymbol{\alpha}$,若 $\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}\rangle>0$,则称 $\boldsymbol{\alpha}$ 为类空向量;若 $\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}\rangle<0$,则称 $\boldsymbol{\alpha}$ 为类时向量;若 $\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}\rangle=0$,则称 $\boldsymbol{\alpha}$ 为类光向量.特别地,规

收稿日期: 2019-07-17
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(11801065).
作者简介: 钱金花(1979-),女,河北唐山人,东北大学副教授.

定零向量为类空向量[5-6].

定义 1[7] 设 c 是 E_1^3 中任意一条正则曲线. 若曲线 c 的切向量为类空向量(类时向量、类光向量),则称 c 为类空曲线(类时曲线、类光曲线). 特别地,若类空曲线 c 的主法向量为类空向量(类时向量、类光向量),则称其为第一类类空曲线(第二类类空曲线、伪零曲线).

引理 1[7] 设 $r(s)$ 是 E_1^3 中以 s 为弧长参数的伪零曲线,则其满足如下 Frenet 公式:

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{\alpha}'(s)=\boldsymbol{\beta}(s),\\&\boldsymbol{\beta}'(s)=\kappa(s)\boldsymbol{\beta}(s),\\&\boldsymbol{\gamma}'(s)=-\boldsymbol{\alpha}(s)-\kappa(s)\boldsymbol{\gamma}(s).\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

其中:

$\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}\rangle=\langle\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}\rangle=1$, $\langle\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}\rangle=\langle\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\gamma}\rangle=0$, $\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle=\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}\rangle=0$. $\boldsymbol{\alpha}(s)$,$\boldsymbol{\beta}(s)$,$\boldsymbol{\gamma}(s)$分别称为曲线 $r(s)$ 的切向量、主法向量和副法向量;$\kappa(s)$ 称为曲线 $r(s)$ 的曲率函数.

标注 1 本文所讨论的伪零曲线均以弧长 s 为参数.

在文献[8-9]中,作者利用结构函数分别描述了锥曲线与类光曲线. 本文用类似的方法描述 E_1^3 中的伪零曲线.

首先,设伪零曲线 $r(s)$ 的单位切向量为

$$\boldsymbol{r}'(s)=[\xi_1(s),\xi_2(s),\xi_3(s)].$$

显然 $-\xi_1^{\ 2}+\xi_2^{\ 2}+\xi_3^{\ 2}=1$. 不失一般性,设

$$\frac{\xi_1+\xi_3}{1+\xi_2}=\frac{1-\xi_2}{\xi_3-\xi_1}=f,\ \xi_2=g,$$

这里 f, g 是 s 的光滑函数. 于是

$$\xi_1=\frac{1}{2}[f(1+g)-f^{-1}(1-g)],$$

$$\xi_3=\frac{1}{2}[f(1+g)+f^{-1}(1-g)].$$

另外,由 $\langle r''(s),r''(s)\rangle=0$,经过计算,有

$$(g^2-1)f'=2fg'.$$

解上面的微分方程,可得

$$cf=\frac{g-1}{g+1},(c\in\mathbf{R}-\{0\}).$$

总结上面的推导过程,有如下结论.

引理 2 设 $r(s)$ 是 E_1^3 中的伪零曲线,那么 $r(s)$ 可以表示为

$$r(s)=\int\left(\frac{f(1+g)-f^{-1}(1-g)}{2},\ g,\ \frac{f(1+g)+f^{-1}(1-g)}{2}\right)\mathrm{d}s.$$

其中:f, g 是 s 的光滑函数,称其为结构函数,且它们满足

$$cf=\frac{g-1}{g+1},(c\in\mathbf{R}-\{0\}).$$

由引理 2 与引理 1,容易得到如下结论.

引理 3 设 $r(s)$ 是 E_1^3 中的伪零曲线,那么曲线 $r(s)$ 的曲率函数 $\kappa(s)$ 可以表示为

$$\kappa(s)=\frac{g''(s)}{g'(s)}.$$

定义 2[9] 设 $r(s)$ 是 E_1^3 中以 $\{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}\}$ 为标架的伪零曲线. 若存在非零常向量 $\boldsymbol{V}$,使得 $\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{V}\rangle$($\langle\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{V}\rangle$,$\langle\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{V}\rangle$)是非零常数,则称 $r(s)$ 为 k-型($k=1,2,3$)伪零螺线,$\boldsymbol{V}$ 称为 $r(s)$ 的轴.

标注 2 定义 2 中曲线 $r(s)$ 的切向量 $\boldsymbol{\alpha}$,主法向量 $\boldsymbol{\beta}$,副法向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 都不是常向量.

2 主要结论

设非零常向量 $\boldsymbol{V}$ 是 k-型伪零螺线 $r(s)$ 的轴. 那么 $\boldsymbol{V}$ 可以表示为[10]

$$\boldsymbol{V}=v_1\boldsymbol{\alpha}(s)+v_2\boldsymbol{\beta}(s)+v_3\boldsymbol{\gamma}(s).\qquad(2)$$

这里 $v_i=v_i(s)(i=1,2,3)$ 是弧长参数 s 的光滑函数. 显然

$$v_1=\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{V}\rangle,\ v_2=\langle\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{V}\rangle,\ v_3=\langle\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{V}\rangle.$$

在式(2)两端关于参数 s 求导,整理可得

$$\left.\begin{aligned}&v_1'-v_3=0,\\&v_1+v_2'+v_2\kappa=0,\\&v_3'-v_3\kappa=0.\end{aligned}\right\}\qquad(3)$$

2.1 1-型伪零螺线

定理 1 E_1^3 中的任意伪零曲线 $r(s)$ 是 1-型伪零螺线.

证明 根据 1-型伪零螺线的定义,有

$$\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{V}\rangle=v_1=C_0(C_0\neq0).\qquad(4)$$

在式(4)两端关于参数 s 求两次导,可知 $r(s)$ 的曲率函数 $\kappa(s)$ 是任意函数.

反之,对于任意伪零曲线 $r(s)$,由式(3)和式(4),总可以找到常向量

$$\boldsymbol{V}=c\boldsymbol{\alpha}+\mathrm{e}^{-\int\kappa\mathrm{d}s}(c_1-c\int\mathrm{e}^{\int\kappa\mathrm{d}s}\mathrm{d}s)\boldsymbol{\beta},(c_1\in\mathbf{R}),$$

使得 $\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{V}\rangle=c\neq0$. 证毕.

由定理 1 及引理 3,不难得到下面的推论,具体证明略.

推论 1 设 $r(s)$ 是 1-型伪零螺线,那么 $r(s)$ 的轴 $\boldsymbol{V}$ 是类空轴,且 $\boldsymbol{V}$ 可以由 $r(s)$ 的结构函数表示为

$$\boldsymbol{V}=c\boldsymbol{\alpha}+(g')^{-1}(c_1-cg)\boldsymbol{\beta}.$$

这里 c_1, $c\in\mathbf{R}$ 且 $c\neq0$.

2.2 2-型伪零螺线

定理 2 在 E_1^3 中不存在 2-型伪零螺线.

证明　根据 2－型伪零螺线的定义，有

$$\langle \boldsymbol{\beta},\ \boldsymbol{V}\rangle = v_3 = C_0\,(C_0 \neq 0).$$

将 $v_3 = C_0$ 代入式(3)中，可得曲率函数 $\kappa(s) \equiv 0$. 此时由式(1)可知主法向量 $\boldsymbol{\beta}$ 为常向量，显然矛盾. 证毕.

2.3　3－型伪零螺线

定理 3　设曲线 $r(s)$ 是 E_1^3 中的伪零曲线，那么 $r(s)$ 是 3－型伪零螺线当且仅当其曲率函数 $\kappa(s)$ 满足

$$\kappa''(s) = \kappa'(s)\kappa(s).$$

进一步，曲率函数 $\kappa(s)$ 有以下三种形式：

①$\kappa(s) = -2\,(s + c_1)^{-1}$；

②$\kappa(s) = 2a\tan a(s + c_2)$；

③$\kappa(s) = a\left(\dfrac{1 + \mathrm{e}^{a(s+c_3)}}{1 - \mathrm{e}^{a(s+c_3)}}\right)$.

这里 $a > 0$ 且 $c_i(i = 1,2,3) \in \mathbf{R}$.

证明　根据 3－型伪零螺线的定义，有

$$\langle \boldsymbol{\gamma},\ \boldsymbol{V}\rangle = v_2 = C_0\,(C_0 \neq 0). \tag{5}$$

在式(5)两端关于参数 s 求导，可得

$$\langle \boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{V}\rangle + \kappa\langle \boldsymbol{\gamma},\ \boldsymbol{V}\rangle = 0. \tag{6}$$

将 $v_2 = C_0$ 及式(6)代入式(3)中，可得

$$\kappa''(s) = \kappa'(s)\kappa(s). \tag{7}$$

通过降阶法解方程(7)，得到曲率 $\kappa(s)$ 的具体表达式，如定理 3 中的①，②，③.

反之，当曲率 $\kappa(s)$ 满足定理 3 中的①，②，③时，可以找到相应的常向量 $\boldsymbol{V}$ 如下：

①当 $\kappa(s) = -2\,(s + c_1)^{-1}$ 时，有

$$\boldsymbol{V} = \frac{2\boldsymbol{c}}{s + c_1}\boldsymbol{\alpha} + c\boldsymbol{\beta} - \frac{2\boldsymbol{c}}{(s + c_1)^2}\boldsymbol{\gamma};$$

②当 $\kappa(s) = 2a\tan a(s + c_2)$ 时，有

$$\boldsymbol{V} = -2\boldsymbol{c}a\tan a(s + c_2)\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{c}\boldsymbol{\beta} - 2\boldsymbol{c}a^2\sec^2 a(s + c_2)\boldsymbol{\gamma};$$

③当 $\kappa(s) = a\left(\dfrac{1 + \mathrm{e}^{a(s+c_3)}}{1 - \mathrm{e}^{a(s+c_3)}}\right)$ 时，有

$$\boldsymbol{V} = -\boldsymbol{c}a\left(\frac{1 + \mathrm{e}^{a(s+c_3)}}{1 - \mathrm{e}^{a(s+c_3)}}\right)\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{c}\boldsymbol{\beta} - 2\boldsymbol{c}a^2\,\frac{\mathrm{e}^{a(s+c_3)}}{(1 - \mathrm{e}^{a(s+c_3)})^2}\boldsymbol{\gamma}.$$

显然三种情形均满足 $\langle \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{V}\rangle = \boldsymbol{c} \neq 0$. 证毕.

由定理 3 中的三种情形，有下面的推论.

推论 2　设 $r(s)$ 是 3－型伪零螺线，那么

①当 $\kappa(s) = -2\,(s + c_1)^{-1}$ 时，轴 $\boldsymbol{V}$ 为类光轴；

②当 $\kappa(s) = 2a\tan a(s + c_2)$ 时，轴 $\boldsymbol{V}$ 为类时轴；

③当 $\kappa(s) = a\left(\dfrac{1 + \mathrm{e}^{a(s+c_3)}}{1 - \mathrm{e}^{a(s+c_3)}}\right)$ 时，轴 $\boldsymbol{V}$ 为类空轴.

这里 $a > 0$ 且 $c_i(i = 1,2,3) \in \mathbf{R}$.

由定理 3、引理 2、引理 3，通过适当的参数变换，可以得到如下结论，具体证明略.

定理 4　设 $r(s)$ 是 3－型伪零螺线，那么 $r(s)$ 的结构函数为

①当 $\kappa(s) = -2\,(s + c_1)^{-1}$ 时，有

$$f(s) = \frac{s + 1}{s - 1},\ g(s) = -\frac{1}{s};$$

②当 $\kappa(s) = 2a\tan a(s + c_2)$ 时，有

$$f(s) = \frac{-a + \tan as}{a + \tan as},\ g(s) = \frac{\tan as}{a};$$

③当 $\kappa(s) = a\left(\dfrac{1 + \mathrm{e}^{a(s+c_3)}}{1 - \mathrm{e}^{a(s+c_3)}}\right)$ 时，有

$$f(s) = \frac{1 - a(1 - \mathrm{e}^{as})}{1 + a(1 - \mathrm{e}^{as})},\ g(s) = \frac{1}{a(1 - \mathrm{e}^{as})}.$$

这里 $a > 0$ 且 $c_i(i = 1,2,3) \in \mathbf{R}$.

由定理 4，引理 2，有下面的推论.

推论 3　设 $r(s)$ 是 3－型伪零螺线，那么

①当 $\kappa(s) = -2\,(s + c_1)^{-1}$ 时，

$r(s) = (\ln|s|,\ -\ln|s|,\ s)$；

②当 $\kappa(s) = 2a\tan a(s + c_2)$ 时，

$$r(s) = -\frac{1}{a^2}(\ln|\cos as|, \ln|\cos as|, a^2 s);$$

③当 $\kappa(s) = a\left(\dfrac{1 + \mathrm{e}^{a(s+c_3)}}{1 - \mathrm{e}^{a(s+c_3)}}\right)$ 时，

$$r(s) = -\frac{1}{a^2}(\ln|1 - \mathrm{e}^{-as}|, \ln|1 - \mathrm{e}^{-as}|, a^2 s).$$

这里 $a > 0$ 且 $c_i(i = 1,2,3) \in \mathbf{R}$.

3　结　　语

本文在三维 Minkowski 空间中定义了 k－型伪零螺线，并找到了各类伪零螺线的轴. 通过定义的结构函数给出了各种螺线的具体表达式. 这为今后在不定度量空间中开展相关曲线的研究提供了一种新的思路.

参考文献：

[1] Kula L, Ekmekci N, Yayli Y, et al. Characterizations of slant helices in Euclidean 3-space [J]. *Turkish Journal of Mathematics*, 2010, 34(2): 261－273.

[2] Ferrandez A, Gimenez A, Lucas P. Null generalized helices in Lorentz-Minkowski space [J]. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 2002, 35(39): 8243－8251.

[3] Nesovic E, Ozturk E B K, Ozturk U. On *k*-type null Cartan slant helices in Minkowski 3-space [J]. *Mathematical

Methods in the Applied Sciences, 2018, 41(17): 7583 - 7598.

[4] Qian J H, Kim Y H. Null helix and *k*-type null slant helices in Minkowski 4-space[J]. *Revista De La Union Mathematica of Argentina*, 2016, 57(1): 71 - 83.

[5] Kim Y H, Yoon D W. On non-developable ruled surface in Lorentz-Minkowski 3-space [J]. *Taiwanese Journal of Mathematics*, 2007, 11(1): 197 - 214.

[6] Izumiya S, Takiyama A. A timelike surface in Minkowski 3-space which contains lightlike lines [J]. *Journal of Geometry*, 1999, 64(1): 95 - 101.

[7] Nesovic E, Ozturk U, Ozturk E B K. On *k*-type pseudo null Darboux helices in Minkowski 3-space [J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2016, 439(2): 690 - 700.

[8] Liu H L, Meng Q X. Representation formulas of curves in a two- and three-dimensional lightlike cone [J]. *Results in Mathematics*, 2011, 59(3/4): 437 - 451.

[9] Qian J H, Kim Y H. Directional associated curves of a null curve in Minkowski 3-space [J]. *Bulletin of the Korean Mathematical Society*, 2015, 52(1): 183 - 200.

[10] 梅向明,黄敬之. 微分几何[M]. 2 版. 北京:高等教育出版社,2001.

(Mei Xiang-ming, Huang Jing-zhi. Differential geometry [M]. 2nd ed. Beijing: Higher Education Press, 2001.)