

一种改进的全局可靠性分析方法

刘博林, 谢里阳
(东北大学 机械工程与自动化学院, 辽宁 沈阳 110819)

摘 要: 基于 Kriging 模型的高效全局可靠性分析(EGRA)方法在每次循环迭代过程中只能增加一个样本点. 为了提高 EGRA 方法的效率, 提出了一种基于多代理模型的改进全局可靠性分析算法. 通过引入 Kriging 模型的预测误差, 在每次循环迭代过程中, 计算多个代理模型的期望可行函数(EFF)获得多个最佳样本点, 将这些样本点同时加入到样本库中并更新所有代理模型, 直到满足给定的精度为止. 在建立极限状态函数高质量的近似模型后, 采用蒙特卡罗方法进行可靠性分析. 两个数值算例的分析结果表明, 该方法具有较高的效率和准确性.

关 键 词: 可靠性分析; 期望可行函数; 多代理模型; 不确定性估计; Kriging 模型
中图分类号: TP 319 **文献标志码:** A **文章编号:** 1005-3026(2020)07-0943-06

An Improved Method of Global Reliability Analysis

LIU Bo-lin, XIE Li-yang
(School of Mechanical Engineering & Automation, Northeastern University, Shenyang 110819, China.
Corresponding author: LIU Bo-lin, E-mail: strive_1980@163.com)

Abstract: In the efficient global reliability analysis(EGRA) method based on the Kriging model, only one sample point can be added in each iteration. In order to improve the efficiency of EGRA, an improved method of global reliability analysis based on the multi-agent model was proposed. By importing the prediction errors of the Kriging model, the expected feasibility function(EFF) of the multi-agent model was calculated to obtain multiple sample points in each iteration, then these points were added to the design of experiment(DoE) at the same time and all the agents were updated until the given precision was satisfied. After a high-quality model of the implicit limit state function was established, the Monte Carlo method was employed to perform the reliability analysis. The results of two relevant numerical examples verify the high efficiency and accuracy of the proposed method.

Key words: reliability analysis; expected feasibility function; multi-agent model; uncertainty estimation; Kriging model

机械结构的材料性能、作用载荷以及几何特性等存在诸多的不确定性. 为了考虑这些不确定因素的影响, 往往需要复杂的数值积分计算以获得结构的失效概率, 但对于非线性程度较高或者具有隐式功能函数的可靠性评估问题是不可行的, 目前, 国内外学者提出了很多可靠性分析方法来解决这一问题. 例如蒙特卡罗模拟(Monte Carlo simulation, MCS)方法、一阶可靠性方法、二阶可靠性方法、代理模型方法等. 一阶可靠性方法及二阶可靠性方法只适用于具有显式功能函数的可靠性评估问题, 且精度较低. MCS 方法虽然可以避免求解功能函数的显式表达, 但计算工作量太大. 代理模型方法是目前应用最广泛的机械结构可靠性分析方法.

在基于代理模型的可靠性方法中, 响应面模型结构简单, 广泛应用于结构的可靠性分析中. 但基于响应面模型的结构可靠性分析方法对于非线性程度较高的功能函数, 会带来较大的计算误差. 文献[1-5]研究了基于神经网络模型、支持向量机模型、Kriging 模型的结构可靠性分析方法, 获得了较好的分析结果.

近年来, 基于 Kriging 模型的可靠性分析方

法引起了广泛的关注. 国内外学者进行了大量的研究^[6-12]. 与其他代理模型相比,Kriging 模型是一种高效的差值模型,不但可以获得未知样本点的预测均值,还能获得预测误差,预测误差可以被广泛地应用于下一次样本的更新与选择. 基于 Kriging 模型的可靠性分析方法中,应用最广泛的是文献[11]提出的高效全局可靠性分析(efficient global reliability analysis,EGRA)方法以及文献[12]提出的结合 Kriging 模型及 MCS(AK-MCS)的可靠性分析方法等. 这种序列可靠性分析方法能够提高结构可靠性计算的精度,并减少对实际功能函数的调用次数. 然而,此类序列可靠性分析方法均需要估计未知样本点的误差,对于其他代理模型如:响应面、径向基函数、支持向量机等均不能给出样本点的预测误差,从而限制了该类方法的应用.

鉴于此,本文提出一种改进的 EGRA 方法,使所有代理模型共用 Kriging 模型的预测误差. 从而,在每次迭代过程中,通过最大化所有代理模型的期望可行函数(expected feasibility function, EFF)获得多个样本点. 将这些样本点同时加入到样本库中并更新所有代理模型,直到满足给定的精度为止. 本文提出的方法能够充分发挥有限的样本信息,仅需要较少的迭代次数,就能得到较好预测模型.

1 高效全局可靠性分析算法

高效全局可靠性分析方法(EGRA)是在

$$f(\boldsymbol{x}) = (\mu_{\hat{G}}(\boldsymbol{x}) - z) \left[2\Phi\left(\frac{z - \mu_{\hat{G}}(\boldsymbol{x})}{\sigma_{\hat{G}}(\boldsymbol{x})}\right) - \Phi\left(\frac{(z - \varepsilon) - \mu_{\hat{G}}(\boldsymbol{x})}{\sigma_{\hat{G}}(\boldsymbol{x})}\right) - \Phi\left(\frac{(z + \varepsilon) - \mu_{\hat{G}}(\boldsymbol{x})}{\sigma_{\hat{G}}(\boldsymbol{x})}\right) \right] - \sigma_{\hat{G}}(\boldsymbol{x}) \left[2\varphi\left(\frac{z - \mu_{\hat{G}}(\boldsymbol{x})}{\sigma_{\hat{G}}(\boldsymbol{x})}\right) - \varphi\left(\frac{(z - \varepsilon) - \mu_{\hat{G}}(\boldsymbol{x})}{\sigma_{\hat{G}}(\boldsymbol{x})}\right) - \varphi\left(\frac{(z + \varepsilon) - \mu_{\hat{G}}(\boldsymbol{x})}{\sigma_{\hat{G}}(\boldsymbol{x})}\right) \right] + \varepsilon \left[\Phi\left(\frac{(z + \varepsilon) - \mu_{\hat{G}}(\boldsymbol{x})}{\sigma_{\hat{G}}(\boldsymbol{x})}\right) - \Phi\left(\frac{(z - \varepsilon) - \mu_{\hat{G}}(\boldsymbol{x})}{\sigma_{\hat{G}}(\boldsymbol{x})}\right) \right]. \tag{5}$$

式中, $\varepsilon = 2\sigma_{\hat{G}}(\boldsymbol{x})$, $z = 0$.

最佳样本点为使 $f(\boldsymbol{x})$ 函数取最大值所对应的点:

$$\boldsymbol{x}^* = \arg(\max(f(\boldsymbol{x}))) . \tag{6}$$

EGRA 方法采用 EFF 函数评价指标在极限状态方程附近自适添加最显著样本点,当最大 EFF 函数值满足收敛条件时,即终止整个迭代过程. EGRA 方法极大地提高了 Kriging 模型在极限状态曲面附近的预测精度,但在迭代过程中,每次仅增加一个样本点来更新代理模型,效率较低,且无法实现并行计算.

Kriging 模型基础上,结合主动学习函数发展而来的. 为此,本文先对 Kriging 模型作简要介绍.

1.1 Kriging 模型

一般来说,Kriging 模型由线性回归部分和非参数部分组成:

$$F(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{h}^T(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\beta} + Z(\boldsymbol{x}) . \tag{1}$$

式中: $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})$ 为回归多项式基函数向量; $\boldsymbol{\beta}$ 是用广义最小二乘法估计的回归系数向量; $Z(\boldsymbol{x})$ 服从均值为零、方差为常量的正态分布,且 $Z(\boldsymbol{x}_i)$ 和 $Z(\boldsymbol{x}_j)$ 的协方差定义为

$$\text{Cov}(Z(\boldsymbol{x}_i), Z(\boldsymbol{x}_j)) = \sigma^2 R(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_j, \theta) . \tag{2}$$

式中: $\sigma^2, R(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_j, \theta)$ 分别表示样本方差及相关函数; θ 为相关性参数.

根据 Kriging 理论,在未知点 \boldsymbol{x} 的预测值为

$$\hat{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{F}\hat{\boldsymbol{\beta}} + \boldsymbol{r}^T \boldsymbol{R}^{-1}(\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{F}\hat{\boldsymbol{\beta}}) . \tag{3}$$

其中: \boldsymbol{F} 为回归矩阵; $\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{F}^T \boldsymbol{R}(\boldsymbol{F})^{-1} \boldsymbol{F}^T \boldsymbol{R}^{-1} \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}))$ 表示的是 $\boldsymbol{\beta}$ 的最小二乘估计值; \boldsymbol{R} 为相关矩阵; \boldsymbol{r} 为预测点 \boldsymbol{x} 与所有已知训练样本点之间的相关向量; $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}) = [G_1(\boldsymbol{x}), G_2(\boldsymbol{x}), \cdots, G_n(\boldsymbol{x})]^T$ 为初始样本点组成的响应值向量. Kriging 预测的方差可表示为

$$s^2(\boldsymbol{x}) = \sigma^2 - [\boldsymbol{F} \quad \boldsymbol{r}^T] \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{F}^T \\ \boldsymbol{F} & \boldsymbol{R} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \boldsymbol{F}^T \\ \boldsymbol{r} \end{bmatrix} . \tag{4}$$

1.2 高效全局可靠性分析方法

高效全局可靠性分析(EGRA)方法由 Bichon 等^[11]提出用于求解具有非线性隐式功能函数的可靠性问题. 其原理是采用 EFF 指标评价真实响应函数在 $z \pm \varepsilon$ 范围内满足等式约束 $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}) = z$ 的程度,即

2 基于多代理的改进全局可靠性分析方法

本文在 EGRA 方法的基础上提出了一种改进的全局可靠性分析方法. 该方法通过最大化多个代理模型的 EFF 函数(式(5))获得多个样本点,将这些新增样本点添加到初始样本库中并更新全部代理模型,直到满足给定的收敛条件.

2.1 引入其他代理模型的不确定估计

EGRA 方法需要代理模型提供未知样本点的不确定估计. 除 Kriging 模型外,其他代理模型均不具备这一特性. 根据 Jones 等^[13]的研究:代理模

型不需要提供未知样本点的精确不确定估计,可以采用从其他代理模型引入的方法.因此,本文提出引入 Kriging 模型预测误差的多代理模型可靠性分析方法.

通过一维算例 $f(x) = (6x - 2)^2 \times \sin(2 \times (6x - 2))$,说明引入 Kriging 模型预测误差的合理性.该算例函数的非线性程度高,分别采用 Kriging 模型和支持向量回归 (support vector regression, SVR) 模型进行拟合,拟合结果见图 1. Kriging 模型和支持向量回归模型均采用差值优化算法构建预测模型,从图 1a 中可以看出:两个代理模型的预测值均通过初始样本点.通过对比图 1b 和图 1c 可以看到, Kriging 模型为 SVR 模型提供了合理的误差估计.

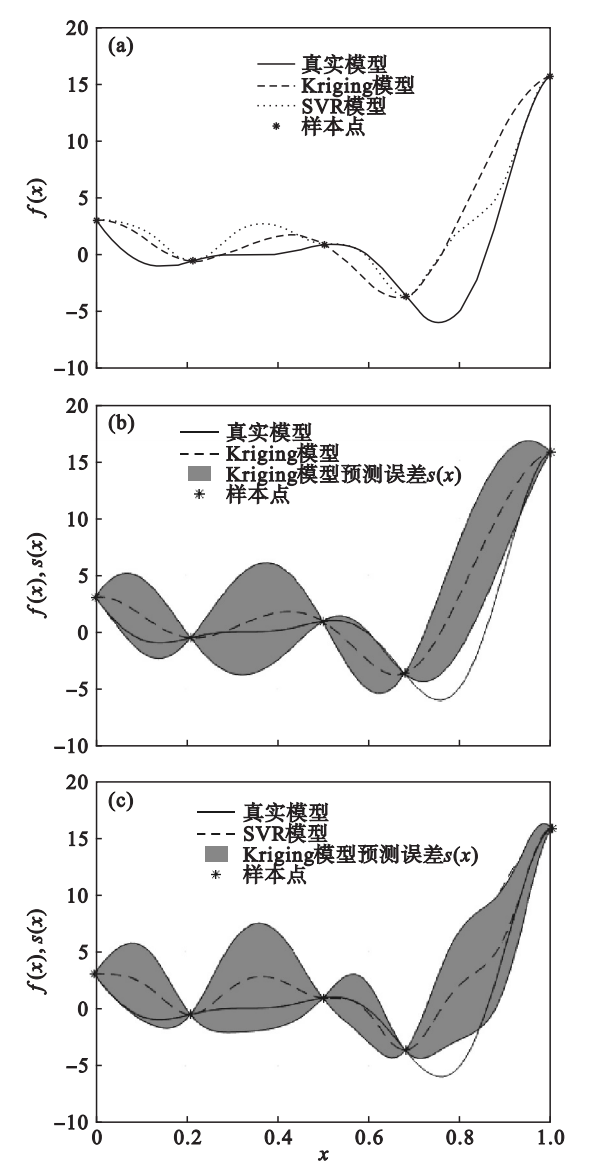


图 1 引入 Kriging 模型的预测误差

Fig. 1 Prediction errors imported into the Kriging model

- (a)—Kriging 及 SVR 预测值和初始样本;
- (b)—Kriging 预测值及预测误差;
- (c)—SVR 预测值及引入 Kriging 预测误差.

图 2 为 Kriging 模型及 SVR 模型真实误差与预测误差的对比分析.图 2a 的分析结果说明: Kriging 模型的预测误差与函数的真实误差吻合得较好.从图 2b 中可以看出,引入 Kriging 模型的预测误差总体上反映了 SVR 模型真实误差的分布趋势.算例的分析结果表明:引入其他代理模型不确定性估计的方法是可行的.

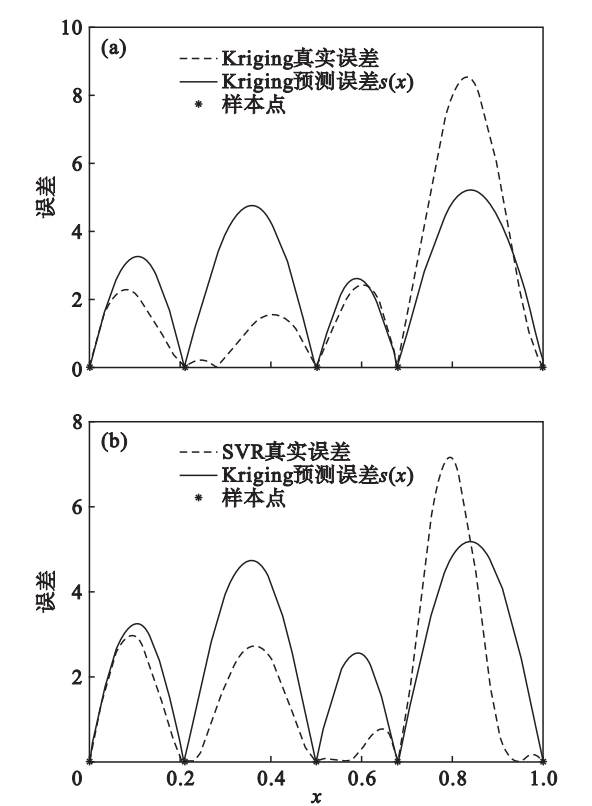


图 2 真实误差与预测误差的比较

Fig. 2 Comparison of real errors and prediction errors

- (a)—Kriging 模型真实误差与预测误差;
- (b)—SVR 模型真实误差与引入预测误差.

2.2 基于多代理的改进全局可靠性分析方法

鉴于 EGRA 方法不能实现多点采样及并行计算,本文提出一种基于多代理的改进全局可靠性分析方法.在序列采样过程中,该方法通过最大化多个代理模型的 EFF (式 (5)) 获得多个样本点,添加到初始样本库中并更新全部代理模型,直到满足收敛条件.方法的具体步骤为

- 1) 采用拉丁超立方抽样方法生成少量初始样本,计算功能函数真实响应值,建立初始样本集.
- 2) 构建多个代理模型.本文所采用的多个代理模型中,包含一个 Kriging 模型,其他代理模型均引入 Kriging 模型的不确定性估计.
- 3) 计算基于各代理模型的 EFF 值,并找出使 EFF (式 (6)) 取得最大值的全部样本点,若

$\max(\text{EFF}(\mathbf{x}))$ 小于给定的阈值,转到步骤 7)。

4) 利用并行计算的方法,计算步骤 3) 获得的全部样本点的真实响应函数值。

5) 将新增样本点添加到初始样本集中,并更新所有代理模型。

6) 转到步骤 2),继续下一次循环迭代过程。

7) 利用最后一次循环迭代构建的代理模型及 MCS 方法计算失效概率。

3 实例验证

通过两个工程实例(包括一个高维问题(算例 1)和一个高度非线性问题(算例 2))来验证所提方法的准确性和有效性。

3.1 10 杆平面桁架结构

算例 1 考虑文献[14]中的平面 10 杆桁架结构,如图 3 所示。随机变量为各杆件的横截面积、各节点荷载、水平杆件和垂直杆件的长度 L ,弹性模量 E 。各随机变量相互独立,且服从正态分布,其均值和变异系数如表 1 所示。结构的极限状态方程为

$$g = 0.004 - \Delta y.$$

(7)

其中 Δy 为节点 4 在垂直方向上的位移。节点 4 的垂直位移超过允许值则发生失效。由于结构较为复杂,采用有限元软件对 Δy 进行求解。结构的有限元模型如图 4 所示。

本例中,本文方法使用 4 个代理模型(响应面模型、径向基函数模型、支持向量机模型及 Kriging)共用 Kriging 模型的预测方差来验证所提方法的有效性。可靠性分析结果列于表 2。其中,将样本数目为 10^6 的 MCS 计算结果作为参考值, N_{call} 为有限元仿真次数, $N_{\text{iteration}}$ 为迭代次数, P_f 为失效概率, ΔP_f 为失效概率的相对误差。

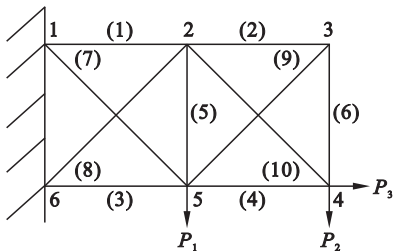


图 3 平面 10 杆桁架结构
Fig. 3 Diagram of the ten-bar structure

表 1 桁架结构随机变量分布信息

Table 1 Distribution parameters of the input variables of the ten-bar structure

随机变量	L/m	E/GPa	A_i/m^2	P_1/kN	P_2/kN	P_3/kN
均值	1	100	0.001	80	10	10
变异系数	0.05	0.05	0.1	0.05	0.05	0.05

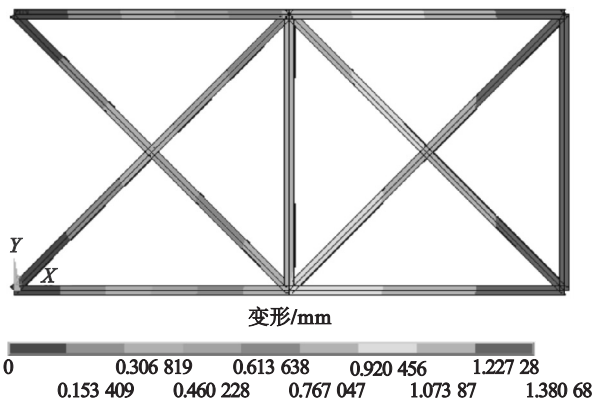


图 4 平面 10 杆桁架结构有限元模型
Fig. 4 Finite element model of the ten-bar structure

对比表 2 中的计算结果可知,EGRA 方法需要 91 次的循环迭代才能得到较好的计算结果,其计算成本明显低于 MCS 方法,但与本文方法相比,其计算效率仍然不高。而本文方法仅需要 36 次循环迭代就能够较好地评估结构的失效概率。虽然本文方法需要更多的有限元仿真次数,但借

助并行计算手段只需要较少的循环迭代次数就能获得理想的分析结果。该算例表明在每次迭代过程中使用多点加点方法是有益的。

表 2 桁架结构可靠性分析结果

Table 2 Results of the reliability analysis of the ten-bar structure

方法	N_{call}	$N_{\text{iteration}}$	P_f	$\Delta P_f/\%$
MCS	10^6	—	6.770×10^{-2}	—
EGRA ^[11]	91	91	6.761×10^{-2}	0.13
本文方法	144	36	6.757×10^{-2}	0.19

给定不同的循环迭代终止指标,EGRA 方法和本文方法所需的循环迭代次数是不同的。为了证明本文方法的有效性,对两种方法在不同迭代终止指标下所需的迭代次数进行了比较,分析结果如图 5 所示。以 MCS 方法所需要的迭代次数为参考,如图中虚线所示。从图 5 中可以看出,本文方法需要较少的迭代次数就能迅速收敛到真实值,表明了本文所提出方法的有效性。

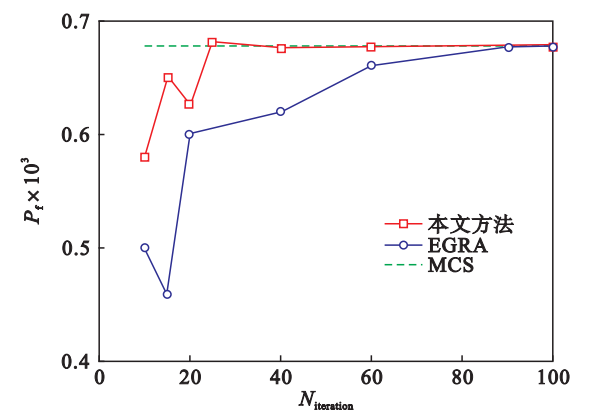


图 5 算例 1 不同迭代终止指标下的循环迭代次数对比
Fig. 5 Results of different $N_{iteration}$ for different index of iteration termination for example 1

3.2 加筋板问题

算例 2 选取文献[14]中某双壳油轮甲板加筋板结构,如图 6 所示. 加筋板各随机变量的分布信息如表 3 所示. 结构的极限状态函数为

$$g(\boldsymbol{x}) = \sigma_u(\boldsymbol{x}) - (\sigma_{sw}(\boldsymbol{x}) + \sigma_{wi}(\boldsymbol{x})) . \quad (8)$$

式中: $\sigma_u(\boldsymbol{x})$ 为加筋板的极限压应力; $\sigma_{sw}(\boldsymbol{x})$ 为轴向静水压应力; $\sigma_{wi}(\boldsymbol{x})$ 为波浪载荷引起的轴向压应力.

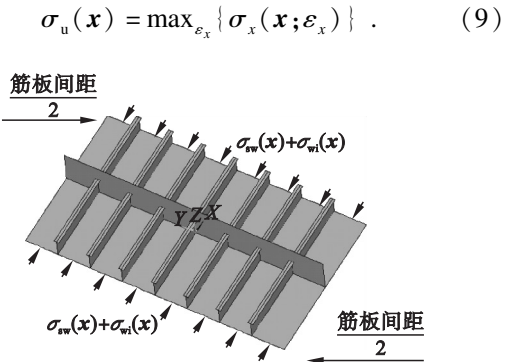


图 6 加筋板结构有限元模型
Fig. 6 Finite element model of the stiffened plate

利用线性弹性理论和材料的塑性法则模拟加筋板在轴向压力作用下的材料非线性行为. 在有限元分析软件 ANSYS 中求解式(8)中的各应力分量. 为了提高分析效率,在加筋板的纵向边缘和中间横截面处施加对称边界条件.

本例中,本文方法使用 6 个代理模型(响应面模型、改进响应面模型、神经网络模型、径向基函数模型、支持向量机模型及 Kriging)共用 Kriging 模型的预测方差来验证所提方法的可行性,可靠性分析结果见表 4.

表 3 加筋板结构随机变量分布参数
Table 3 Distribution parameters of the random variables of the stiffened plate

变量	均值	变异系数	分布类型
基板厚 t/mm	0.05	0.05	正态分布
腹板厚度 t_w/mm	9.5	0.02	正态分布
翼缘厚度 t_f/mm	14.0	0.02	正态分布
基板屈服极限 $\sigma_{y d, p}/\text{MPa}$	348.1	0.06	指数正态分布
筋板屈服极限 $\sigma_{y d, s}/\text{MPa}$	348.1	0.06	指数正态分布
基板弹性模量 E_p/MPa	206 000	0.06	指数正态分布
筋板弹性模量 E_s/MPa	206 000	0.06	指数正态分布
基板厚 ω_{op}/mm	2.3	0.5	指数正态分布
侧向加筋板厚 ω_{os}/mm	2.8	0.5	指数正态分布
立面加筋板厚 Ω_{oc}/mm	2.8	0.5	指数正态分布
静水应力分量 σ_{sw}/MPa	48.2	0.29	正态分布
波浪引起的应力分量 σ_{wi}/MPa	131.3	0.09	极值型分布

表 4 加筋板结构可靠性分析结果
Table 4 Results of the reliability analysis of the stiffened plate

方法	N_{call}	$N_{iteration}$	P_f	$\Delta P_f/\%$
MCS	10^6	—	1.903×10^{-5}	—
EGRA ^[11]	485	485	1.908×10^{-5}	0.26
本文方法	558	93	1.910×10^{-5}	0.36

从表 4 中可以看出:MCS 方法需要 10^6 次的有限元计算才能得到理想的分析结果,对于实际工程问题是不可行的. 与 MCS 方法相比较,EGRA 方法虽然显著减少了循环迭代次数,但其计算成本也令人难以接受. 而本文方法只需要 93 次循环迭代就可以收敛到精确解. 这是由于在每次迭代过程中,本文方法借助并行计算技术可同时进行多达 6 次的有限元模拟,因此,本文方法效

率更高. 可靠性分析结果表明,该方法是一种有效的复杂结构可靠性分析方法. 对于具有非线性功能函数的可靠性问题,尤其涉及到复杂有限元计算的工程应用实例,其优势更加明显.

同样,对 EGRA 方法及本文方法在不同迭代终止指标下的迭代次数进行了比较,如图 7 所示. 从图 7 可以看出,本文方法以更快的速度收敛到 MCS 方法分析结果. 当进行到 93 次循环迭代时,本文方法的计算结果与 MCS 方法的结果基本一致. 然而,对于 EGRA 方法来说,直到 485 次循环迭代后才接近 MCS 方法计算结果. 因此,本文提出的方法更适合解决算例 2 工程问题.

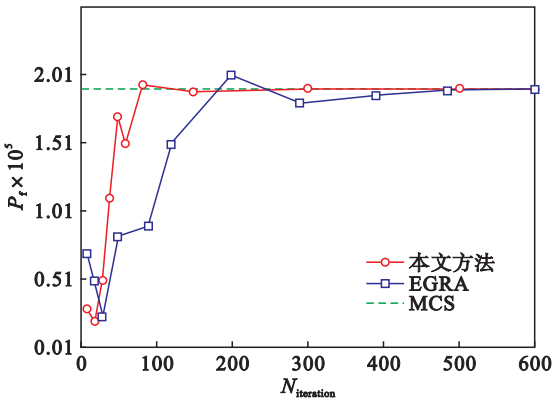


图 7 算例 2 不同迭代终止指标下的循环迭代次数对比
Fig. 7 Results of different $N_{iteration}$ for different index of iteration termination for example 2

4 结 论

1) 本文提出了一种改进的 EGRA 方法. 与现有的 EGRA 方法相比,该方法在每次循环迭代中使用多个代理模型同时向样本库中添加多个样本点,并更新所有代理模型,直到满足给定的精度循环迭代停止. 由于某些代理模型不能给出样本点的不确定性估计,本文提出从 Kriging 模型引入不确定性估计的方法,即所有代理模型共用 Kriging 模型预测误差的方法. 在获得隐式极限状态方程精确的近似模型后,采用 MCS 方法进行可靠性分析.

2) 本文提出的方法能够显著减少循环迭代次数. 虽然对功能函数的总调用次数多于 EGRA 方法,但借助并行计算技术,本文所提出的方法效率更高.

3) 本文方法在具有高维和非线性隐式极限状态函数的两个工程问题中进行了验证. 结果表明,本文提出的方法是一种高效的可靠性分析方法,能更好地应用于复杂的实际工程问题.

参考文献:

[1] Papadrakakis M, Lagaros N D. Reliability-based structural optimization using neural networks and Monte Carlo simulation[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2001, 191(32): 3491 – 3507.

[2] Bourinet J M, Deheeger F, Lemaire M. Assessing small failure probabilities by combined subset simulation and support vector machines[J]. *Structural Safety*, 2011, 33(6): 343 – 353.

[3] Kaymaz I. Application of Kriging method to structural reliability problems[J]. *Structural Safety*, 2005, 27(2): 133 – 151.

[4] Echard B, Gayton N, Lemaire M, et al. A combined importance sampling and Kriging reliability method for small failure probabilities with time-demanding numerical models[J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2013, 111(8): 232 – 240.

[5] Bucher C G, Bourgund U. A fast and efficient response surface approach for structural reliability problems[J]. *Structural Safety*, 1990, 7(1): 57 – 66.

[6] Zhang C Y, Wang Z, Fei C W, et al. Fuzzy multi-SVR learning model for reliability-based design optimization of turbine blades[J]. *Materials*, 2019, 12(15): 2341 – 2355.

[7] Song L K, Bai G C, Fei C W. Probabilistic LCF life assessment of turbine discs using DC-based wavelet neural network regression[J]. *International Journal of Fatigue*, 2019, 119: 204 – 219.

[8] Fei C W, Lu C, Feng Y W, et al. Improved decomposed-coordinated Kriging modeling strategy for dynamic probabilistic analysis of multi-component structures[J]. *IEEE Transactions on Reliability*, 2019, 29: 54379.

[9] Fei C W, Lu C, Rhea P. Decomposed-coordinated surrogate modelling strategy for compound function approximation and a turbine blisk reliability evaluation[J]. *Aerospace Science and Technology*, 2019, 95: 105466.

[10] Lu C, Feng Y W, Rhea P, et al. Improved Kriging with extremum response surface method for structural dynamic reliability and sensitivity analyses[J]. *Aerospace Science and Technology*, 2018, 76: 164 – 175.

[11] Bichon B J, Eldred M S, Swiler L P, et al. Efficient global reliability analysis for nonlinear implicit performance functions[J]. *AIAA Journal*, 2008, 46(10): 2459 – 2468.

[12] Echard B, Gayton N, Lemaire M. AK-MCS: an active learning reliability method combining Kriging and Monte Carlo simulation[J]. *Structural Safety*, 2011, 33(2): 145 – 154.

[13] Jones D R, Schonlau M, Welch W J. Efficient global optimization of expensive black-box functions[J]. *Journal of Global Optimization*, 1998, 13(4): 455 – 492.

[14] Li L Y, Lu Z Z, Feng J, et al. Moment-independent importance measure of basic variable and its state dependent parameter solution[J]. *Structural Safety*, 2012, 38: 40 – 47.