

一种自适应步长的复合梯度加速优化算法

印明昂¹, 王钰烁², 孙志礼¹, 于云飞³
(1. 东北大学 机械工程与自动化学院, 辽宁 沈阳 110819;
2. 中车长春轨道客车股份有限公司, 吉林 长春 130062; 3. 中国航发沈阳发动机研究所, 辽宁 沈阳 110015)

摘 要: 自适应步长加速(Adam)类算法由于其计算效率高、兼容性好的特点,成为近期相关领域的研究热点. 针对 Adam 收敛速度慢的问题,本文基于当前梯度、预测梯度以及历史动量梯度,提出一种新型 Adam 类一阶优化算法——复合梯度下降法(C-Adam),并对其收敛性进行了理论证明. 与其他加速算法的区别之处在于,C-Adam 将预测梯度与历史动量区别开,通过一次真实的梯度更新找到下一次迭代更精准的搜索方向. 利用两组常用测试数据集及 45 钢静拉伸破坏实验的实验数据对所提算法进行验证,实验结果表明 C-Adam 与其他流行算法相比较具有更快的收敛速度及更小的训练损失.

关 键 词: 一阶优化算法;复合梯度下降法;Logistic 回归;模式识别

中图分类号: TP 312 **文献标志码:** A **文章编号:** 1005-3026(2020)09-1274-06

A Compound Gradient Acceleration Optimization Algorithm with Adaptive Step Size

YIN Ming-ang¹, WANG Yu-shuo², SUN Zhi-li¹, YU Yun-fei³
(1. School of Mechanical Engineering & Automation, Northeastern University, Shenyang 110819, China;
2. CRRC Changchun Railway Vehicles Co., Ltd., Changchun 130062, China; 3. AVIC Shenyang Engine Design Institute, Shenyang 110015, China. Corresponding author: YIN Ming-ang, E-mail: yinma@mail.neu.edu.cn)

Abstract: In related researches, a class of adaptive iteration step size accelerated (Adam) algorithms becomes a research hotspot because of its high computational efficiency and compatibility. To solve the problem of Adam's low convergence rate, based on the combination of current gradient, prediction gradient and historical momentum gradient, this paper proposed a new kind of Adam algorithm named as compound gradient descent method(C-Adam), and proved its convergence. The difference between C-Adam and other acceleration algorithms is that C-Adam distinguishes the prediction gradient from the historical momentum, and finds a more accurate search direction for the next iteration through a real gradient update. Using two testing data sets and the data of 45 steel static tensile experiment to test the C-Adam, the results show that the algorithm has faster convergence speed and smaller training loss compared with other popular algorithms.

Key words: first-order optimization algorithm; compound gradient descent method; Logistic regression; pattern recognition

以分类算法为基础的“人工智能”正深刻影响着科研领域的每一方面. 在此背景下,各项实验中样本数据数量和维度呈现出“爆炸”增长的态势. 为适应这种趋势,近年,数值计算理论与优化方法得到了长足发展. 其中,一阶优化算法以其出众的计算效率在数值优化领域得到了广泛的研究和应用^[1]. Sashank 等^[2]指出自适应步长加速算法 Adam 在收敛性上存在缺陷,并通过赋予历史梯度的“长期记忆”提出 AMSGrad 算法,从理论上解决了收敛问题. Jun 等^[3]同样从 Adam 的收敛问题出发,通过一种基于历史与当前梯度的平方衰减构建了一种有针对性的自适应优化算

法. Ma 等^[4]在动量加速随机梯度下降法的基础上提出准双曲权重衰减的加速算法 QHM, 并找到一种通过改变超参数将该算法转变为其他算法的方法. Luo 等^[5]对比了随机梯度下降法 (SGD) 与自适应方法的泛化与收敛能力, 通过使用动态的学习率变化界限提供了 Adam 和 AMSGrad 的一种新变种, 分别称为 AdamBound 和 AMSBound, 实现了从自适应方法到 SGD 的渐进平稳过渡.

本文基于一种当前梯度、预测梯度及历史动量梯度三者结合的复合梯度, 提出一种新型自适应步长加速优化算法, 称为复合梯度下降法 (C-Adam), 并通过寻找在文献[6]中定义的遗憾 (regret) 上界, 证明 C-Adam 算法的收敛性. 最后对 MNIST, Cifar-10 常用测试数据集及 45 钢静拉伸破坏实验的实验数据通过多种算法建立 Logistic 回归模型, 对比验证本文算法的性能表现.

1 复合梯度下降法

1.1 算法描述及更新规则

算法 1 复合梯度法 C-Adam

输入: 超参数: b_1, b_2 ; 迭代步长 η

初始化 $\theta = \mathbf{0}$; (待求参数)

初始化 $\mathbf{g}_t = \mathbf{0}$; (当前梯度)

$\mathbf{u}_t = \mathbf{0}$; (预测梯度)

$\mathbf{m}_t = \mathbf{0}$; (动量一阶矩)

$\mathbf{v}_t = \mathbf{0}$; (动量二阶矩)

初始化 $t = 0$; (迭代次数)

当 θ 不收敛或未达到最大迭代次数时, 循环:

$t = t + 1$;

$\mathbf{g}_t = \nabla_{\theta} J(\theta_{t-1})$; (取得参数当前梯度)

$\theta_t = \theta_{t-1} - \eta \cdot \mathbf{g}_t$; (梯度下降法更新参数)

$t = t + 1$;

$\mathbf{u}_t = \nabla_{\theta} J(\theta_{t-1})$; (取得参数预测梯度)

$\mathbf{m}_t = b_1 \cdot \mathbf{m}_{t-1} + (1 - b_1) \cdot (\mathbf{g}_t + \mathbf{u}_t)$; (梯度复合)

$\mathbf{v}_t = b_2 \cdot \mathbf{v}_{t-1} + (1 - b_2) \cdot (\mathbf{g}_t + \mathbf{u}_t)^2$;

$\theta_t = \theta_{t-1} - \eta \cdot \mathbf{m}_t / (\mathbf{v}_t)^{1/2}$; (更新参数)

循环结束

输出: 参数 θ_t

算法 1 为复合梯度下降法的伪代码描述. 其中, θ 表示所求问题的解; \mathbf{g}_t 表示数据在当前位置

的梯度; \mathbf{u}_t 表示利用梯度下降法更新 θ 后下一位置的梯度 (如采用 mini-batch 策略在此次更新中不改变所选数据), 称为预测梯度; \mathbf{m}_t 表示动量梯度, 由历史动量、当前梯度及预测梯度三者复合而成; \mathbf{v}_t 表示三种梯度二阶矩的复合, 用以自适应控制迭代的步长; $\mathbf{m}_t, \mathbf{v}_t$ 的惯性衰减通过超参数 b_1, b_2 控制, 通常 $b_1 = 0.99, b_2 = 0.999$; t 表示迭代次数.

算法 1 与以往加速算法的区别在于将预测梯度与历史动量区别开, 通过一次真实的梯度更新找到下一步动量更精准的下降方向. 这一过程虽进行了两次迭代, 但与其他算法的两次迭代相比下降速度更快, 结果更为精确. 这一结论将在第二节数据测试部分得到验证.

1.2 收敛性证明

运用文献[6]中的收敛性分析方法对复合梯度法进行收敛性证明.

令迭代步长与迭代次数的关系为根方衰减, 即 $\eta = \eta/t^{1/2}$; 令 θ^* 表示解空间中的最优解, θ_i^* 表示 θ^* 的第 i 个分量, $\|\theta_{1:T,i}^*\|$ 表示 θ^* 第 i 个分量前 T 次迭代值的范数; 同时假设 θ 的凸可行域 F 的半径存在上界 D_{∞} , 损失函数一阶导数的无穷范数存在上界 G_{∞} , 即对于所有的 $t \in [T]$ 和 $\theta \in F$, 有 $\|\nabla f_t(\theta)\|_{\infty} \leq G_{\infty}$.

首先观察下式:

$$\|\mathbf{v}_t^{1/4}(\theta_{t+1} - \theta^*)\|^2 =$$

$$\|\mathbf{v}_t^{1/4}(\theta_t - \eta_t \mathbf{v}_t^{-1/2} \mathbf{m}_t - \theta^*)\|^2. \quad (1)$$

由算法 1 可知式(1)成立, 将其进一步展开, 有

$$\|\mathbf{v}_t^{1/4}(\theta_{t+1} - \theta^*)\|^2 =$$

$$\|\mathbf{v}_t^{1/4}(\theta_t - \eta_t \mathbf{v}_t^{-1/2} \mathbf{m}_t - \theta^*)\|^2 =$$

$$\|\mathbf{v}_t^{1/4}(\theta_t - \theta^*)\|^2 + \eta_t^2 \|\mathbf{v}_t^{-1/4} \mathbf{m}_t\|^2 -$$

$$2\eta_t \langle \mathbf{m}_t, \theta_t - \theta^* \rangle. \quad (2)$$

其中, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示向量之间的内积. 根据算法 1 中 \mathbf{m}_t 的更新规则, 有

$$\|\mathbf{v}_t^{1/4}(\theta_{t+1} - \theta^*)\|^2 =$$

$$\|\mathbf{v}_t^{1/4}(\theta_t - \eta_t \mathbf{v}_t^{-1/2} \mathbf{m}_t - \theta^*)\|^2 =$$

$$\|\mathbf{v}_t^{1/4}(\theta_t - \theta^*)\|^2 + \eta_t^2 \|\mathbf{v}_t^{-1/4} \mathbf{m}_t\|^2 -$$

$$2\eta_t \langle \mathbf{m}_t, \theta_t - \theta^* \rangle =$$

$$\|\mathbf{v}_t^{1/4}(\theta_t - \theta^*)\|^2 + \eta_t^2 \|\mathbf{v}_t^{-1/4} \mathbf{m}_t\|^2 -$$

$$2\eta_t \langle b_1 \mathbf{m}_{t-1} + (1 - b_1)(\mathbf{g}_t + \mathbf{u}_t), \theta_t - \theta^* \rangle =$$

$$\|\mathbf{v}_t^{1/4}(\theta_t - \theta^*)\|^2 + \eta_t^2 \|\mathbf{v}_t^{-1/4} \mathbf{m}_t\|^2 -$$

$$2\eta_t \langle b_1 \mathbf{m}_{t-1} + (1 - b_1) \tilde{\mathbf{g}}_t, \theta_t - \theta^* \rangle. \quad (3)$$

其中, $\tilde{\mathbf{g}}_t = \mathbf{g}_t + \mathbf{u}_t$. 将式(3)两端移项并整理, 有

$$\langle \tilde{\mathbf{g}}_t, \theta_t - \theta^* \rangle = \frac{1}{2\eta_t(1 - b_1)} [\|\mathbf{v}_t^{1/4}(\theta_t - \theta^*)\|^2 -$$

$$\|\mathbf{v}_t^{1/4}(\theta_{t+1} - \theta^*)\|^2] + \frac{\eta_t}{2(1 - b_1)} \|\mathbf{v}_t^{-1/4} \mathbf{m}_t\|^2 +$$

$$\frac{b_1}{1-b_1} \langle \mathbf{m}_{t-1}, \boldsymbol{\theta}_t - \boldsymbol{\theta}^* \rangle. \tag{4}$$

根据柯西 - 许瓦兹不等式: $2ab \leq a^2 + b^2$, 有

$$\langle \tilde{\mathbf{g}}_t, \boldsymbol{\theta}_t - \boldsymbol{\theta}^* \rangle \leq \frac{1}{2\eta_t(1-b_1)} [\|\mathbf{v}_t^{1/4}(\boldsymbol{\theta}_t - \boldsymbol{\theta}^*)\|^2 - \|\mathbf{v}_t^{1/4}(\boldsymbol{\theta}_{t+1} - \boldsymbol{\theta}^*)\|^2] + \frac{\eta_t}{2(1-b_1)} \|\mathbf{v}_t^{-1/4} \mathbf{m}_t\|^2 +$$

$$\frac{b_1 \eta_t}{2(1-b_1)} \|\mathbf{v}_t^{-1/4} \mathbf{m}_{t-1}\|^2 + \frac{b_1}{2\eta_t(1-b_1)} \|\mathbf{v}_t^{1/4}(\boldsymbol{\theta}_t - \boldsymbol{\theta}^*)\|^2. \tag{5}$$

根据文献[6]定义遗憾(regret)为

$$R_T = \sum_{t=1}^T f_t(\boldsymbol{\theta}_t) - f_t(\boldsymbol{\theta}^*). \tag{6}$$

又由凸函数性质:

$$\sum_{t=1}^T f_t(\boldsymbol{\theta}_t) - f_t(\boldsymbol{\theta}^*) \leq \sum_{t=1}^T \langle \tilde{\mathbf{g}}_t, \boldsymbol{\theta}_t - \boldsymbol{\theta}^* \rangle. \tag{7}$$

因此为寻找复合梯度法的遗憾上界, 将式(5)和式(7)代入式(6), 有

$$\begin{aligned} R_T &\leq \sum_{t=1}^T \langle \tilde{\mathbf{g}}_t, \boldsymbol{\theta}_t - \boldsymbol{\theta}^* \rangle = \\ &\sum_{t=1}^T \left[\frac{1}{2\eta_t(1-b_1)} [\|\mathbf{v}_t^{1/4}(\boldsymbol{\theta}_t - \boldsymbol{\theta}^*)\|^2 - \|\mathbf{v}_t^{1/4}(\boldsymbol{\theta}_{t+1} - \boldsymbol{\theta}^*)\|^2] + \frac{\eta_t}{2(1-b_1)} \|\mathbf{v}_t^{-1/4} \mathbf{m}_t\|^2 + \right. \\ &\quad \left. \frac{b_1 \eta_t}{2(1-b_1)} \|\mathbf{v}_t^{-1/4} \mathbf{m}_{t-1}\|^2 + \frac{b_1}{2\eta_t(1-b_1)} \|\mathbf{v}_t^{1/4}(\boldsymbol{\theta}_t - \boldsymbol{\theta}^*)\|^2 \right]. \end{aligned} \tag{8}$$

下面首先整理含有 \mathbf{m}_t 的项,

$$\sum_{t=1}^T \eta_t \|\mathbf{v}_t^{-1/4} \mathbf{m}_t\|^2 = \sum_{t=1}^{T-1} \eta_t \|\mathbf{v}_t^{-1/4} \mathbf{m}_t\|^2 + \eta_T \sum_{i=1}^d \frac{m_{T,i}^2}{\sqrt{v_{T,i}}}. \tag{9}$$

式(9)表示将求和的最后一项单独处理, 并写成向量的分量形式. 其中, d 表示向量维度. 由 $\eta = \eta/t^{1/2}$ 及 $\mathbf{m}_t, \mathbf{v}_t$ 的更新形式, 通过数学归纳法, 式(9)可变形为

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^T \eta_t \|\mathbf{v}_t^{-1/4} \mathbf{m}_t\|^2 &= \sum_{t=1}^{T-1} \eta_t \|\mathbf{v}_t^{-1/4} \mathbf{m}_t\|^2 + \\ &\eta_T \sum_{i=1}^d \frac{m_{T,i}^2}{\sqrt{v_{T,i}}} = \sum_{t=1}^{T-1} \eta_t \|\mathbf{v}_t^{-1/4} \mathbf{m}_t\|^2 + \eta_T \sum_{i=1}^d \times \\ &\frac{\left(\sum_{j=1}^T b_1^{T-j} (1-b_1) \tilde{g}_{j,i} \right)^2}{\sqrt{\sum_{j=1}^T b_2^{T-j} (1-b_2) \tilde{g}_{j,i}^2}} = \sum_{t=1}^{T-1} \eta_t \|\mathbf{v}_t^{-1/4} \mathbf{m}_t\|^2 + \end{aligned}$$

$$\eta \sum_{i=1}^d \frac{\left((1-b_1) \sum_{j=1}^T b_1^{T-j} \tilde{g}_{j,i} \right)^2}{\sqrt{T(1-b_2) \sum_{j=1}^T b_2^{T-j} \tilde{g}_{j,i}^2}}. \tag{10}$$

根据闵可夫斯基不等式

$$\sum (a_k \cdot b_k)^2 \leq \sum a_k^2 \cdot \sum b_k^2,$$

将式(10)最后一项分子中的 b_1^{T-j} 视为 $a_k, b_2^{T-j} \tilde{g}_{j,i}^2$ 视为 b_k , 则式(10)可放大为

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^T \eta_t \|\mathbf{v}_t^{-1/4} \mathbf{m}_t\|^2 &\leq \sum_{t=1}^{T-1} \eta_t \|\mathbf{v}_t^{-1/4} \mathbf{m}_t\|^2 + \\ &\eta \sum_{i=1}^d \frac{\sum_{j=1}^T b_1^{T-j} \cdot \sum_{j=1}^T b_1^{T-j} \tilde{g}_{j,i}^2}{\sqrt{T(1-b_2) \sum_{j=1}^T b_2^{T-j} \tilde{g}_{j,i}^2}}. \end{aligned} \tag{11}$$

由于 $0 < b_1 < 1$, 式(11)最后一项的 $(1-b_1)$ 在不等式放大中可放大为 1. 又由等比数列求和公式可得

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^T \eta_t \|\mathbf{v}_t^{-1/4} \mathbf{m}_t\|^2 &\leq \sum_{t=1}^{T-1} \eta_t \|\mathbf{v}_t^{-1/4} \mathbf{m}_t\|^2 + \\ &\frac{\eta}{1-b_1} \sum_{i=1}^d \frac{\sum_{j=1}^T b_1^{T-j} \tilde{g}_{j,i}^2}{\sqrt{T(1-b_2) \sum_{j=1}^T b_2^{T-j} \tilde{g}_{j,i}^2}}. \end{aligned} \tag{12}$$

令 $\lambda = b_1/\sqrt{b_2}$, 并将式(12)分子中小于 1 的项放大为 1, 式(12)变为

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^T \eta_t \|\mathbf{v}_t^{-1/4} \mathbf{m}_t\|^2 &\leq \sum_{t=1}^{T-1} \eta_t \|\mathbf{v}_t^{-1/4} \mathbf{m}_t\|^2 + \\ &\frac{\eta}{(1-b_1) \sqrt{T(1-b_2)}} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^T \lambda^{T-j} |\tilde{g}_{j,i}|. \end{aligned} \tag{13}$$

由于每次迭代均可以放大为式(13)的最后一项, 因此式(13)不等式的右侧可继续放大为

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^T \eta_t \|\mathbf{v}_t^{-1/4} \mathbf{m}_t\|^2 &\leq \sum_{t=1}^{T-1} \frac{\eta}{(1-b_1) \sqrt{t(1-b_2)}} \times \\ &\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^t \lambda^{t-j} |\tilde{g}_{j,i}| = \frac{\eta}{(1-b_1) \sqrt{1-b_2}} \times \\ &\sum_{i=1}^d \sum_{t=1}^T \frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{j=1}^t \lambda^{t-j} |\tilde{g}_{j,i}| = \frac{\eta}{(1-b_1) \sqrt{1-b_2}} \times \\ &\sum_{i=1}^d \sum_{t=1}^T |\tilde{g}_{t,i}| \sum_{j=t}^T \frac{\lambda^{j-t}}{\sqrt{j}}. \end{aligned} \tag{14}$$

式(14)的最后一个等式由数学归纳法得出. 通过观察可知, 式(14)中 j 的取值从 t 开始, 因此 $j \geq t$. 由此可继续整理得

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^T \eta_t \|\mathbf{v}_t^{-1/4} \mathbf{m}_t\|^2 &\leq \frac{\eta}{(1-b_1) \sqrt{1-b_2}} \times \\ &\sum_{i=1}^d \sum_{t=1}^T |\tilde{g}_{t,i}| \sum_{j=t}^T \frac{\lambda^{j-t}}{\sqrt{j}} \leq \frac{\eta}{(1-b_1) \sqrt{1-b_2}} \times \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^d \sum_{t=1}^T |\tilde{g}_{t,i}| \leq \sum_{j=t}^T \frac{\lambda^{j-t}}{\sqrt{t}}. \quad (15)$$

由等比数列求和公式及柯西-许瓦兹不等式, 式(15)可放大为

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^T \eta_t \|\mathbf{v}_t^{-1/4} \mathbf{m}_t\|^2 &\leq \frac{\eta}{(1-b_1)\sqrt{1-b_2}} \times \\ \sum_{i=1}^d \sum_{t=1}^T |\tilde{g}_{t,i}| \sum_{j=t}^T \frac{\lambda^{j-t}}{\sqrt{t}} &\leq \frac{\eta}{(1-b_1)\sqrt{1-b_2}} \times \\ \sum_{i=1}^d \sum_{t=1}^T |\tilde{g}_{t,i}| \frac{1}{(1-\lambda)\sqrt{t}} &\leq \\ \frac{\eta}{(1-b_1)(1-\lambda)\sqrt{1-b_2}} \times \\ \sum_{i=1}^d \|\tilde{\mathbf{g}}_{1:T,i}\|_2 \sqrt{\sum_{t=1}^T \frac{1}{t}}. \end{aligned} \quad (16)$$

其中, $\|\tilde{\mathbf{g}}_{1:T,i}\|_2$ 表示导数第 i 个分量 T 次迭代值的 2 范数. 根据不等式

$$\sum_{i=2}^n \frac{1}{i} \leq \int_1^n \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_1^n = \ln n,$$

式(16)可继续放大为

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^T \eta_t \|\mathbf{v}_t^{-1/4} \mathbf{m}_t\|^2 &\leq \frac{\eta}{(1-b_1)(1-\lambda)\sqrt{1-b_2}} \times \\ \sum_{i=1}^d \|\tilde{\mathbf{g}}_{1:T,i}\|_2 \sqrt{\sum_{t=1}^T \frac{1}{t}} &\leq \\ \frac{\eta \sqrt{1+\ln T}}{(1-b_1)(1-\lambda)\sqrt{1-b_2}} \sum_{i=1}^d \|\tilde{\mathbf{g}}_{1:T,i}\|_2. \end{aligned} \quad (17)$$

将式(17)的结论代入式(8), 整理得

$$\begin{aligned} R_T &\leq \sum_{t=1}^T \left[\frac{1}{2\eta_t(1-b_1)} \left[\|\mathbf{v}_t^{1/4}(\boldsymbol{\theta}_t - \boldsymbol{\theta}^*)\|^2 - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \|\mathbf{v}_t^{1/4}(\boldsymbol{\theta}_{t+1} - \boldsymbol{\theta}^*)\|^2 \right] + \frac{b_1}{2\eta_t(1-b_1)} \times \right. \\ &\quad \left. \|\mathbf{v}_t^{1/4}(\boldsymbol{\theta}_t - \boldsymbol{\theta}^*)\|^2 \right] + \frac{\eta \sqrt{1+\ln T}}{(1-b_1)^2(1-\lambda)\sqrt{1-b_2}} \times \\ &\quad \sum_{i=1}^d \|\tilde{\mathbf{g}}_{1:T,i}\|_2 = \frac{1}{2\eta_1(1-b_1)} \|\mathbf{v}_1^{1/4}(\boldsymbol{\theta}_1 - \boldsymbol{\theta}^*)\|^2 + \\ &\quad \sum_{t=1}^T \left[\frac{b_1}{2\eta_t(1-b_1)} \|\mathbf{v}_t^{1/4}(\boldsymbol{\theta}_t - \boldsymbol{\theta}^*)\|^2 \right] + \frac{1}{2(1-b_1)} \times \\ &\quad \sum_{t=2}^T \left[\frac{\|\mathbf{v}_t^{1/4}(\boldsymbol{\theta}_t - \boldsymbol{\theta}^*)\|^2}{\eta_t} - \frac{\|\mathbf{v}_{t-1}^{1/4}(\boldsymbol{\theta}_t - \boldsymbol{\theta}^*)\|^2}{\eta_{t-1}} \right] + \\ &\quad \frac{\eta \sqrt{1+\ln T}}{(1-b_1)^2(1-\lambda)\sqrt{1-b_2}} \sum_{i=1}^d \|\tilde{\mathbf{g}}_{1:T,i}\|_2 = \\ &\quad \frac{1}{2\eta(1-b_1)} \sum_{i=1}^d v_{1,i}^{1/2} (\theta_{1,i} - \theta_i^*)^2 + \frac{b_1}{2(1-b_1)} \times \\ &\quad \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^d \frac{(\theta_{t,i} - \theta_i^*)^2 v_{t,i}^{1/2}}{\eta_t} + \frac{1}{2(1-b_1)} \times \\ &\quad \sum_{t=2}^T \sum_{i=1}^d (\theta_{t,i} - \theta_i^*)^2 \left[\frac{v_{t,i}^{1/2}}{\eta_t} - \frac{v_{t-1,i}^{1/2}}{\eta_{t-1}} \right] + \end{aligned}$$

$$\frac{\eta \sqrt{1+\ln T}}{(1-b_1)^2(1-\lambda)\sqrt{1-b_2}} \sum_{i=1}^d \|\tilde{\mathbf{g}}_{1:T,i}\|_2. \quad (18)$$

根据 \mathbf{v}_t 的更新规则, 有

$$\frac{v_{t,i}^{1/2}}{\eta_t} \geq \frac{v_{t-1,i}^{1/2}}{\eta_{t-1}}.$$

另由假设 $\boldsymbol{\theta}$ 的凸可行域 F 的半径存在上界 D_∞ , 式(18)可变为

$$\begin{aligned} R_T &\leq \frac{1}{2\eta(1-b_1)} \sum_{i=1}^d v_{1,i}^{1/2} D_\infty^2 + \frac{b_1}{2(1-b_1)} \times \\ \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^d \frac{D_\infty^2 v_{t,i}^{1/2}}{\eta_t} + \frac{1}{2(1-b_1)} \sum_{t=2}^T \sum_{i=1}^d D_\infty^2 \left[\frac{v_{t,i}^{1/2}}{\eta_t} - \frac{v_{t-1,i}^{1/2}}{\eta_{t-1}} \right] + \\ &\quad \frac{\eta \sqrt{1+\ln T}}{(1-b_1)^2(1-\lambda)\sqrt{1-b_2}} \sum_{i=1}^d \|\tilde{\mathbf{g}}_{1:T,i}\|_2 = \\ &\quad \frac{D_\infty^2}{2\eta(1-b_1)} \sum_{i=1}^d v_{T,i}^{1/2} + \frac{b_1 D_\infty^2}{2(1-b_1)} \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^d \frac{v_{t,i}^{1/2}}{\eta_t} + \\ &\quad \frac{\eta \sqrt{1+\ln T}}{(1-b_1)^2(1-\lambda)\sqrt{1-b_2}} \sum_{i=1}^d \|\tilde{\mathbf{g}}_{1:T,i}\|_2. \end{aligned} \quad (19)$$

最终可得复合梯度法的遗憾上界为

$$\begin{aligned} R_T &\leq \frac{D_\infty^2 \sqrt{T}}{2\eta(1-b_1)} \sum_{i=1}^d v_{T,i}^{1/2} + \frac{b_1 D_\infty^2}{2(1-b_1)} \times \\ \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^d \frac{v_{t,i}^{1/2}}{\eta_t} + \frac{\eta \sqrt{1+\ln T}}{(1-b_1)^2(1-\lambda)\sqrt{1-b_2}} \times \\ &\quad \sum_{i=1}^d \|\tilde{\mathbf{g}}_{1:T,i}\|_2. \end{aligned} \quad (20)$$

综上, 复合梯度下降法存在遗憾上界, 因此该算法具有收敛性.

2 案例分析

2.1 MNIST 数据集

由美国邮政系统开发的 MNIST 数据集^[7]是图像识别的经典数据集, 共包含 7 万张出自不同人的手写 0~9 数字图片. 每张图片均为 28×28 像素的黑白图片, 因此每组样本由 784 维的数据和一个样本标签组成.

利用 MNIST 数据集建立 Logistic 回归模型. C-Adam 算法超参数 $b_1 = 0.99$, $b_2 = 0.999$; Adam, AMSGrad 算法采用默认设置; NAG 算法的惯性系数选择 0.99; AdaDelta 算法的权重衰减系数选择 0.01. 所有算法的迭代步长均为 0.001, mini-batch 随机数量选择 256, 最大迭代次数设置为 500.5 种算法的训练损失及测试损失见图 1, 图 2.

2.2 Cifar-10 数据集

Cifar-10 数据集^[8]共包含 10 个种类、6 万张

像素为 32×32 的彩色图像,每个像素点包括 R, G, B 三个数值,因此该数据集维度为 $32 \times 32 \times 3 = 3\,072$.

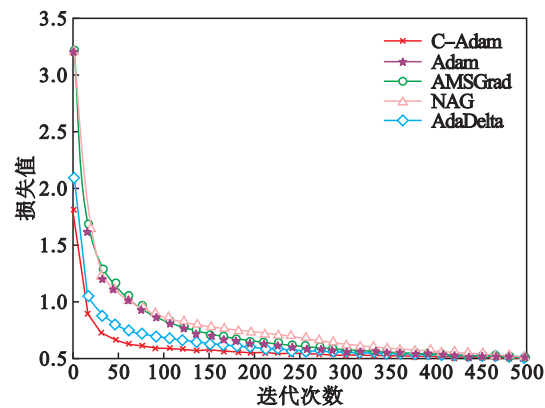


图 1 MNIST 训练损失
Fig. 1 Training cost of MNIST

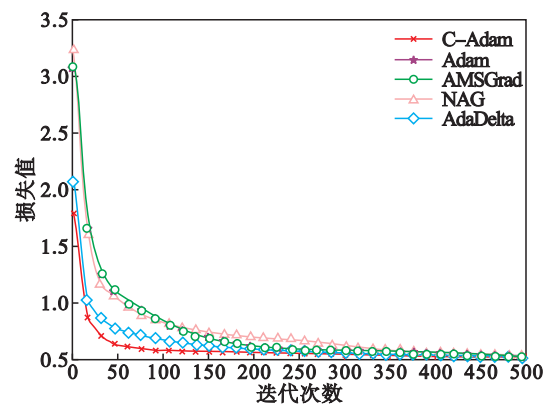


图 2 MNIST 测试损失
Fig. 2 Testing cost of MNIST

对 Cifar-10 数据集建立 Logistic 回归模型. C-Adam 算法超参数 $b_1 = 0.99, b_2 = 0.999$; $\text{Adam}, \text{AMSGrad}$ 算法采用默认设置; NAG 算法的惯性系数选择 0.99 ; AdaDelta 算法的权重衰减系数选择 0.01 . 所有算法的迭代步长均为 0.001 , mini-batch 随机数量选择 256 , 最大迭代次数设置为 $1\,000$. 5 种算法的训练损失及测试损失见图 3, 图 4.

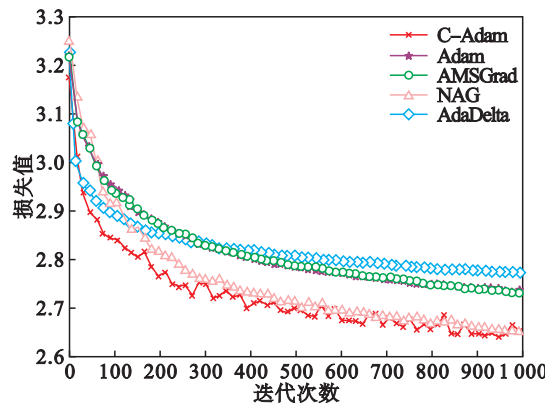


图 3 Cifar-10 训练损失
Fig. 3 Training cost of Cifar-10

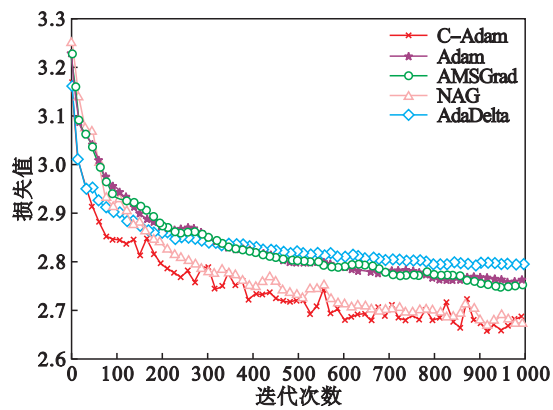


图 4 Cifar-10 测试损失
Fig. 4 Testing cost of Cifar-10

2.3 基于声发射信号的静拉伸破坏实验

对 45 钢试件进行两次静拉伸破坏实验,分别采集实验过程中产生的声发射信号数据,并根据拉伸机信息划分实验阶段,最终将两组数据合并,建立 Logistic 回归模型.

试件的样式尺寸根据国标 GB/T6398-2000 的有关内容确定,具体尺寸见图 5. 试件中部狭长型缺口为预制缺陷,通过两圆孔与拉伸机连接. 控制拉伸机加载速度恒定为 0.033 mm/s , 两次实验分别进行 $511, 673\text{ s}$, 分别测得声发射信号 $27\,081$ 组和 $18\,463$ 组.

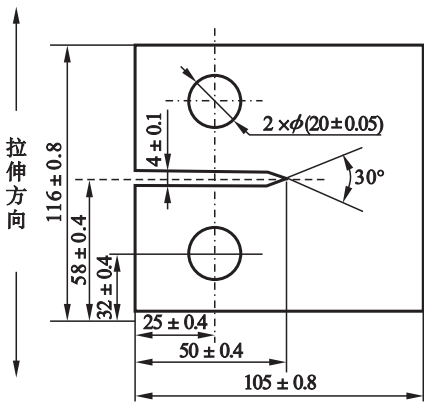


图 5 45 钢拉伸试件(单位:mm)
Fig. 5 Tensile test piece with 45 steel

得到原始信号后首先根据文献[9]所述方法进行特征提取,获得每组信号的 30 个特征参量;然后利用文献[10]的降噪方法对所有特征进行降噪处理,并将所得数据归一化;最后绘制拉伸机的时间-力曲线,找到试件经历的不同状态,以此对数据进行类别划分. 两组实验的阶段划分如图 6, 图 7 所示.

将两次实验数据合并,并建立 Logistic 回归模型. 其中,5 种算法的超参数选择与 Cifar-10 数据集实验相同. 训练损失与测试损失见图 8, 图 9, 模型的拟合正确率及验证正确率见表 1.

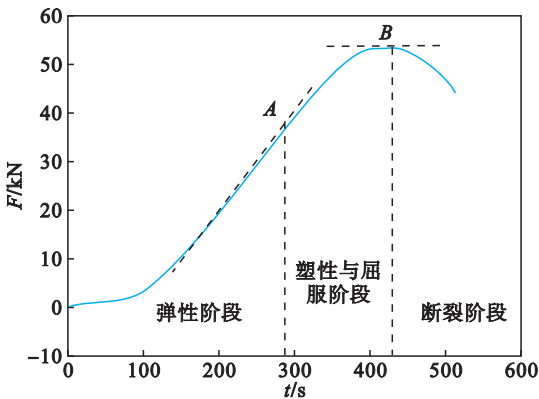


图6 实验1阶段划分
Fig. 6 Stage division for experiment 1

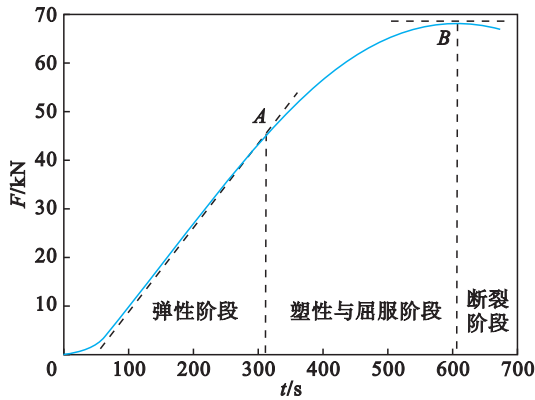


图7 实验2阶段划分
Fig. 7 Stage division for experiment 2

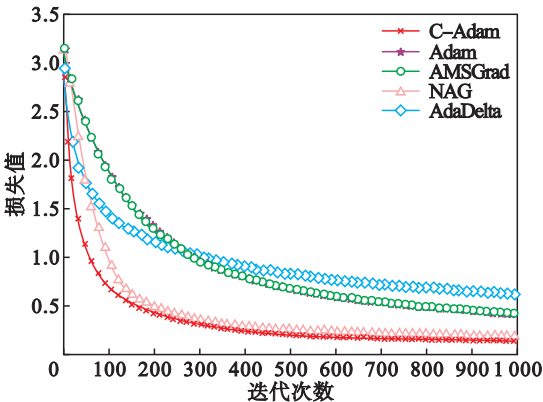


图8 实验数据训练损失
Fig. 8 Training cost of experimental data

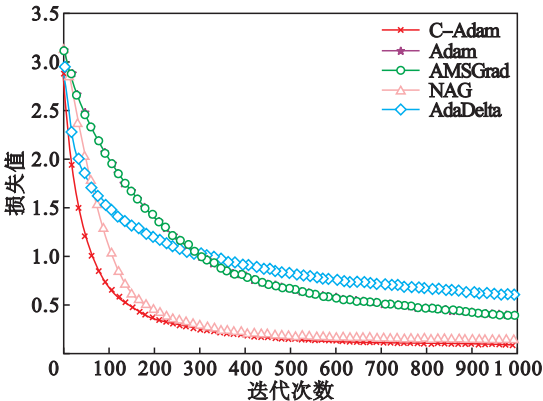


图9 实验数据测试损失
Fig. 9 Testing cost of experimental data

表1 模型拟合及验证正确率
Table 1 Model fitting and verification accuracy

算法	拟合正确率/%	验证正确率/%
C - Adam	98.17	97.86
Adam	94.80	93.58
AMSGrad	95.00	54.50
NAG	97.76	97.25
AdaDelta	94.50	94.49

3 结 论

1) 由三组训练损失图可以看出,C - Adam 在训练过程中的收敛速度明显高于其他算法,且随着迭代次数的增加损失值下降明显,证明该算法具有快速收敛的特性.

2) 对于三组测试损失,C - Adam 的收敛速度同样优于其他算法,且收敛于更小的损失水平,说明该算法具有良好的稳定性.

3) 通过 45 钢拉伸实验数据的模型拟合结果可知,C - Adam 的拟合正确率达到 98.17%,验证正确率达到 97.86%,明显高于其他算法,说明该算法可以提供更优的解.

参考文献:

[1] 王敏,周树道,杨忠,等.深度学习技术浅述[J].自动化技术与应用,2019(5):18-25.
(Wang Min, Zhou Shu-dao, Yang Zhong, et al. A brief introduction to deep learning technology [J]. Automation Technology and Application, 2019 (5):18-25.)

[2] Sashank J R, Satyen K, Sanjiv K. On the convergence of Adam and beyond [C]//International Conference on Learning Representations. Vancouver, Canada, 2018:21-38.

[3] Jun H, Zheng W D. An adaptive optimization algorithm based on hybrid power and multidimensional update strategy [J]. IEEE Access, 2019, 7(1):19355-19369.

[4] Ma J, Yarats D. Quasi-hyperbolic momentum and Adam for deep learning [C]//International Conference on Learning Representations. New Orleans, 2019:48-64.

[5] Luo L C, Xiong Y H, Liu Y, et al. Adaptive gradient methods with dynamic bound of learning rate [EB/OL]. (2019-02-26) [2019-12-15]. https://arxiv.org/abs/1902.09843.

[6] Diederik P K, Jimmy L B. Adam: a method for stochastic optimization [C]//International Conference on Learning Representations. New Orleans, 2015:1-13.

[7] Deng L. The MNIST database of handwritten digit images for machine learning research [J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2012, 29(6):141-142.

[8] Krizhevsky A. Convolutional deep belief networks on Cifar-10[EB/OL]. (2010-03-31) [2019-12-15]. http://www.cs.toronto.edu/~kriz/cifar.html.

[9] Lei Y, He Z, Zi Y, et al. Fault diagnosis of rotating machinery based on multiple ANFIS combination with GAS [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2007, 21(5):2280-2294.

[10] 王佳俊,许飞云.改进的自适应滤波算法及其在声发射信号中的应用[J].东南大学学报,2019,35(1):45-52.
(Wang Jia-jun, Xu Fei-yun. Improved adaptive filtering algorithm and its application in acoustic emission signal [J]. Journal of Southeast University, 2019, 35(1):45-52.)