

力电湿多物理场耦合 Cell-Based 光滑有限元法研究

李 明, 刘铭瑞, 周立明
(吉林大学 机械与航空航天工程学院, 吉林 长春 130025)

摘 要: 为了解决压电结构在实际工程应用中受到空气湿度影响的问题, 基于压电材料的本构方程、几何方程和平衡方程提出了力电湿多物理场耦合 Cell-based 光滑有限元模型. 建立了一种新型压电俘能器, 并对其简化模型的静力学性能进行求解, 对比了不同湿度变化对结构性能的影响. 与有限元法的计算结果对比, Cell-based 光滑有限元法采用较少的网格就能够达到与有限元法采用较多的网格相同的精度, 验证了本方法的正确性和有效性. 研究发现, 较小的湿度变化给结构的广义位移带来了较大的影响. 压电结构在潮湿环境下的性能研究为复合材料产品化过程提供了理论依据.

关 键 词: Cell-based 光滑有限元法; 压电材料; 静力学特性; 吸湿效应; 湿度

中图分类号: O 344 **文献标志码:** A **文章编号:** 1005-3026(2020)09-1363-06

Cell-Based Smoothed Finite Element Method for Elastic-Electro-Moisture Multi-physical Coupling Field

LI Ming, LIU Ming-rui, ZHOU Li-ming
(School of Mechanical and Aerospace Engineering, Jilin University, Changchun 130025, China. Corresponding author: ZHOU Li-ming, E-mail: lmzhou@jlu.edu.cn)

Abstract: In order to solve the problem that piezoelectric-based structures were influenced by the moisture in air among the practical engineering application, the Cell-based smoothed finite element method was proposed for the elastic-electro-moisture multi-physical coupling field based on the constitutive equations, geometric equations and equilibrium equations of piezoelectric material. This paper established a piezoelectric-based energy harvester, and further investigated the static behavior of the simplified model. Furthermore, the effects of different moisture changes on the structure performance were studied. Comparing with the numerical results of finite element method, the Cell-based smoothed finite element method employing fewer elements can achieve the same accuracy as finite element method, which verified the accuracy and effectiveness of the as-proposed Cell-based smoothed finite element method. The numerical results show that a slight moisture change provides a strong effect on the generalized displacements of the structures. The investigation of piezoelectric structures under the humid environment provides the theoretical support for composite material productization process.

Key words: Cell-based smoothed finite element method; piezoelectric material; static behavior; hygroscopic effect; moisture

压电复合材料是一种应用较广的智能材料, 具有应力场与电场耦合的效应^[1-4]. 在电子设备、生物医药及航空航天等领域都得到了广泛的应用^[5-7]. 压电复合材料在制备及应用时常处于潮湿的环境中, 材料的吸湿效应对结构的力学特性具有重要影响. 研究压电材料在潮湿环境中的力学性能对压电智能结构的设计应用至关重要.

应用最广泛的有限元法(finite element

method, FEM) 由于其依赖单元插值的特点具有很大的局限性,如精度较低、体积锁定、对网格精度要求高等。光滑有限元法(smoothed finite element method, SFEM)是近年来被刘桂荣提出的一种新型数值计算方法,其将光滑应变技术引入到传统有限元法中。由于采用线性点插值来建立形函数,省略了计算形函数导数的过程,极大地改善了 FEM 的不足,使得光滑有限元在处理不规则网格时具有较高的稳定性、收敛性和精度^[8]。随后 SFEM 得到了极大的发展,一系列 SFEM 被提出并应用于结构分析、电磁学、传热学等领域。Zhou 等^[9]采用 Cell-based SFEM 对复合材料梁进行了静力学分析。Nguyen-Xuan 等^[10]利用 Edge-based SFEM 对二维压电结构进行了自由振动分析。Feng 等^[11]将 Face-based SFEM 用于计算复合结构的非线性导热问题。Cell-based 光滑有限元(CS-FEM)处理复合材料多物理场耦合问题具有一定的优势。

从空气中吸收水分的特性被称作吸湿效应。文献[12-13]研究了在原子尺度下外部环境对压电复合材料性能的影响。近年来,压电复合材料的力学特性研究取得了众多成果。Allik 等^[14]应用有限元法研究了三维压电结构的动力学响应问题。Wang^[15]利用 FEM 对压电双晶片的静态和动态性能进行了分析。Wang 等^[16]研究了机械及电负载下压电材料的裂纹扩展问题。Weaver 等^[17]研究了高湿度环境下电极材料对压电陶瓷导电率的影响。Gu 等^[18]研究了压电传感器对湿度变化的响应。

光滑有限元法在处理多物理场耦合问题时具有优势,且未发现现有相关文献采用 SFEM,研究压电材料的吸湿效应。基于此,本文提出力电湿多物理场耦合 CS-FEM,研究湿度对压电材料静力学性能的影响。给出了压电复合材料的本构方程、几何方程和平衡方程;推导了力电湿耦合 CS-FEM 静力学控制方程;构建了一种新型压电俘能器模型,求解该结构在不同湿度条件下的静力学行为。将数值计算结果与 FEM 进行了对比,验证了提出的力电湿多物理场耦合 Cell-based 光滑有限元法的正确性。

1 压电复合结构力电湿耦合 Cell-based 光滑有限元模型

1.1 本构方程

压电复合材料的本构方程为

$$\sigma = C\zeta - eE - \lambda\Delta m, \quad (1)$$

$$D = e^T\zeta + \varepsilon E + P\Delta m. \quad (2)$$

式中: σ 和 D 为应力和电位移矩阵; ζ 和 E 为应变和电场强度矩阵; C , e 和 ε 分别为弹性常数、压电系数、介电常数矩阵; λ 和 P 表示水分膨胀系数和湿电系数矩阵; $\lambda = C\beta$, β 为湿膨胀系数矩阵; m 表示湿度,即单位介质中水蒸气的质量分数, Δm 表示湿度变化矩阵。

几何方程为

$$\zeta = L_u u, \quad (3)$$

$$E = -\nabla\Phi. \quad (4)$$

式中: L_u 和 ∇ 为微分算子矩阵; Φ 为电势矩阵。

平衡方程为

$$L_u^T \sigma = 0, \quad (5)$$

$$\nabla^T D = 0. \quad (6)$$

机械场、电场和湿度场的本质边界条件和自然边界条件如下所示:

$$u_i = \tilde{u}_i, \text{ on } \Gamma_u, \quad (7)$$

$$\sigma_{ij} n_j = \tilde{T}_i, \text{ on } \Gamma_T, \quad (8)$$

$$\Phi = \tilde{\Phi}, \text{ on } \Gamma_\Phi, \quad (9)$$

$$D_i n_i = \tilde{Q}, \text{ on } \Gamma_q, \quad (10)$$

$$\Delta m = \tilde{\Delta m}, \text{ on } \Gamma_m, \quad (11)$$

$$q_i n_i = \tilde{q}, \text{ on } \Gamma_v, \quad (12)$$

$$\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_T = \Gamma_\Phi \cup \Gamma_q = \Gamma_m \cup \Gamma_v. \quad (13)$$

式中: \tilde{u}_i , $\tilde{\Phi}$ 和 $\tilde{\Delta m}$ 为位移边界 Γ_u 、电势边界 Γ_Φ 和湿度边界 Γ_m 上的给定条件; \tilde{T}_i , \tilde{Q} 和 \tilde{q} 为力边界 Γ_T 、电位移边界 Γ_q 和水分通量边界 Γ_v 上的给定条件。

1.2 力电湿耦合 Cell-based 光滑有限元法

根据节点的位移和电势构造 CS-FEM 近似值 \bar{u} 和 $\bar{\Phi}$,

$$\bar{u} = \sum_{i=1}^{n_e} N_i^u u_i = N_u u, \quad (14)$$

$$\bar{\Phi} = \sum_{i=1}^{n_e} N_i^\Phi \Phi_i = N_\Phi \Phi. \quad (15)$$

式中: N_u 和 N_Φ 为 CS-FEM 形函数; n_e 为单元总数。

光滑域内一点 x^k 处的应变和电场强度为

$$\zeta(x^k) = \int_{\Omega_C^k} \underbrace{L_u \bar{u}(x)}_{\zeta(x)} \Lambda(x - x^k) d\Omega, \quad (16)$$

$$E(x^k) = \int_{\Omega_C^k} \underbrace{-\nabla \bar{\Phi}(x)}_{E(x)} \Lambda(x - x^k) d\Omega. \quad (17)$$

式中:光滑函数满足 $\int_{\Omega_C^k} \Lambda(x - x^k) d\Omega = 1$, 本文采用下式:

$$\Lambda(x - x^k) = \begin{cases} 1/A_C^k, & x \in \Omega_C^k; \\ 0, & x \notin \Omega_C^k. \end{cases} \quad (18)$$

式中: A_C 表示光滑域 Ω_C 的面积, 满足 $A_C^k = \int_{\Omega_C^k} d\Omega$. 将式(18)代入式(16)和(17)可得到光滑应变和电场强度:

$$\bar{\boldsymbol{\zeta}}(\mathbf{x}^k) = \frac{1}{A_C^k} \int_{\Gamma_C^k} \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) \mathbf{n}_u^k d\Gamma, \quad (19)$$

$$\bar{\mathbf{E}}(\mathbf{x}^k) = -\frac{1}{A_C^k} \int_{\Gamma_C^k} \bar{\Phi}(\mathbf{x}) \mathbf{n}_\Phi^k d\Gamma. \quad (20)$$

式中: Γ_C 为光滑域 Ω_C 的边界; \mathbf{n}_u 和 \mathbf{n}_Φ 为积分域的外法向向量.

$$\bar{\boldsymbol{\zeta}}(\mathbf{x}^k) = \sum_{i=1}^{n_{\Gamma_S}} \bar{\mathbf{B}}_u^i(\mathbf{x}^k) \mathbf{u}_i = \bar{\mathbf{B}}_u(\mathbf{x}^k) \mathbf{u}, \quad (21)$$

$$\bar{\mathbf{E}}(\mathbf{x}^k) = -\sum_{i=1}^{n_{\Gamma_S}} \bar{\mathbf{B}}_\Phi^i(\mathbf{x}^k) \Phi_i = -\bar{\mathbf{B}}_\Phi(\mathbf{x}^k) \Phi. \quad (22)$$

式中: n_{Γ_S} 为单个光滑子单元中节点数; 光滑矩阵 $\bar{\mathbf{B}}_u$ 和 $\bar{\mathbf{B}}_\Phi$ 可表示为

$$\bar{\mathbf{B}}_u^i(\mathbf{x}_b^G) = \frac{1}{A_C} \sum_{b=1}^{n_a} N_i^u(\mathbf{x}_b^G) \mathbf{n}_u^k l_{C_b}^k, \quad (23)$$

$$\bar{\mathbf{B}}_\Phi^i(\mathbf{x}_b^G) = \frac{1}{A_C} \sum_{b=1}^{n_a} N_i^\Phi(\mathbf{x}_b^G) \mathbf{n}_\Phi^k l_{C_b}^k. \quad (24)$$

其中 n_a 为单个光滑子域的边界总数.

Cell-based 光滑有限元力场、电场和湿度场耦合多物理场的控制方程为

$$\mathbf{K}_{uu} \mathbf{u} + \mathbf{K}_{u\Phi} \Phi - \mathbf{K}_{um} \Delta m = 0, \quad (25)$$

$$\mathbf{K}_{u\Phi}^T \mathbf{u} - \mathbf{K}_{\Phi\Phi} \Phi + \mathbf{K}_{\Phi m} \Delta m = 0. \quad (26)$$

由于湿度场与力场和电场不完全耦合, 故可将湿度场以载荷的形式施加, 则式(25)和式(26)可改写为

$$\mathbf{K}_{uu} \mathbf{u} + \mathbf{K}_{u\Phi} \Phi = \mathbf{F}_{um}, \quad (27)$$

$$\mathbf{K}_{u\Phi}^T \mathbf{u} - \mathbf{K}_{\Phi\Phi} \Phi = -\mathbf{F}_{\Phi m}. \quad (28)$$

式中: \mathbf{K}_{uu} , $\mathbf{K}_{u\Phi}$ 和 $\mathbf{K}_{\Phi\Phi}$ 为弹性、力电耦合和介电刚度矩阵; \mathbf{F}_{um} 和 $\mathbf{F}_{\Phi m}$ 为湿应力和湿电载荷矩阵.

$$\mathbf{K}_{uu} = \sum_{i=1}^{n_c} \bar{\mathbf{B}}_u^{iT} \mathbf{C} \bar{\mathbf{B}}_u^i A_C^i, \quad (29)$$

$$\mathbf{K}_{\Phi\Phi} = \sum_{i=1}^{n_c} \bar{\mathbf{B}}_\Phi^{iT} \boldsymbol{\varepsilon} \bar{\mathbf{B}}_\Phi^i A_C^i, \quad (30)$$

$$\mathbf{K}_{u\Phi} = \sum_{i=1}^{n_c} \bar{\mathbf{B}}_u^{iT} \mathbf{e} \bar{\mathbf{B}}_\Phi^i A_C^i, \quad (31)$$

$$\mathbf{F}_{um} = \int_{\Omega} \bar{\mathbf{B}}_u^{iT} \boldsymbol{\lambda} \Delta m d\Omega, \quad (32)$$

$$\mathbf{F}_{\Phi m} = \int_{\Omega} \bar{\mathbf{B}}_\Phi^{iT} \mathbf{P} \Delta m d\Omega. \quad (33)$$

式中, n_c 为光滑子单元的总个数.

2 数值实验

2.1 压电悬臂梁

悬臂梁由 PZT - 4 构成, 几何尺寸如图 1 所

示, 沿 y 轴方向极化. 材料参数在表 1 中给出. 边界条件设定为 $x = -15 \text{ mm}$ 处 $u_x = 0, u_y = 0, \Phi = 0$, 湿度变化为 $\Delta m = 0.4\%$. 结构处于平面应变状态, 将 CS - FEM 和 FEM 计算的 x 和 y 方向位移及电势(广义位移)结果进行对比.

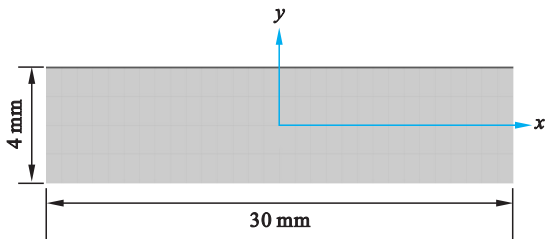


图 1 压电悬臂梁几何模型
Fig. 1 Geometric model of piezoelectric beam

表 1 PZT - 4 材料参数
Table 1 Piezoelectric-4 material parameters

材料参数	参数值
弹性常数/GPa	$C_{11} = 139, C_{13} = 74.3,$ $C_{33} = 115, C_{44} = 25.6$
压电常数/($\text{C} \cdot \text{m}^{-2}$)	$e_{13} = -5.2, e_{33} = 15.08,$ $e_{15} = 12.72$
介电系数/($\text{C} \cdot \text{V} \cdot \text{m}$)	$\varepsilon_{11} = 13.053 \times 10^{-9},$ $\varepsilon_{33} = 11.505 \times 10^{-9}$
湿膨胀系数/($\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$)	$\lambda_{33} = 1.1 \times 10^{-4}$

图 2 给出了悬臂梁上边采用两种计算方法在网格划分为 $30 \times 4, 60 \times 8$ 和 120×16 时的广义位移解. CS - FEM 的解与传统 FEM 的解吻合良好, 由此看出该方法的正确性和有效性; 随着网格数量增加计算结果基本相同, 由此验证该方法的收敛性. 表 2 给出了不同网格下两种方法的计算时间, 在采用相同网格数时两种方法的计算时间大致相同, 但随着网格数的增加, CS - FEM 的计算时间逐渐小于 FEM, 由此验证了算法的高效性.

2.2 压电俘能器吸湿效应

压电俘能器由 PZT - 4 和钢材组成, 简化模型见图 3. 钢的弹性模量 $E = 2.1 \text{ GPa}$, 泊松比 $\nu = 0.3$, 在 $x = 0$ 处 $u_x = 0, u_y = 0, \Phi = 0$, 网格大小为 $0.001 \text{ mm} \times 0.001 \text{ mm}$, 比较广义位移在不同的水分浓度下的变化情况. 图 4 和图 5 给出了由 CS - FEM 和 FEM 计算, 湿度变化为 $\Delta m = 0.4\%, 0.5\%$ 和 0.7% 的俘能器 AB 和 BC 边的广义位移结果图. CS - FEM 的解与 FEM 的解吻合良好, 随着 Δm 的升高广义位移的相对变化也随之增大, 并且在结构的自由端获得了广义位移的最大相对变化量. 湿度变化 $\Delta m = 0.7\%$ 时获得了结构整体的最大广义位移值.

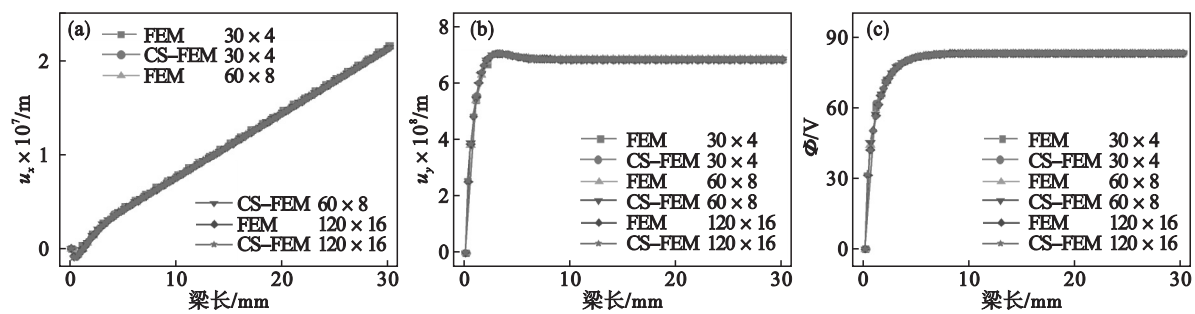


图 2 压电悬臂梁上边广义位移
Fig. 2 Generalized displacements of piezoelectric beam upper borderline

表 2 不同单元数的 FEM 和 CS - FEM 计算时间对比
Table 2 Computation time of FEM and CS-FEM in different element numbers

单元数	120	480	1 920
FEM 时间/s	0. 137	3. 694	189. 155
CS - FEM 时间/s	0. 164	3. 897	186. 531

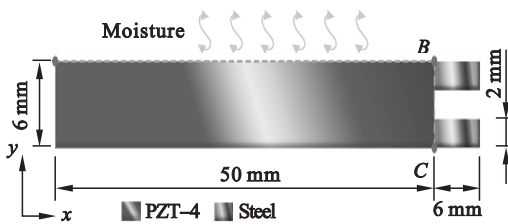


图 3 压电俘能器简化模型
Fig. 3 Modified model of piezoelectric-based energy harvester

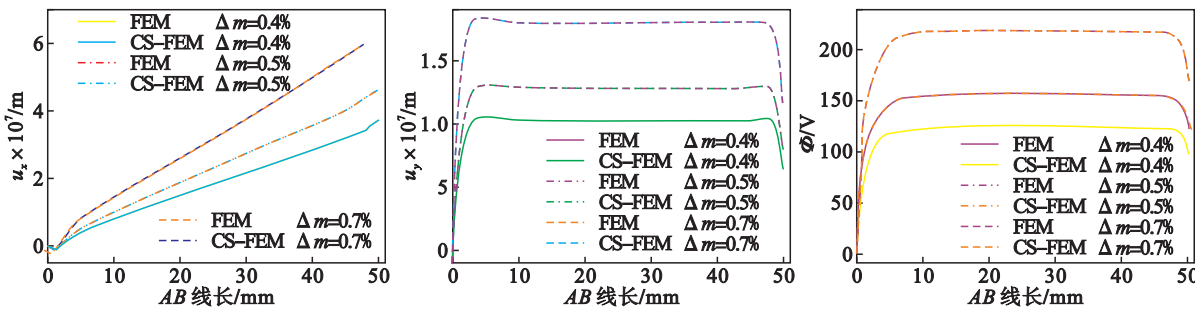


图 4 AB 边广义位移
Fig. 4 Generalized displacements of AB line

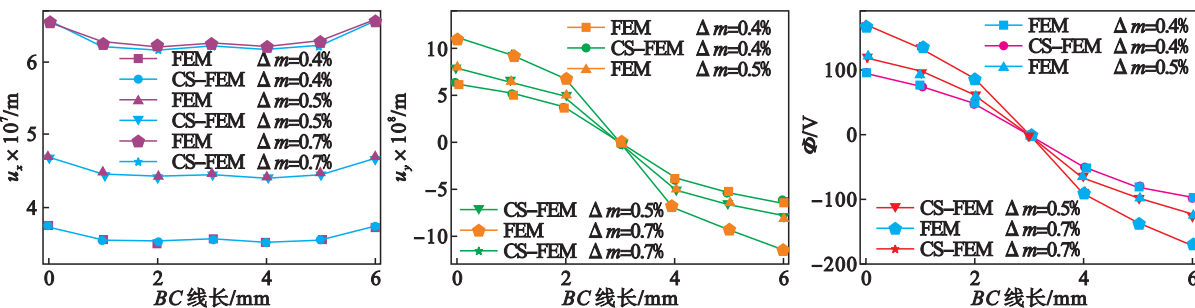


图 5 BC 边广义位移
Fig. 5 Generalized displacements of BC line

图 6 给出了由 CS - FEM 计算的广义位移云图. 从广义位移云图可见湿度的轻微变化引起了结构广义位移较大的变化, 空气中湿度的变化对智能结构具有重要影响.

2.3 含孔压电俘能器吸湿效应

含孔压电俘能器由 PZT - 4 和钢材组成, 其

几何尺寸、材料参数及边界条件与算例 2.2 相同, 在 PZT - 4 压电材料的中心开方孔 (30 mm × 2 mm), 其简化模型如图 7 所示. 同样采用大小为 0.001 mm × 0.001 mm 的网格. 给出了广义位移在湿度变化 $\Delta m = 0.7\%$ 下的变化情况.

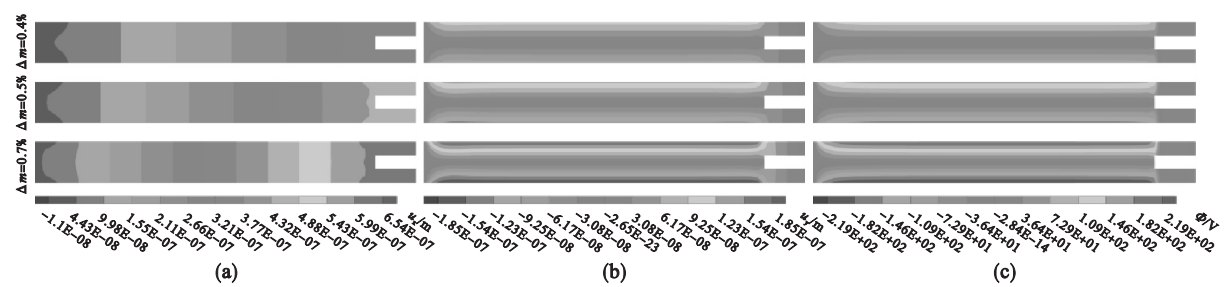


图6 湿度变化 $\Delta m=0.4\%$, 0.5% , 0.7% 时的广义位移云图

Fig. 6 Contour plots of generalized displacements with moisture change of $\Delta m=0.4\%$, 0.5% and 0.7%
(a)— u_x ; (b)— u_y ; (c)— Φ .

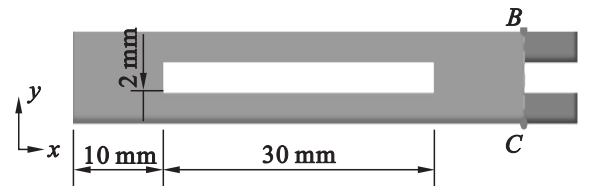


图7 含孔压电俘能器简化模型

Fig. 7 Modified model of porous piezoelectric-based energy harvester

图8给出了由CS – FEM 和 FEM 计算的湿

度变化为 $\Delta m = 0.7\%$ 的俘能器 BC 边的广义位移. 图9给出了由CS – FEM 计算, $\Delta m = 0.7\%$ 的广义位移云图. 从图8中可以得出与2.2节类似的结论. 将图8与图5比较可以看出, 在只受潮湿环境影响时俘能器结构的变化对广义位移几乎不产生影响. 从图9中看出, 采用湿度变化 $\Delta m = 0.7\%$ 时获得的结构整体的最大位移及电势与2.2节不含孔的压电俘能器几乎完全一致.

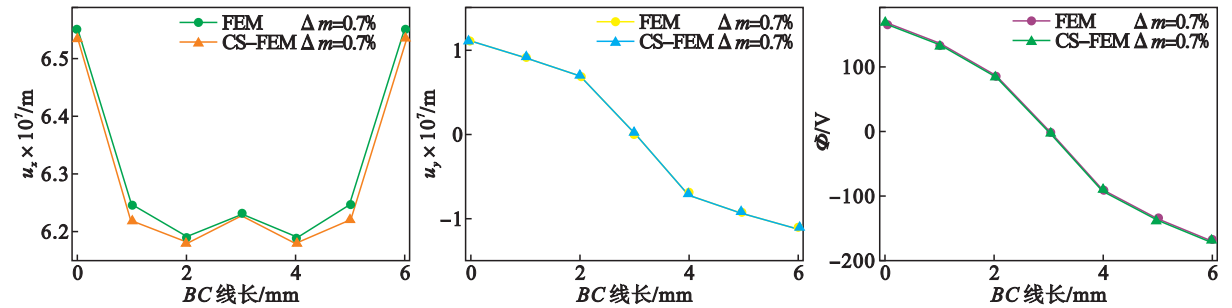


图8 BC 边广义位移

Fig. 8 Generalized displacements of BC line

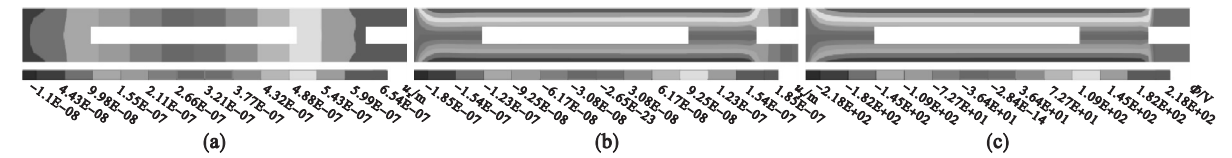


图9 在湿度变化 $\Delta m=0.7\%$ 时的广义位移云图

Fig. 9 Contour plots of generalized displacement with moisture change of $\Delta m=0.7\%$
(a)— u_x ; (b)— u_y ; (c)— Φ .

3 结 论

- 1) CS – FEM 较好地解决了压电材料受潮湿环境影响下的静力学问题. 将数值模拟结果与传统 FEM 作对比, 验证了方法的正确性与有效性.
- 2) 广义位移的最大相对变化量在结构的自由端附近获取. 在只受潮湿环境影响时, 结构变化对广义位移几乎不产生影响.

3) 湿度变化对位移和电势的影响较大, 较小的湿度变化就会对广义位移产生较大的影响.

参考文献:

[1] Cao M S, Wang X X, Zhang M, et al. Electromagnetic response and energy conversion for functions and devices in low-dimensional materials [J]. *Advanced Functional Materials*, 2019, 29(25): 1807398.

[2] Zhang M, Yang H J, Li Y, et al. Cobalt doping of bismuth ferrite for matched dielectric and magnetic loss [J]. *Applied Physics Letters*, 2019, 115(21): 212902.

- [3] Ren H S, Fan H Q. The role of piezoelectric rods in 1 – 3 composite for the hydrostatic response applications [J]. *Sensors and Actuators A: Physical*, 2006, 128 (1): 132 – 139.
- [4] Zeng X H, Fan H Q, Zhang J. Prediction of the effects of particle and matrix morphologies on Al_2O_3 particle/polymer composites by finite element method [J]. *Computational Materials Science*, 2007, 40 (3): 395 – 399.
- [5] Williams R B, Park G, Inman D J, et al. An overview of composite actuators with piezoceramic fibers[J]. *Proceedings of IMAC-XX*, 2002, 4753: 421 – 427.
- [6] Ren X H, Fan H Q, Zhao Y W, et al. Flexible lead-free BiFeO_3 /PDMS-based nanogenerator as piezoelectric energy harvester[J]. *ACS Applied Materials & Interfaces*, 2016, 8 (39): 26190 – 26197.
- [7] Ren X H, Fan H Q, Wang C, et al. Magnetic force driven noncontact electromagnetic-triboelectric hybrid nanogenerator for scavenging biomechanical energy [J]. *Nano Energy*, 2017, 35: 233 – 241.
- [8] Liu G R, Dai K Y, Nguyen T T. A smoothed finite element method for mechanics problems [J]. *Computational Mechanics*, 2007, 39 (6): 859 – 877.
- [9] Zhou L M, Li M, Tian W J, et al. Coupled multi-physical cell-based smoothed finite element method for static analysis of functionally grade magneto-electro-elastic structures at uniform temperature [J]. *Composite Structures*, 2019, 226: 111238.
- [10] Nguyen-Xuan H, Liu G R, Nguyen-Thoi T, et al. An edge-based smoothed finite element method for analysis of two-dimensional piezoelectric structures[J]. *Smart Materials and Structures*, 2009, 18 (6): 065015.
- [11] Feng S Z, Cui X Y, Li A M, et al. A face-based smoothed point interpolation method (FS-PIM) for analysis of nonlinear heat conduction in multi-material bodies [J]. *International Journal of Thermal Sciences*, 2016, 100: 430 – 437.
- [12] Zhang M, Wang X X, Cao W Q, et al. Electromagnetic functions of patterned 2D materials for micro-nano devices covering GHz, THz, and optical frequency [J]. *Advanced Optical Materials*, 2019, 7 (19): 1900689.
- [13] 蔡永珠, 何朋, 疏金成, 等. 二维过渡金属碳化物的结构, 电磁特性及微波吸收性能 [J]. 黑龙江大学自然科学学报, 2019, 36 (1): 47 – 60.
(Cai Yong-zhu, He Peng, Shu Jin-cheng, et al. Structure, electromagnetic properties and microwave absorption performance of two-dimensional transition metal carbides [J]. *Journal of Natural Science of Heilongjiang University*, 2019, 36 (1): 47 – 60.)
- [14] Allik H, Hughes T J R. Finite element method for piezoelectric vibration [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1970, 2 (2): 151 – 157.
- [15] Wang S Y. A finite element model for the static and dynamic analysis of a piezoelectric bimorph [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2004, 41 (15): 4075 – 4096.
- [16] Wang H, Singh R N. Crack propagation in piezoelectric ceramics: effects of applied electric fields [J]. *Journal of Applied Physics*, 1997, 81 (11): 7471 – 7479.
- [17] Weaver P M, Cain M G, Stewart M, et al. The effects of porosity, electrode and barrier materials on the conductivity of piezoelectric ceramics in high humidity and DC electric field [J]. *Smart Materials and Structures*, 2012, 21 (4): 045012.
- [18] Gu L, Zhou D, Cao J C. Piezoelectric active humidity sensors based on lead-free NaNbO_3 piezoelectric nanofibers [J]. *Sensors*, 2016, 16 (6): 833.